数理解析研究所講究録
223巻 1974年 7-10

フィッシャーの情報量と正規分布

統数研　　清水良一

1.　$f(x)$ は連続な導関数をもつ密度関数で、$|x| \to \infty$ のとき、$xf(x) \to 0$ を満たすとする．また平均0、分散σ^2として，location family $\Lambda = \{f(x-\theta)\}$ を考える．Λ にたいするフィッシャーの情報量 $I(\Lambda)$ は、

$$I = I(\Lambda) = E\left(\frac{\partial \log f(X-\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\,dx$$

で与えられ、θ に無関係である．

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma^2 f'(x) + x f(x))^2}{\sigma^2 f(x)}\,dx$$

とおくと，ふういに

$$J = \sigma^2 I(\Lambda) - 1 \geq 0$$

が得られる．等号がなりたつのは、すなわち、$I(\Lambda)$が最小になるのは、明らかに $f(x)$ が $N(0, \sigma^2)$ のときである

この性質，すなわち、フィッシャー情報量が最小になるという正規分布の特徴的な性質は、次の意味で安定である：フィッシャー情報量が小さければ、f の分布は $N(0, \sigma^2)$ に近い．

定理　f は上に述べた条件をみたすとする．次の不等式がなりたつ．

$$\sup_x |f(x) - \phi(x)| \leq 1.7\sqrt{J},$$

$$\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \phi(x)|\,dx \leq 3.2\sqrt{J}.$$

$F(x)$ は f の分布関数、$\phi(x)$, $\Phi(x)$ はそれぞれ $N(0,1)$ の密度関数、分布関数である．

2.　f は前節の条件をみたすとする．F からの大きさ n の標本の normalized sum の密度関数を $f_n(x)$ とする．

$f_n(x) = \sqrt{n}\, f^{*n}(\sqrt{n}\, x)$.　　location family

$\Lambda_n = \{ f_n(x-\theta) \}$ のフィッシャー情報量 I_n は、

$$I_n = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f^{*n\prime}(x))^2}{f^{*n}(x)}\,dx$$

で与えられ、

$$n I_n \leq m I_m + (n-m) I_{n-m}, \qquad n > m.$$

$$\sigma^{-2} \leq I_{n,m} \leq I_n.$$

を満足する．　とくに，

$$a_p = \lim_{n\to\infty} I_{pn} \geq \sigma^{-2}, \qquad p=1,2,\cdots$$

が存在する．

3.　$Y_1,\cdots,Y_n$ が平均 0，分散 $\sigma^2(=1)$ の分布 G からの標本とする．　$Z_1,\cdots,Z_n$ を Y とは独立な $N(0,1)$ からの標本として，

$$X_j = (Y_j + Z_j)/\sqrt{2}, \qquad j=1,\cdots,n$$

とおく．　$Y_1,\cdots,Y_n$ の normalized sum の分布を G_n とすると，$X_1,\cdots,X_n$ の normalized sum は密度，

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{2}x-y)^2/2}\, dG_n(y)$$

をもつ．

$f_n'^2(x)/f_n(x)$　が可積分関数　$q(x) = \min(4, 4/x^2)$ より大きくならないこと，および，location family にたいする十分統計量が，標本平均なら，その family は正規であることを使って，　$a_p = 1,$　　$p=2,3,\cdots$　が得られる．

また，これから

$$\lim I_n = 1,$$

すなわち、f_n が、あるいはその分布が $N(0,1)$ に近づくことができる。これから $G_n \Longrightarrow \Phi$、すなわち、最も単純な場合の中心極限定理が導かれる。