数理解析研究所講究録
225巻 1975年 292-297

複素積分と Lagrangean 多様体

青本和彦

§序　f を原点 0 で正則な n 変数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ の函数とする. この時ベクトル場 grad Ref と $f=c$ (c は 0 に近い正数) の Cell 構造との関係について 1つの問題を提出する.

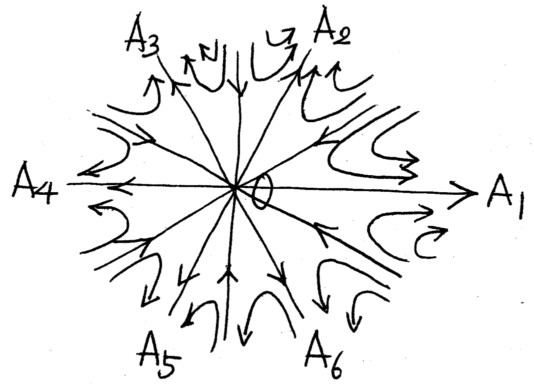
[問題] ベクトル場 $v=$ grad Ref の軌跡

$$\frac{dz_i}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_i}$$

で $t=-\infty$ のとき原点 0 に集積するものの全体を $\mathfrak{M}$ とおくとき $\mathfrak{M}$ は n 次元の CW-複体で且つ実際には Lagrangean 多様体片からなっているだろうか？　$\mathfrak{M}\cap(f=c)$ は $f=c$ の Cell 構造を与えるだろうか？

例1. $n=1$ として $f=z^n$ とする

すると grad Ref の軌跡上では
Imf は const. になる. 図示すれば



原点を通るものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$ $(k=0, 1, 2, 3, \cdots, 2m-1)$ この中で $t=-\infty$ で0を極限点として持つものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$ $(k=0, 2, \cdots, 2m-2)$ の m 個存在する.

例2. $f = z_1^{m_1} + z_2^{m_2} + \cdots + z_n^{m_n}$

$m_1, m_2, \cdots, m_n \geqq 1$, 整数とすると

$\mathfrak{M}$ は 岡睦雄, Brieskorn-Pham 氏によって得られた join をつくることに相当している. Lagrangean 多様体になることも明らかである.

これらの $\mathfrak{M}$ は 積分

$$\int e^{\lambda f(z)} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \qquad (\lambda \to +\infty)$$

の 漸近展開 の表示のすべてを与えることに相当している. 事実 $f(z)$ が上記の例のような場合 $R=\mathbb{C}[z_1\cdots z_n]$, $M=\Omega^1(R)$ として R 上の外~~微~~分形式 $\bigoplus \bigwedge^p M = \Omega^{\cdot}$ 上に次のように定義される De Rham hypercohomology $\mathbb{H}(\Omega^{\cdot})$

$$\nabla_\omega : \to \Omega^p \to \Omega^{p+1} \to$$

$$\omega = \lambda\, df$$

の ~~rank~~ に等しいだけの $\mathfrak{M}^-$ を構成出来る.

§2. 積分

$$\int f(z)^\lambda\, dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$

を考える.但し $f(z)$ は多項式とする. ベクトル場 $v=\operatorname{grad}\log|f(z)|$ を考え こんどは

[仮定 I] v の 臨界点 $f(z)\neq 0$ となるものは すべて孤立しているとする.

このとき　この孤立点達を　$P_1, \cdots, P_M$ とすれば
各孤立点　P_i に対応して局所的に
得られる　§1 の意味での Lagrangean
manifold 片 を $\mathcal{U}$ によって 全域に
接続する. これを $\mathfrak{M}_{i1}, \cdots, \mathfrak{M}_{i\mu_i}$
$(1 \leq i \leq N)$ とおくとき　これらは $\mathfrak{M}$ 対
$\mathbb{C}^n, (f=0)$ の 相対 cycle を与える
ことになるが これが 次の hypercohomology
の~~双対~~基底 を与えることになる であろうか？
すなわち　$\omega = \frac{df}{f}$ とおき　R を有理
函数で　$f=0$ にのみ 極を持つ ものの
全体とする.　R 上の 微分形式 環
$\Omega^{\cdot}$ に対して　De Rham cohomology
$\mathbb{H}(\Omega^{\cdot})$

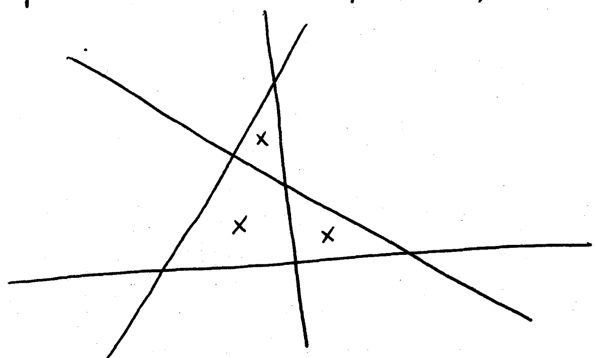
$$\left(\nabla_\omega : \to \Omega^p(R) \to \Omega^{p+1}(R) \to \qquad \varphi \to d\varphi + \lambda \frac{df}{f} \wedge \varphi \right)$$

を考える. 漸近展開 $(\lambda \to \infty)$ は 各
$\mathfrak{M}_k$ に対応して 1つずつ存在する
であろうか？

例.3 積分 ($f_1, \cdots, f_m$ real とする)

$$\int f_1^{\lambda_1}\cdots f_m^{\lambda_m}\,\varphi\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

を考える. ここで $f_1, \cdots, f_m$ を線型とする.
φ は $(f_1=0)\cup\cdots\cup(f_m)$ でのみ極を持つ
有理函数とする. $\lambda_j = \lambda_j^0 + n_j b$ ($n_j>0$
整数) とおいて $f = f_1^{n_1} f_2^{n_2}\cdots f_m^{n_m}$ と
おくとき $\operatorname{grad}\log|f|$ の臨界点は
すべて実であってしかも $\mathbb{R}^n$ を
壁 $\operatorname{Re} f_j=0$ で仕切られた部屋で
compact なものの中にのみ存在する.



今 臨界点がすべて non-degenerate
とすれば $\mathfrak{M}_j$ は compact な部屋
そのものである. 従って $H^n(\mathring{\Omega})$ の
双対基底を与える.

文献 J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces
A. Weinstein, Normal modes for nonlinear Hamiltonian Systems
K. AOMOTO On vanishing of cohomology attached to certain multiplicative meromorphic functions