数理解析研究所講究録
225巻 1975年 62-71

◦ b函数の決定
— quasi-homogeneous, isolated singularity の場合

三輪哲二

この稿の目的は, quasi-homogeneous かつ isolated な singularity の b函数が, weight で explicit に計算できるのを示す事である。

問題の説明から始める。
$f(x)$ を原点で正則な函数とする。この時 sについて多項式であるような微分作用素 $P(s,x,D)$ が存在して (Bernstein [1], Björk [2])

$$(1) \qquad P(s,x,D)\, f(x)^{s+1} = b(s)\, f(x)^s$$

となる。ここで $b(s)$ は s の多項式である。
このような $b(s)$ の全体は一変数多項式環 $\mathbb{C}[s]$ の ideal を作る。そのイデアルの生成元を $f(x)$ の b函数という。
以下 $\mathcal{D}$ を微分作用素の層, $\mathcal{D}[s]$ を s について多項式の微分作用素の層とする。
b函数 $b(s)$ は $\mathcal{D}[s]$ 左加群

$$(2) \qquad \mathcal{M} = \mathcal{D}[s]\, f(x)^s \big/ \mathcal{D}[s]\, f(x)^{s+1}$$

における $\mathcal{D}[s]$-準同型 $s: P(s,x,D) f^s \longmapsto s P(s,x,D) f^s$

の最小多項式である。$End_{\mathcal{D}[s]}(\mathcal{M})$ が有限次元$/\mathbb{C}$ である事が言えれば，(1)を満たす $P(s,x,D)$ 及び $b(s)$ の存在の別証明になるが，まだ証明されてない。

ここで扱うのは次の二つの仮定を置く場合。

$\boxed{\text{仮定 1}}$ vector field X があって $Xf = f$

$\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ $\quad f_\nu = \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}$ とおくと

この仮定は $f \in \mathfrak{a}$ と同じである。

$\boxed{\text{仮定 2}}$ $S = \{x \in \mathbb{C}^n ; f(x) = 0\}$ の特異点は原点のみである。

仮定2から，座標変換により $f(x)$ は多項式になる。また仮定2のもとで，座標変換の後仮定1の X は次の形に取れる。(斉藤恭司[3])

(3) $$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ここで $(r ; r_1, \cdots, r_n)$ は正の整数で weight と呼ぶ。

(4) $$X f(x)^s = s f(x)^{s-1} \cdot X f(x) = s f(x)^s$$

であるから (2) は次のように書きかえられる。

$$(5) \qquad \mathcal{M} = \mathcal{D} f(x)^s / \mathcal{D} f(x)^{s+1}$$

$\mathcal{J} = \{ P(x,D) \in \mathcal{D} \ ; \ P f^s \in \mathcal{D} f^{s+1} \}$.
を求めて見よう。

$P f^s = Q f^{s+1}$ とすると $(P - Qf) f^s = 0$
よって $P = (P - Qf) + Qf$ と書けるから

$\mathcal{J}_0 = \{ P(x,D) \in \mathcal{D} \ ; \ P(x,D) f(x)^s = 0 \}$
とすれば

$$(6) \qquad \mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{D} f$$

で与えられる。

$\boxed{\text{命題 1}}$ $\quad \mathcal{J}_0 = \sum \mathcal{D} \left(f_i \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$

(略証) $P(x,D) f(x)^s = 0$ とする。左辺の計算を実行して s のべきに展開すると

$P_m(x, \operatorname{grad} f) s^m + \cdots = 0$ （m は P の階数）

となるから $\quad P_m(x, \operatorname{grad} f) = 0$
ここで後に述べる補題から仮定2を使うと

$P_m(x, \xi) \in \oplus \mathcal{O}_0[\xi] (f_i \xi_j - f_j \xi_i)$

となり

$P(x,D) = \sum Q_{ij}(x,D) \left(f_i \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) +$ 低階

と書けるから，同じ議論をくり返す事により
命題は証明される。

命題1の証明に必要な代数的補題を説明する。

A を noetherian local ring

$\mathfrak{m}$ を A の maximal ideal とする。

① M を A module とする時 $f \in A$ が M regular とは $f: M \longrightarrow M$ が injective

② $(f_1, \cdots, f_n)$ が M regular とは

f_i が $M/f_1M + \cdots + f_{i-1}M$ regular

③ M : 有限生成, $f_1, \cdots, f_n \in \mathfrak{m}$ の時
次は同値

i) $(f_1, \cdots, f_n)$ が M regular

ii) $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ として

$$\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{a}^\nu M / \mathfrak{a}^{\nu+1} M \longleftarrow (M/\mathfrak{a}M)[T_1, \cdots, T_n]$$

は bijective

iii) $\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{a}^\nu M \longleftarrow M[T_1, \cdots, T_n]$

の kernel は $A[T_1, \cdots, T_n]$ module として $f_i T_j - f_j T_i$ で生成される。

ここで $\longleftarrow$ は各同次成分ごとに T_i に f_i を代入する操作である。

④ Aを regular local ring とする。
この時 $f_1, \cdots, f_n \in \mathfrak{m}$ $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$
に対して $\dim(A/\mathfrak{a}) = \dim A - n$
が成立すれば $(f_1, \cdots, f_n)$ は A regular

さて $b(s)$ は $s+1$ で割り切れる事に注意する。
実際，そうでないとすれば (1) で $s=-1$ と
おくと矛盾する．

$b(s) = (s+1)\, b_n(s)$ と分解して $b_n(s)$を
求めよう。そのためには $\mathfrak{m}$ の部分加群

(7) $\mathfrak{M}_n = \mathcal{D}(s+1)f^s / (\mathcal{D}(s+1)f^s \cap \mathcal{D}f^{s+1})$

の準同型としての s の最小多項式を求めれば
よい。

$\boxed{\text{命題 2}}$ $\mathfrak{M}_n = \mathcal{D} / \mathcal{D}f_1 + \cdots + \mathcal{D}f_n$

(証明) $P(s+1)f^s = Q f^{s+1}$ とする
$s=-1$ とおくと $0 = Q \cdot 1$
よって Q は $\sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ の形をしている。

$Qf^{s+1} = (s+1) \sum_{i=1}^{n} Q_i f_i f^s$ だから
$(s+1)$ で割って
$$P f^s = \sum_{i=1}^{n} Q_i f_i f^s$$

従って $P - \sum_{i=1}^{n} Q_i f_i \in \sum \mathcal{D}\left(f_i \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$

$$\| $$

$$\sum \mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} f_j\right)$$

よって $P \in \sum \mathcal{D} f_i$ //

$\boxed{\text{命題3}}$

(8) X: $\mathcal{D}/\mathcal{D}f_1 + \cdots + \mathcal{D}f_n$ ⟲

の最小多項式と

(9) X^*: $\mathcal{O}/(f_1, \cdots, f_n)$ ⟲

の最小多項式とは一致する。(X^*はXのadjoint)

(証明)

(8)の作用は $P(x, D) \longmapsto P(x, D) \cdot X$

(9)の作用は $a(x) \longmapsto X^* a(x)$ である。

$\forall P(x, D)\, b(X) \in \mathcal{D}f_1 + \cdots + \mathcal{D}f_n$

$\Leftrightarrow \quad b(X^*)\, {}^\forall P^*(x, D)\, {}^\forall a(x) \in (f_1, \cdots, f_n)$

$\Leftrightarrow \quad b(X^*)\, {}^\forall a(x) \in (f_1, \cdots, f_n)$ //

最後に(9)の線型写像を具体的に決定しよう。まず、$\mathcal{O}/(f_1, \cdots, f_n)$の$\mathbb{C}$基底として、単項式から成るものが取れるが、単項式はX^*の固有ベクトルだから、X^*は対角化される。従って t^{-rX^*} もまた $\mathcal{O}/(f_1, \cdots, f_n)$の線型写像として確定するが、我々の定理は次の通りである。

$\boxed{\text{定理}}$ $\quad \mathrm{Trace}(t^{-rX^*}) = \dfrac{(t^{r_1} - t^{r}) \cdots (t^{r_n} - t^{r})}{(1 - t^{r_1}) \cdots (1 - t^{r_n})}$

注意 斉藤〔3〕 Lemma 1.5. による, isolated singularity のための必要条件を weight の条件に書き直すと

weight $(r; r_1, \cdots, r_n)$ の多項式で isolated singularity を持つものが存在すれば

(10) 各 $\{\nu_1, \cdots, \nu_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ に対し i) か ii) が成り立つ。

i) $r \in \langle r_{\nu_1}, \cdots, r_{\nu_k} \rangle$

ii) $\exists \{\mu_1, \cdots, \mu_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$

$$\{\mu_1, \cdots, \mu_k\} \cap \{\nu_1, \cdots, \nu_k\} = \phi$$

$$r - \mu_i \in \langle r_{\nu_1}, \cdots, r_{\nu_k} \rangle$$

但し $\langle r_{\nu_1}, \cdots, r_{\nu_k} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} m_i r_{\nu_i} \; ; \; m_i \in \{0, 1, 2 \cdots\} \right\}$

条件(10)から定理の右辺が t の多項式になる事が言える。しかし, 逆は言えない。(例えば $(r; r_1, \cdots, r_4) = (93; 31, 3, 10, 18)$)

また条件(10)が十分かどうかは知られていない。なお Orlik-Wagreich: Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$-action にある分類は間違っている。

定理の系

定理の右辺を $\sum_\nu t^{r\alpha_\nu}$ と書くと

$$X^* = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\alpha_\mu \end{pmatrix} \qquad \mu : \text{Milnor数}$$

$$b(s) = (s+1) \prod_{\substack{\text{重複しない} \\ \alpha_\nu \text{についての積}}} (s + \alpha_\nu)$$

$\boxed{\text{注意}}$ $X_0^* = -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} r_i$

であるから，$\alpha_\nu > 0$ である。

（定理の証明）　$g_\nu(y_1, \cdots, y_n) = f_\nu(y_1^{r_1}, \cdots, y_n^{r_n})$とする。

$$A = \mathcal{O}_X / (f_1, \cdots, f_n)$$

$$B = \mathcal{O}_Y / (g_1, \cdots, g_n)$$

$$M = \sum_{0 \leqq \nu_i < r_i} \mathbb{C}\, y_1^{\nu_1} \cdots y_n^{\nu_n}$$

とおくと $A \underset{\mathbb{C}}{\otimes} M = B$ である。

この同型は $a(x) \otimes y_1^{\nu_1} \cdots y_n^{\nu_n} \longmapsto a(y_1^{r_1}, \cdots, y_n^{r_n}) y_1^{\nu_1} \cdots y_n^{\nu_n}$ で与えられる。

t^{rX_0} は A の元には $x_i \longmapsto t^{r_i} x_i$ と働くが B, M の元への作用を $y_i \longmapsto t y_i$ と決めてやれば，上の同型と適合している。

$$\mathrm{Trace}(t^{rX_0}|_A) = \frac{(1-t^{r-r_1}) \cdots (1-t^{r-r_n})}{(1-t^{r_1}) \cdots (1-t^{r_n})}$$

を言えばよいが，明らかに

$$\mathrm{Trace}(t^{rX_0}|_M) = \frac{(1-t^{r_1}) \cdots (1-t^{r_n})}{(1-t) \cdots (1-t)}$$

であるから，

$$\mathrm{Trace}(t^{rX_0}|_B) = \frac{(1-t^{r-r_1})\cdots(1-t^{r-r_n})}{(1-t)\cdots(1-t)}$$

を言えばよい。(以上のトリックは Milnor-Orlik [4] のものを代数的に再構成したものである。)

$\boxed{\text{補題}}$ $g_1, \cdots, g_n$ を n 個の同次多項式としその次数を $s_1, \cdots, s_n$ とする。
また☆ $\{y \in \mathbb{C}^n \,;\, g_1(y) = \cdots = g_n(y) = 0\} = \{0\}$ とする。この時 線型写像

$$T: \mathcal{O}/(g_1, \cdots, g_n) \longrightarrow \mathcal{O}/(g_1, \cdots, g_n)$$
$$\quad a(y) \longmapsto a(ty)$$

の trace は
$$\frac{(1-t^{s_1})\cdots(1-t^{s_n})}{(1-t)\cdots(1-t)}$$
で与えられる。

(補題の証明) $\mathfrak{m} = (y_1, \cdots, y_n)$ とする。
$$n_\nu = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^\nu/(\mathfrak{m}^{\nu+1} + \mathfrak{m}^\nu \cap (g_1, \cdots, g_n))$$
とすれば $\mathrm{Trace}\, T = \sum n_\nu t^\nu$

まず n_ν が $g_1, \cdots, g_n$ の係数に依らない事を言う。$g_1, \cdots, g_n$ の係数の空間において条件☆は同次多項式で定義される超曲面を除いた所で成り立つ。従って n_ν が係数につき locally constant であればよい。
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu = \dim \mathcal{O}/(g_1, \cdots, g_n)$$
が constant である事はよく知られている。

ところが，$g_1, \cdots, g_n$ が同次である事に注意すれば，ν次式全体の作る有限次元ベクトル空間において，$g_1, \cdots, g_n$ から生成されるν次式の全体のなす部分空間の次元は $g_1, \cdots, g_n$ の係数に下半連続に依存するから n_ν は上半連続となり ✡の条件のもとでは一定になる。$g_i(y) = y_i^{s_i}$ の時に計算して補題を得る。//

参考文献

Bernstein [1] The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, F.A.A., 1972.

Björk [2] Dimensions over Algebras of Differential Operators (to appear).

斉藤恭司 [3] Quasihomogenene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Inven. math., 1971.

Milnor-Orlik [4] Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, Topology, 1970.

付記 以上は，佐藤・柏原両氏との協同の仕事を筆者がまとめたものである。