数理解析研究所講究録
222巻 1974年 92-99

Waring 問題における $G(n)$ の評価について

名工大 数学教室　江田義計

I. M. Vinogradov は 1959 年に n 中和の Waring 問題における $G(n)$ の upper bound に対し、彼の理論のほとんど極限ともみえる美しい結果：$n \geq 170000$ に対して

(1) $G(n) < n(2\log n + 4\log\log n + 2\log\log\log n + 13)$

を与えた。その若々しい姿にはただ頭が下がります，Hua は 1949 年に下記の定理4 を与えたとき Vinogradov の仕事の素晴らしさを称えてすでに final stage に達したとも述べているのであるが。

この結果をうるに大切な役割を果す一つは「Vinogradov の平均値定理」と呼ばれる（この命名は Hua による）次の結果である：

定理1：正整数 n, r に対し P は十分大としておく，

$n \geq 12,\quad r \geq r_0 = [6.5\, n^2 \log(12n^2)]$

ならば

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}$$

とおいて

$$V = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^r d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

とおくと

$$V \leqq (8n)^{4 \cdot 3n^3 (\log 12n^2)^2} P^{r - \frac{n(n+1)}{2}}$$

をうる。

Hua は 1959 年の Enzyklopädie の中の一分冊の改訂版を 1963 年に北京から出したが（指数和的估計及其在数論中的応用），いち早くその附録の一節で上記の Vinogradov の結果を紹介し，上の平均値定理の代りに少しゆるい次の結果で十分であることを注意している。

定理 2：任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2r_0} d\alpha_n \cdots d\alpha_1 \ll P^{2r_0 - \frac{1}{2}n(n+1) + \epsilon},$$

ここで r_0 は次表で与えられる

n	2	3	$\cdots$	10	$n \geqq 11$
$2r_0$	6	16	$\cdots$	1770	$2r_0 \geqq 2n^2(3\log n + \log\log n + 4) - 4$

この Hua の結果は実は，1952 年の Acta Scientica

Sinica, Vol 1, No. 1, p.1～76 の美事な結果によるもののようである，この結果は細かい注意を加えて堆壘素数論の中に証明されてある（この本の初版は53年修訂本は1957年である）．これは次の定理3の形の平均値定理であるが古いTarry型Diophantus方程式の解の個数を与えるものでありHuaの論文の表題をとってTarry型定理と呼んでおくがよい．

定理3: 上記のように r_0 を定義して（$r_0 \geq 2[n^2(3\log n + \log\log n + 4)] - 11$ としてよい）

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2r_0}\, d\alpha_n \cdots d\alpha_1 = c_1 c_2 P^{2r_0 - \frac{1}{2}n(n+1)} + O\left(P^{2r_0 - \frac{1}{2}n(n+1) - c(k)}\right)$$

ここで c_1, c_2 は収束する正数で次式で与えられる

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 e(\beta_n x^n + \cdots + \beta_1 x)\, dx \right|^{2r_0} d\beta_n \cdots d\beta_1$$

$$c_2 = \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_n=1}^{\infty} \sum_{\substack{h_1=1 \\ (h_1,q_1)=1}}^{q_1} \cdots \sum_{\substack{h_n=1 \\ (h_n,q_n)=1}}^{q_n} \left| B\left(\frac{h_n}{q_n}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right) \right|^{2r_0}$$

$$B\left(\frac{h_n}{q_n}, \ldots, \frac{h_1}{q_1}\right) = \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \sum_{x=1}^{q_1 \cdots q_n} e\left(\frac{h_n}{q_n} x^n + \cdots + \frac{h_1}{q_1} x\right).$$

さて上記の種々の三角和の評価に対して（この言葉はVinogradovによるものであろう）その根本になるのは更に次の形の平均値定理なのであるが，これは194年にHuaによって次の形に，その簡明な証明と共に与えられた

(Quart. J. Math (Oxford), Vol. 20, p.48-61)

定理4: $P \geqq 2$, kは整数として

$$r_0 \geqq \frac{1}{4} n(n+1) + lk \quad , \quad k \geqq 2$$

とおくと

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2r_0} \, d\alpha_n \cdots d\alpha_1 \leqq (7r_0)^{4r_0 l} (\log P)^{2l} P^{2r_0 - \frac{1}{2} n(n+1) + \Delta}$$

ここで $\Delta = \frac{1}{2} n(n+1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l$ ，で $l = l(n)$ は非負整数とする.

1950年頃までのVinogradovの結果の展望はStekloff研究所から出ている二論文で得られるが幸にK. F. RothとA. Davenportによって英文の本 The methods of trigonometrical sums in the theory of numbers (Interscience社),(1954). として身近にある. またその後の結果などについてもVinogradov自身によって

МЕТОД ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, МОСКВА, 1971　が発刊されている.

有限次代数体における Waring 問題などに関してはたく Siegel 以来 Tatuzawa, Körner などによって取扱われて来た筆者は (1) に近い結果は得たがそれは定理 1〜3 によらず定理4 の形によったものであった。その特殊な場合つまり有理数体の場合を（一般の場合を注意深く改変して得られる）のべる。記号は 59年の原論文および英文の本によるものとする。

N は十分大きい正整数とし, $P=[N^{1/n}]$, $X_0=[\sqrt{P}]$, $Y_0=[\sqrt{X_0}]$, $R=[X_0^{1-1/2n}]$, $\tau=2nP^{n-1}$, $\tau_0=X_0^{n-1/2}$, $\gamma=1/4\,(1-1/2n)$ とし更に $-1/\tau\leq\alpha\leq 1-1/\tau$ の中で $\alpha=a/q+z$, $|z|\leq 1/q\tau$, $q\leq P^{\gamma}$, a, q は正整数として $(a,q)=1$, $0\leq a<q$, を満足する α の集合を basic interval という.

$k_2>2n$ とし $X_j=[X_0^{\delta^j}]$, $Y_j=[\sqrt{X_j}]$, $X_{k_2}>C_0>0$ $(0\leqq j\leqq k_2-1)$, $\delta=1-k_0/(n-\frac{1}{2})$, $k_0<n$ とし

$$Q(\alpha) = \sum_{p} \sum_{w} e^{2\pi i \alpha p^n w}$$

とおく，ここで 素数 p は $R < p \leqq 2R$ を w は

$1 \leqq h_j \leqq r_j$ として

$$w = \sum_{j=0}^{k_2 - 1} (x_j + h_j)$$

を独立に動くとする．

このとき $Q(\alpha)$ の $\sum\sum$ のとる個数を Q' とおくと

$$Q(\alpha) \ll Q' X_0^{\rho}$$

$$\rho = \frac{1}{r_0}\left(-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)\delta^{k_2} + \frac{\Delta}{4k_2}\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \delta^{k_2}\right) + \epsilon \right)$$

を得る．更に $P_1 = \left[\frac{1}{4}P\right]$，$P_i = \left[\frac{1}{2}P_{i-1}^{1-1/n}\right]$，$2 \leqq i \leqq k_3$

とし $\xi_1, \cdots, \xi_{k_3}$ は $P_i \leqq \xi_i \leqq 2P_i$ とし $u = \xi_1^n + \cdots$
$\cdots + \xi_{k_3}^n$ が $\left(\frac{1}{5}P\right)^n$ と $\left(\frac{1}{2}P\right)^n$ の間を動くとする．

かくて

$$L(\alpha) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha x^n}$$

$$S(\alpha) = \sum_{u} e^{2\pi i \alpha u}$$

とし

$$I(N) = \int_{-\tau_0^{-1}}^{-\tau_0^{-1}+1} L^{4n}(\alpha)\, Q(\alpha)\, S^2(\alpha)\, e^{-2\pi i \alpha N} \, d\alpha$$

このあと本と同じ方法でやればよいが

$$k_0 = \left[\frac{1}{2} \log n \right]$$

$$k_2 = \left[\frac{\log (8n)}{-\log \left(1 - \frac{k_0}{n - \frac{1}{2}}\right)} + 1 \right]$$

$$l = \left[\frac{\log (4n(\log n + 1))}{-\log \left(1 - \frac{1}{n}\right)} + 1 \right]$$

$$r_0 = 2 \left[\frac{1}{8} k(k+1) + \frac{1}{2} k l + 1 \right], \quad k = 2k_0$$

$$k_3 = \left[\frac{\log \left((n-1)/16 n r_0 \right)}{-\log \left(1 - \frac{1}{n}\right)} + 1 \right]$$

とおくと $I(N) > 0$ が得られ同時に $n \geq 55$ で

$$G(n) < 2n \log n + 6n \log\log n + 31n - 11.$$

を得る。

なお本では $n \geqq 3$ で

$$G(n) < n(3 \log n + 11)$$

を得られている。

代数体での Waring 問題については最近の Tatuzawa の Acta Arith XXIV, 1973 を参照されたい。

Vinogradov の平均値定理について Birch などの結果がこれから重要になると思うし，また最近の Izbest，

(1973) に出た A.A. Karacuba についてのべるべきであるが，これは重要な結果を含むと思うので次の機会にゆずりたい。なお筆者の怠慢を常にいましめられ，早速に Karacuba の論文の御注意をいただくなど竜沢先生に対して種々のことをこめて深く感謝したい

(1974－8－10)