数理解析研究所講究録
225巻 1975年 54-61

b-函数の特殊根と、孤立特異点の分類

東大 教養　斎藤恭司

ここではb-函数のある種の根から導かれる量が、代数曲線論における示性数の様な役割を、孤立特異点に対しはたす事を示し、それに基いて簡単な場合について、特異点の分類を行ってみます。ここでは複素幾何や各種のモノドロミーとの関連で[3]の内容を主としますが、力学系の立場から、V.I. Arnold [7] の研究もあります。

§1. $r(f)$, $s(f)$

fを$\mathbb{C}^n$における原点0の近傍で定義された正則函数とする時、fが(又は$\{f=0\}$が)0で孤立特異点を持つとは、fの偏微分係数で生成されたイデアル$(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$の共通零点の中で0が孤立している事で、言いかえれば、$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$の極大イデアル$\mathfrak{m}$の適当な巾を$(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$が含む事である。

さて更に、fがイデアル$(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$に属している時$f$を quasi-homogenous と呼ぶ事にする。以降に述べる種々の結

果は quasi-homog. を仮定せずとも正しいと思われるが、証明の都合上本稿では、quasi-homog. な f のみをあつかう事にする。

さて f を quasi-homog. とすると $\mathbb{C}^n$ の原点の局所座標を適ぎとりかえて、次の様な vector field X をみつける事ができる。

$$Xf = f \quad , \quad X = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \text{ ここで } r_i \text{ は } 0 < r_i \leq \tfrac{1}{2} \text{ なる有理数。}$$

(b-函数と超曲面の特異性 1973、数理研)

さて柏原等によると、f の b-函数は

$$\left\{ u \in \mathcal{B}_{pt} : \frac{\partial f}{\partial x_i} u = 0 \quad i = 1, \cdots, n \right\}$$ の endmorphism として

作用する X の最少多項式として与えられる。さて原点における δ 函数は明かに $\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta = 0 \quad i = 1, \cdots, n$ であるが、δ に X を作用させてみると：

$$X\delta = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i \,\delta \,.$$

従って δ は X の個有ベクトルで、その個有値は $\sum_{i=1}^{n} r_i$ である。

特に $\sum_{i=1}^{n} r_i$ は f の b-函数の根であるが、最 根になる事は容易に確められる。

今 $r(f) = \sum_{i=1}^{n} r_i$ とおくと、明かに $0 < r(f) \leq \frac{n}{2}$ であって、$r(f) = \frac{n}{2}$ となる必要充分条件は、f の hessian が non-degenerate (すなわち、f が普通の2重点を定義する) 事である。

$s(f) = n - 2r(f)$ とおけば、次の事は易容にたしかめられる。

$$X h(f) = s(f)\, h(f) \qquad \text{ここで } h(f) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

さて $r(f + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \cdots + x_{n+k}^2) = r(f) + \frac{k}{2}$ なので

更にdualityを用いれば（δ函数とHessianは互にdualとなっており） $s(f)$ は

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

のendmorphismとして作用している X の個有値の最大なものとして特徴ずけられ、その個有ベクトルはHessian $h(f)$ となる。

さて $r(f)$, $s(f)$ は $2r(f)+s(f)=n$, $0<r(f)\leq\frac{n}{2}$, $0\leq s(f)<n$ 等を満す有理数であったが、もう少し精密に、次の評価式を得る。[3]

__定理__ i) $r(f)\leq\frac{1}{2}(n-\mathrm{corank}(f))+\frac{1}{3}\,\mathrm{corank}(f)$

ii) $s(f)\geq\frac{1}{3}\,\mathrm{corank}(f)$

但し、 $\mathrm{corank}(f)$ とはHessian行列 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j=1,\cdots,n}$ のcorankの事。

__例.__ $f=x_1^{p_1}+\cdots+x_n^{p_n}$ とすると $r(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$, $s(f)=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{2}{p_i}\right)$.

§2 有理特異点、と単純楕円型特異点

前節でみた様に $s(f)$ は 0 と n の間の有理数で、$s(f+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+k}^2)=s(f)$ 等の性質を持ち、ある意味で f の特異性の度合を表わす（$s(f)$ が大きいほど特異）とみなせる。

そこで $s(f)$ の値の小いものについての f の分類を試みる。

まず $s(f)\leq 1$ とすると、前節最後の定理により、$\mathrm{corank}(f)$

≤ 3。従って3次以上の項で f に表はれる変数は高々3つとなる。更に函数 f の jet について初等的計算を繰り返す事により次の結果を得る。[3]

定理　i) $s(f)=0$ とすると適当な局所座標系により $f=x_1^2+\cdots+x_n^2$ となる。

ii) $0<s(f)<1$ とすると適当な局所座標系により f は次のいずれかとなる。

$$x_1^{k+1}+x_2^2+\cdots+x_n^2 \qquad k\geq 2$$

$$x_1^{k-1}+x_1x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2 \qquad k\geq 4$$

$$x_1^4+x_2^3+x_3^2+\cdots+x_n^2$$

$$x_1^3x_2+x_2^3+x_3^2+\cdots+x_n^2$$

$$x_1^5+x_2^3+x_3^2+\cdots+x_n^2$$

iii) $s(f)=1$ とすると f は適当な局所座標系により、次のいずれかとなる。(但し λ は或る0とも1とも異る複素数)

$$x_2(x_2-x_1)(x_2-\lambda x_1)-x_1x_3^2+x_4^2+\cdots+x_n^2$$

$$x_2x_1(x_2-x_1)(x_2-\lambda x_1)-x_3^2+x_4^2+\cdots+x_n^2$$

$$x_2(x_2-x_1^2)(x_2-\lambda x_1^2)-x_3^2+x_4^2+\cdots+x_n^2$$

注意　上記定理の i) ii) の函数芽 f は Arnold による simple germ と呼ばれるものであり、iii) の函数芽 f はその boundary case と言われるものになっている。上記 f には

第4変数 x_4 以下は単に2次の項として加っているので、或る意味で本質的には高々3変数と考え、$n=3$ とすると、方程式 $f=0$ は i), ii)の時、Artin 等によって導入された有理二重点を定義し、iii)の時 単純楕円型特異点（[3]参照)と呼ばれるものを定義する。

以上の事実に基いて定理の i), ii) 及び iii)の函数芽をそれぞれ、上から順次 A_1, A_k, D_k, E_6, E_7, E_8, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, そして $\tilde{E}_8$ と名付ける事にする。

§3. 特異点の変型

$f_t(x)=f(x,t)$ を $n+1$ 変数の正則函数芽とし、$f_0(x)$ が孤立特異点を持つなら、$|t_0|\ll 1$ なる t_0 を固定すれば、$f_{t_0}(x)$ も孤立特異点を持つ。この時 f_{t_0} を f_0 の変型と呼ぶ事にし、$f_0 \to f_{t_0}$ と記す事にする。

次の Prop. は容易にたしかめられる。

Prop. $f \to g$ ならば $r(f) \leq r(g)$, $s(f) \geq s(g)$ となる。

更に§2 に出て来た特異点については精密に次の結果が成立する。[1], [2], [3]

定理 $A_k, (k\geq 1)$, D_k $(k\geq 4)$ E_6, E_7, E_8, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ 等の特異点の変型は再び、そのずれかとなり、$P \to Q$ となる必要充分条件は、P に対応する Dynkin 図型が Q に対応する それを

部分図型として含む事である。

1方次の事実も容易に確める事ができる。

Prop　fを A_kとも，D_k, E_6, E_7, E_8 のいずれとも異る超曲面孤立特異点とすると，$f \to \tilde{E}_6$, $f \to \tilde{E}_7$ 又は $f \to \tilde{E}_8$ となる。

注意．今nを奇数とする時．fのMilnor fiberのintersection formやfのsemi-universalな変型のtotalなモノドロミー群を考えてみる。するとfが，A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 等の時には．Brieskornによって[2]，intersection formは対応するLie環のCartan-form，モノドロミー群は対応するWeyle群となる事が計算されており，従ってそれぞれ．definiteなform，有限群となっている。1方 $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ についてはGabrielov等の計算により．intersection formは固有値0を持ち、モノドロミー群は無限群である。すると上記Prop．と組みあわせる事により、intersection formがdefiniteになるような、あるいは．totalモノドロミー群が有限となるようなfはA_k, D_k, E_6, E_7, そして $\tilde{E}_8$ しかない事が分る。この事は既に1973 Lamottokeによって指摘されている。ここではhypersurfaceを与えるfしか考えていないが、実は更に完全交叉な孤立特異点を与える様なfに対象をひろげても．やはり．intersection formがdefiniteになるような、あるいは．totalモノ

ドロミーが有限となる様なfは、上記の A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 の deformation のみである事が確められる。

§4.

最後に次の一見奇妙な判定法を与える。

<u>定理</u>　fは孤立特異点を持つとする。
fの任意の変型がすべて quasi-homog. となる必要充分条件は、$s(f) \leq 1$ となる事である。

もし $s(f) \leq 1$ ならば、§2, §3 の定理を組み合わせる事により、fの任意の変型は quasi-homog. である。

逆に $s(f) > 1$ としよう。　$Xf = f$ なるベクトル場 X を持ってきた時、fの hessian $h(f)$ に対し、
$X\,h(f) = s(f)\,h(f)$ であったから、

$$f_t(x) = f(x) + t\,h(f)(x)$$

なる $f(x)$ の変型を考えると、その critical set は $x = 0$, $|t| \ll 1$ となり、f_t は μ-constant family をなしている。この時 f_t が quasi-homog. とは、f_t がイデアル $\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right)$ に属する事を意味する。この条件を書き下してみると、$h(f)$ がイデアル $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ に属する事を意味するが、それは、$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ が局所環 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ のパラメーター系になっ

ているので、おこり得ない。(Hartshone : Residue and Duality 参照)
従って $s(f) \leq 7$.

参照文献

[1] Arnol'd, V.I. : Normal forms of functions near degenerate critical points, Weyle groups A_k, D_k, E_k and Lagrange singularities. Functional Anal. and its Appl. Vol 6 N°4 3-25 (1972)

[2] Brieskorn, E. : Singular elements of semi-simple algebraic groups. Actes, Congrès intern. Math. 2, 279-284 (1970)

[3] Saito, K. : Einfach-elliptische Singularitäten. Inventiones math. 23, 289-325 (1974)

[4] 柏原正樹 : b函数と超平面の特異性. (1973.夏)