数理解析研究所講究録
225 巻 1975 年 16-53

b 函数と超曲面の特異性

柏原正樹 述　三輪哲二 記

1. まえがき

$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ という多項式が

$$\Delta f(x)^{s+1} = 4(s+1)(s+\frac{n}{2}) f(x)^s \tag{1.1}$$

という性質をもつことはよく知られている。佐藤幹夫は $f(x)$ が直交群について不変なことに注目して，概均質ベクトル空間の理論を構成した。([9] [ ])

代数群 G とその有限次表現空間 V が与えられているとしよう。V の中に代数的真部分集合 S があって G が $V-S$ に均質に作用する時，(G, V) を概均質ベクトル空間という。簡単のため S は既約超曲面で $S = \{f(x) = 0\}$ としよう。この時 $f(x)$ は G の相対不変式，すなわち適当な指標 χ に依り $f(gx) = \chi(g) f(x)$，となる。さらに適当な条件のもとで相対不変微分作用素 $P(D)$ が存在して

$$P(D) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s \tag{1.2}$$

が成立する。この $b(s)$ は $f(x)^s$ のフーリエ変換，$f(x)^s$ の s についての解析接続，$f(x)$ からつくられるゼータ函数の函数等式などの考察において重要な役割を果たす。([9])

一方 Bernstein は，勝手な多項式 $f(x)$ に対して $f(x)^s$ の解析接続の可能性を次の定理により導いた。([1])

定理 1.1. (Bernstein)
$f(x)$ を多項式とすると，$P(s,x,D)=\sum_{\nu=0}^{N} s^\nu P_\nu(x,D)$ の形の微分作用素と s の多項式 $b(s)$ が存在して

$$P(s,x,D)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s \qquad (1.3)$$

が成り立つ。

なお，Björk は $f(x)$ が正則函数の時も同様の存在定理を与えた。([2])

今，正則函数（または多項式）$f(x)$ を固定する。点 x_0 に対して，x_0 の近くで定義された $P(s,x,D)$ を適当に取って (1.3) が成り立つようにできる $b(s)$ の全体は $\mathbb{C}[s]$ のイデアルを作る。その生成元を $b_{x_0}(s)$ としよう。簡単な場合を調べてみよう。

例 1.1. $f(x_0)\neq 0$ の時は，$f^{-1}\cdot f^{s+1}=1\cdot f^s$ だから $b_{x_0}(s)=1$

例 1.2. $f(x_0)=0$，$df(x_0)\neq 0$ の時
$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=1$ とすると $\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial}{\partial x_i}f^{s+1}=(s+1)f^s$
だから $b_{x_0}(s)=s+1$

例 1.3. $f(x)=x_1^2+\cdots+x_n^2$　$x_0=$ 原点の時
(1.1) より $b_{x_0}(s)=(s+1)(s+\frac{n}{2})$
厳密に言うと，(1.1) からは $(s+1)(s+\frac{n}{2})$ がイデアルにはいることしか言えないが，これでよい事はすぐにわかる。

(注意) $b_{x_0}(s)$ は $f(x)=0$ で定義される超曲面 S だけで定まり, S の定義式の取り方に依らない。$g(x)=e^{\varphi(x)}f(x)$ とすると作用素の積として

$$e^{-\varphi(x)}\cdot P(s,x,D)\cdot e^{\varphi(x)} = P(s,x,D+d\varphi(x)) \quad (1,4)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} & e^{-\varphi(x)}P(s,x,D-(s+1)d\varphi(x))\,g(x)^{s+1} \\ = {} & e^{-\varphi(x)}P(s,x,D-(s+1)d\varphi(x))\,e^{(s+1)\varphi(x)}f(x)^{s+1} \\ = {} & e^{-s\varphi(x)}P(s,x,D)\,f(x)^{s+1} \\ = {} & b(s)\,g(x)^{s} \end{aligned}$$

これから明らかである。

我々の目標は具体的に $b_{x_0}(s)$ を求める事そして $b_{x_0}(s)$ の性質を知る事であるが, Malgrange は, この b 函数と, $f(x)$ によって決まる局所的モノドロミー ([3], [7]) との間に関連があるだろうと指摘した。

我々は, 微分方程式系, 特に最大過剰決定系の一般理論 ([6], [8]) を援用して, $b_{x_0}(s)$ の性質モノドロミーとの関連を調べる。

2. 最大過剰決定系

この節では，代数解析的手法による微分方程式系の取り扱いについての一般論と，特に最大過剰決定系についての最近得られた基本的な結果について解説する。証明つきの議論は [5]，[6]，[8] を参照されたい。

X^n を複素多様体とする。正則函数を係数に持つ X 上の微分作用素の作る環の層を $\mathcal{D}$ と書く。(ここでは，有限階の作用素のみ考える。)

$\mathcal{D} \ni P(x, D)$ が高々 m 階としよう。

$$P(x, D) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) D^\alpha$$

と書けるが，m 階の部分

$$\sigma_m(P)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \qquad (x, \xi) \in T^*X$$

を P の主シンボルと言う。

<u>定義 2.1.</u> X 上の（線型）微分方程式系とは，連接左 $\mathcal{D}$ 加群のことである。

定義の説明をする。未知函数 $\underbrace{u_j}_{(j=1,\cdots,\nu)}$ に対する線型微分方程式系は次の形をしている。

$$\sum_{j=1}^{s} P_{ij}(x, D)\, u_j(x) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, \mu) \qquad (2.1)$$

これから連接左加群 $\mathcal{M}$ が

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \longleftarrow \mathcal{D}^\nu \xleftarrow{\ {}^t(P_{ij})\ } \mathcal{D}^\mu \qquad (2.2)$$

式系

によって定義される。逆に連接左加群 $\mathcal{M}$ が与えられた時，$\mathcal{M}$ は (2.2) のような表現を持ち，(2.1) の形の線型微分方程式が対応する。$\mathcal{M}$ に対して表現 (2.2) は唯一ではないから，(2.1) の形は本質的 (intrinsic) な意味を持たない。この事は次に述べる方程式系の特異台の定義を見れば納得がいくであろう。

定義 2.2. 方程式系の特異台

$\mathcal{D} \supset \mathcal{J}$ を左イデアルとする。$\mathcal{J}$ のシンボル・イデアル J とは，$\{\sigma_m(P)(x,\xi) \,/\, P(x,D) \in \mathcal{J}\}$ から生成される $\mathcal{O}_X[\xi_1, \cdots, \xi_n]$ の同次イデアルの事である。この時，方程式系 $\mathcal{D}/\mathcal{J}$ の特異台とは

$$\mathrm{S.S.}(\mathcal{D}/\mathcal{J}) = J \text{ の定義する } P^*X \text{ 内の部分多様体}$$

$$= \{(x,\xi) \in P^*X \,/\, \sigma_m(P)(x,\xi) = 0 \quad \text{for } {}^\forall P \in \mathcal{J}\}$$

のことである。一般の $\mathcal{M}$ に対しては，生成元 u_j を取り（すなわち $\mathcal{M} = \sum \mathcal{D} u_j$）$\mathcal{D}u_j = \mathcal{D}/\mathcal{J}_j$ として

$$\mathrm{S.S.}(\mathcal{M}) = \bigcup_j \mathrm{S.S.}(\mathcal{D}/\mathcal{J}_j)$$

と定義する。（生成元の取り方に依らない。）

S.S.$(\mathcal{M})$は方程式系の不変量(invariant)であるが特にその次元は重要である。これについて次の事が成り立つ。

<u>定理 2.1.</u>　$\dim S.S.(\mathcal{M}) \geqq n-1$

または　$S.S.\mathcal{M} = \phi$ で $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X{}^{l}$

定理の説明をする。$c = \dim P^*X - \dim S.S.(\mathcal{M}) \leqq n$ とする。未知函数一個の場合を考えれば，c はほぼ独立な方程式の数を表わしている。この時 (2.1) の解はおおよそ$(n-c)$個の独立変数に関する任意函数を含むであろう。(この事は定数係数の方程式系に対しては正しい。[4]，[10]を参照されたい。) 上の定理は，独立な方程式の数が n を越えると方程式系が無意味になる事を言っている。($\mathcal{O}_X{}^{l}$ については例2.1.で説明する。)

さて，最大過剰決定系とは，それ以上独立な方程式を持ち得ないような方程式系の事である。すなわち

<u>定義 2.3.</u>　最大過剰決定系

$\dim S.S.(\mathcal{M}) = n-1$　の時　$\mathcal{M}$ を最大過剰決定系という。

$\{x \in X \,/\, \mathcal{M}_x \neq 0\}$

<u>例2.1.</u> $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X = \mathcal{D}\cdot 1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}D_1 + \cdots + \mathcal{D}D_n$

この時，独立な方程式の数は n 個であるが $S.S.(\mathcal{M}) = \phi$ である事に注意して欲しい。また $supp(\mathcal{M})$（層のサポート，すなわち　）は X 全体である。

<u>例2.2.</u> $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{D}/\mathcal{D}x_1 + \cdots + \mathcal{D}x_r + \mathcal{D}D_{r+1} + \cdots + \mathcal{D}D_n$

ここで Y は X の $(n-r)$ 次元部分多様体で，局所座標で $Y = \{x_1 = \cdots = x_r = 0\}$ と書けているとする。（$\mathcal{D}$ として無限階の作用素を許せば $\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}^r_Y(\mathcal{O}_X)$ となるのだが，ここではそうしない。）適当に意味づけしてデルタ函数を考えるならば，$\mathcal{B}_{Y|X}$ の断面は

$$P(x, D)\,\delta(x_1, \cdots, x_r) = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)} a_\alpha(x_{r+1}, \cdots, x_n)\,\delta^{(\alpha)}(x_1, \cdots, x_r)$$

という形をしている。すなわち $\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{D}\,\delta(x_1, \cdots, x_r)$ である。

$n = r$ の時 $\mathcal{B}_0$ 或いは $\mathcal{B}_{pt}$ と書く。

$S.S.(\mathcal{M}) = P^*_Y X$，$supp(\mathcal{M}) = Y$ である。

最大過剰決定系について，次の基本定理が成り立つ。

定理 2.2. $\mathcal{M}$を最大過剰決定系とする：

1) Xの分割（stratification）$X = \bigcup_{\alpha} X_\alpha$ を適当に取ると

$$S.S.(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{\alpha} P^*_{X_\alpha} X$$

2) 細分を取ることによってWhitneyの条件が満たされるようにすると，

$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)\Big|_{X_\alpha}$ は局所定数層 $\cong (\mathbb{C}_{X_\alpha})^{l_\alpha}$ となる。

3) supp $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ は locally closed で余次元 $\geqq i$

4) $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$がともに最大過剰決定系ならば $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_x$ は$\mathbb{C}$上有限次元。
特に $\mathcal{E}nd_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})_x = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})_x$ が有限次元。

定理の説明をする。定理2.1.より詳しくS.S.$\mathcal{M}$は包合的（involutive）になる事が知られているが，最大過剰決定系に対しては包合的で可能な最低次元の多様体としてS.S.$\mathcal{M}$はラグランジアンになる。（[8]）

$S.S.(\mathcal{M}) = \bigcup \Lambda_j$ と既約なラグランジアンに分解すると，$Y_j = \pi(\Lambda_j)$ $(\pi : P^*X \to X)$ は既約な X の多様体で逆に
$\Lambda_j = \overline{P^*_{Y_{j\,reg}} X}$ すなわち，Y_j の非特異な部分 $Y_{j\,reg}$ における余法束の閉包となる。
1) はその事を言っている。

2) について説明するために，$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ について述べる。$\mathcal{M}$ の分解 (resolution) を

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}^{\nu_0} \xleftarrow{{}^tP_0} \mathcal{D}^{\nu_1} \longleftarrow \cdots\cdots \xleftarrow{{}^tP_{N-1}} \mathcal{D}^{\nu_N} \leftarrow 0$$

とする。この時

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{H}^j(\mathcal{O}^{\nu_0} \xrightarrow{P_0} \mathcal{O}^{\nu_1} \longrightarrow \cdots\cdots \xrightarrow{P_{N-1}} \mathcal{O}^{\nu_{N-1}})$$

である。すなわち，$Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ は，方程式系 P_0 の同次解の空間を，$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ $(j \geq 1)$ は適合条件 (compatibility condition) P_j を満たす右辺に対する非斉次方程式系 P_{j-1} の可解性の障害 (obstruction) を表わす。
2) は最大過剰決定系の解の層が，有限次元でしかも，X_λ 上ランクが一定であることを主張している。3), 4) の意味は，後の議論で明らかになるであろう。

例2.3. $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{Y|X}$

Xの分割としては $X-Y \sqcup Y$ を取ればよい。

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}_{Y|X}, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & i \neq \operatorname{codim} Y \\ \mathbb{C}_Y & i = \operatorname{codim} Y \end{cases}$$

この証明は，$\overbrace{[8]}^{\text{例えば}}$ Ch3. Th. 2.3.6 と同じようにやればよい。(x_1 を掛け算作用素，$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$，$x_1 \to 0$ を x_1 に 0 を代入する作用素として

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{x_1} \mathcal{O} \xrightarrow{x_1 \to 0} \mathcal{O} \xrightarrow{D_1} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

が完全(exact)になることに注意せよ。)

例2.3. $\mathcal{M} = \mathcal{D}(x^2-y^3)^\alpha$
$= \mathcal{D}/\mathcal{D}(P-6\alpha) + \mathcal{D}Q$

但し $P = 3x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$ $\quad Q = 3y^2\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}$

Xの分割は $X-Y \sqcup Y-\{0\} \sqcup \{0\}$

但し $Y = \{x^2-y^3=0\}$。

$X-Y$ では $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}$

$Y-\{0\}$ では $\mathcal{M} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(x'\frac{\partial}{\partial x'}-\alpha)+\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial y'}$

但し $x' = x^2-y^3$, $y' = x$ と変換した。

最後に最大過剰決定系の指数定理について述べる。

$$\chi_x(\mathcal{M}) \underset{\text{定義}}{=} \sum (-)^i \dim \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_x$$

を $\mathcal{M}$ の指数という。この指数が、Y_j のある不変量と $\mathcal{M}$ の Λ_j における重複度とから求められるというのが指数定理である。

<u>定義 2.4.</u> 位相的重複度

Y を x における既約な多様体の芽とする。Y の x における位相的重複度 $\tau_x(Y)$ を次のように帰納的に定義する。
まず Y が non-singular ならば $\tau_x(Y) = 1$
一般の Y に対して、$Y = Y_\alpha$ を正則な分割とする。
この時

$$\tau_x(Y) = \sum_{Y_\alpha \neq Y_0} \tau_x(\overline{Y_\alpha})\, \chi(U_\alpha \cap Y_0 \cap Z_\alpha)$$

によって $\tau_x(Y)$ を決める。順に記号を説明する。
Y_0 は $\overline{Y_0} = Y$ となる分割要素 (stratum)、
U_α は Y_α の点 x_α を中心とする開球、
Z_α は x_α に近い一般の位置にある余次元 $(\dim Y_\alpha + 1)$ の線型部分多様体、$\chi(U_\alpha \cap Y_0 \cap Z_\alpha)$ はオイラー特性数である。

一方、$\mathcal{M}$ の Λ_j における重複度とは次のように考えてよい。$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{J}$ の場合は

$$m_j = \dim_{(\mathcal{O}_{\Lambda_j})_x \text{の商体}} (\mathcal{O}_{P^*X}/\mathcal{J})_x \otimes_{(\mathcal{O}_{\Lambda_j})_x} (\mathcal{O}_{\Lambda_j})_x \text{の商体}$$

一般の場合は，完全列 $0 \to \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$ がある時 $m'_j + m''_j = m_j$ として順次決められる。

<u>定理 2.3.</u> 指数定理

$$\chi_X(\mathfrak{M}) = \sum_j (-)^{\operatorname{codim} Y_j} \tau_X(Y_j)\, m_j + m_0$$

但し $X - \bigcup_j Y_j$ で局所的に $\mathfrak{M} \cong \mathcal{O}_X^{m_0}$ とする。

3. 基本予想

この節では，b函数理論に対する最大過剰決定系の役割を説明し，基本予想を述べる。基本予想は全理論の基礎となる重要なものであるが証明はまだ出来ていない。

$f(x)$を原点における正則函数の芽とする。原点における$f(x)$のb函数をもとめるのに，定義に従って(1.3)を満たす$P(s,x,D)$を見つける事は一般に難しい。しかし，次に述べる方法は，αが$b(s)=0$の根になるための十分条件を与える。(擬斉次多項式で原点が孤立特異点であるような$f(x)$に対しては，この方法で$b(s)$が具体的に求まる。~~付録~~ [12])

$\mathscr{D}[s]$をX上の微分作用素を係数とするsについての多項式の作る環の層とする。$\mathscr{D}[s]$の元は

$$P(s,x,D)=\sum_{j=0}^{N} s^j P_j(x,D)$$

の形をしているが，簡単にこれを$P(s)$とも書くことにする。$\mathscr{D}[s]$の左イデアル$\mathscr{J}[s]$を

$$\mathscr{J}[s]=\{P(s)\in\mathscr{D}[s]\ /\ P(s)f^s=0\}$$

で定義する。この時$b(\alpha)=0$となる為の十分条件は次の通り。

$\Delta(x)$を適当な$\mathscr{D}[s]$加群の零でない元とする。すなわち　$\Delta(x)\neq 0$　。

更に　$f\,\Delta(x)=0$　　および
任意の $P(s)\in\mathcal{J}[s]$ に対して　$P(\alpha)\,\Delta(x)=0$
が成り立っているとする。この時　$b(\alpha)=0$ である。
(証明)
まず定理1.1より $P(s)\in\mathcal{D}[s]$ があって
$$\{P(s)f-b(s)\}f^s=0$$
$$\therefore\ P(s)f-b(s)\in\mathcal{J}[s]$$
よって $s=\alpha$ として $\{P(\alpha)f-b(\alpha)\}\,\Delta(x)=0$
$$\therefore\ -b(\alpha)\,\Delta(x)=0$$
$$\therefore\ b(\alpha)=0$$
(証明終)

$b(s)$ について更に深い考察をするためには、次に述べる基本予想が必要である。まずその前に準備として次の事に注意しよう。

命題 3.1.
$P(s)\in\mathcal{D}[s]$ を　s を1階と勘定して m 階の作用素とする。すなわち
$$P(s)=\sum_{|\alpha|+j\leq m} s^j a_{\alpha,j}(x)D^\alpha$$
P の主シンボルを
$$P_m(s,x,\xi)=\sum_{|\alpha|+j=m} s^j a_{\alpha,j}(x)\xi^\alpha$$
と定義する。もし $P(s)\in\mathcal{J}[s]$ ならば
$$P_m(f,x,df)=0$$

(証明)

$P(s)f^s$を計算してsについて降べきに整理すると

$$P(s)f^s = s^m P_m(f, x, df) f^{s-m} + \cdots$$

$$\therefore\ P_m(f, x, df) = 0$$

(証明終)

我々の基本予想とは、この命題の逆が成り立つ事を主張するものである。以下$f(x)$は重複因子を持たない事を仮定する。

基本予想†

$$p(s, x, \xi) = \sum_{|\alpha|+j=m} s^j a_{\alpha j}(x) \xi^\alpha$$ が

$p(f, x, df) = 0$を満たせば、$p(s, x, \xi)$を主シンボルとする$\mathcal{J}[s]$の元が存在する。

この基本予想を証明するには、sがはいっていない形を証明すれば十分である。すなわち次の形の予想が証明できれば基本予想は従う。

予想 3.2.

$$\mathcal{J} = \{P(x, D) \in \mathcal{D} \,/\, P(x, D) f^s = 0\}$$ とする。

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$ が $p(x, df) = 0$

を満たせば$\mathcal{J}$の元で主シンボルが$p(x, \xi)$であるものが存在する。

† この形では成立しない。p.37をみよ。

（予想3.2. $\Longrightarrow$ 基本予想 の証明）

$$p(s,x,\xi)=\sum_{|\alpha|+j=m} s^j a_{\alpha,j}(x)\xi^\alpha$$ を

$p(f,x,df)=0$ なるものとする。t を新しい変数として $t=1$ の近くで考えることにする。また t に対応する cotangent 座標を τ と書く

$$q(t,x,\tau,\xi)=p(t\tau,x,\xi)$$ とおく。

$g(t,x)=tf(x)$ とすると

$$q(t,x,d_{t,x}g)=q(t,x,f,tdf)$$
$$=p(tf,x,tdf)=t^m p(f,x,df)=0$$

よって予想3.2. を $g(t,x)$ に適用して

$$☆\quad Q(t,x,D_t,D_x)(tf)^s=0$$
$$Q_m(t,x,\tau,\xi)=p(t\tau,x,\xi)$$

なる Q が存在する。Q は

$$p(tD_t,x,D_x)+R_{m-1}(t,x,D_t,D_x)$$

の形をしている。ここで R_{m-1} は高々 $m-1$ 階。

$tD_t(tf)^s=s(tf)^s$ に注意して☆で $t=1$ とするなら,

$$\left\{p(s,x,D_x)+\tilde{R}_{m-1}(s,x,D_x)\right\}f^s=0$$

を得る。ここで $\tilde{R}_{m-1}$ は $R_{m-1}(t,x,D_t,D_x)(tf)^s$ において D_t の作用をやってから $t=1$ と代入した結果を f^s に対する作用として書き直したもので，s と D_x につき高々 $m-1$ 階である。

（証明終）

今後，我々は基本予想を仮定して話を進める。実は，以下の議論では，基本予想，より少し弱い形の予想，すなわち「十分大きな m に対して基本予想が成り立つ事」さえ仮定すればよいのであるが，略す。*

命題 3.3.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$ と書く。この時 $f(x)$ は イデアル

$\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ 上 整 である。すなわち

整数 m が存在して

$$f(x)^m \in \mathfrak{a}^m + \mathfrak{a}^{m-1} f(x) + \cdots + \mathfrak{a} f(x)^{m-1}$$

（証明） App. 4 of [1] を参照。

系 3.4.**

$$P(s, x, D) = s^m + A_1(x, D) s^{m-1} + \cdots + A_m(x, D)$$

の形の微分作用素が存在して

$$P(s, x, D) f^s = 0$$

ここで A_j は高々 j 階の作用素

（証明） 命題 3.3 と基本予想から明らか。

以上の準備のもとに，$b(s)$ を方程式系の言葉で捉え直す事ができる。

* この形でも成立しない。 cf. p.37～

** 基本予想不成立より，Cor. とはならない

二つの$\mathcal{D}$左加群$\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$を次のように定義する。

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1} = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]+\mathcal{D}[s]f$$

WをP^*X内の集合$\{(x, df(x)) \in P^*X \,/\, df(x) \neq 0\}$のザリスキ閉包とし

$W_0 = \{(x, \xi) \in W \,/\, f(x) = 0\}$ とする。

<u>定理3.5.</u>

$\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$は$\mathcal{D}$連接左加群で

$S.S.(\mathcal{N}) = W$, $S.S.(\mathcal{M}) = W_0$。

よって特に$\mathcal{M}$は最大過剰決定系である。

証明は後にして、理論を進めよう。定理3.5と定理2.2.の4)から$End_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$は有限次元である。(正確には原点における茎が有限次元ということだが、いちいち言わない。)

$s \in End_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$であるが、$s$の多項式$b'(s)$が、適当な微分作用素$P'(s, x, D)$によって

$$b'(s)f(x)^s = P'(s, x, D)f^{s+1}$$

と書けるという事は、$b'(s) = 0$ in $End_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$という事に他ならない。すなわち次の定理は明らかである。同時に定理1.1.の別証明ができた。

<u>定理3.6.</u>

$b(s)$は$End_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$の元$s$の最小多項式である。

$\mathfrak{M}$自身は$\mathbb{C}$上有限次元ではないので，$b(s)$を具体的に求める為にはこれだけでは不十分である。そこで，我々は，$\mathbb{C}$上有限次元の空間を作り，そこにsを作用させる事によって$b(s)$を決める。

$\mathcal{L}$を最大過剰決定系とすると$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M},\mathcal{L})$は$\mathbb{C}$上有限次元であり，$s$はこれに一次変換として働く。この一次変換の最小多項式で$b(s)$が割り切れることは明らかであろう。この節の始めに述べた条件

$$f\,\Delta(x)=0\ ,\quad P(\alpha)\Delta(x)=0 \quad {}^{\forall}P(s)\in\mathcal{J}[s]$$

は

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathcal{D}\Delta(x) \\ \Psi & & \Psi \\ P(s)f^s & \longmapsto & P(\alpha)\Delta(x) \end{array}$$

が$\mathcal{D}$ linear な写像になるという事であり，こうして決まる$\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M},\mathcal{D}\Delta(x))$の元を$\Delta(x)$と書けば$\Delta(x)$は$s \curvearrowright \mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M},\mathcal{D}\Delta(x))$の固有値$\alpha$に対する固有函数になっている。従って$b(\alpha)=0$なのであった。

定理3.5.の証明をしよう。予想3.2.から基本予想を導いたように，tという新しい変数を導入して$n+1$変数で考える事によって，sを含まない形に帰着させる。その為になおいくつか，方程式論の簡単な補題が必要である。一見，大道具を持ち出すようではあるが，ごく自然な概念なのである。

X, Y を複素多様体, $\varphi: Y \longrightarrow X$ を正則写像とすると, $Y \times X$ 上に "X から Y への微分作用素の層" $\mathcal{D}_{Y\to X}$ が定義される。$\mathcal{D}_{Y\to X}$ の断面 P は局所座標を使って書けば

$$P(y, D_x) = \sum a_\alpha(y) D_x^\alpha$$

の形をしている。これは $\mathcal{O}_X$ から $\mathcal{O}_Y$ への作用素となる。すなわち

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y \\ \Psi & & \Psi \\ h(x) & \longmapsto & \sum_\alpha a_\alpha(y) \left\{ D_x^\alpha h(x) \Big|_{x=\varphi(y)} \right\} \end{array}$$

である。

$\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{L}$ に対して $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\varphi^*\mathcal{L}$ を

$$\varphi^*\mathcal{L} = \mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\varphi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \varphi^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y \underset{\varphi^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \varphi^{-1}\mathcal{L}$$

で定義する。この意味を説明する。$\mathcal{L}$ の生成元 u_j を取って (2.1) の形に $\mathcal{L}$ を表現すると $\mathcal{L}$ は函数 u_j の満たすべき関係を表わしているといってよい。$\varphi^*\mathcal{L}$ は $\mathcal{D}_Y$ 加群であるが $\mathcal{D}_Y$ 加群として u_j だけでなく $D_x^\alpha u_j$ に依り生成されている。そして $D_x^\alpha u_j$ の間の関係を表わす方程式系であると言える。

注意すべき事は, $\mathcal{L}$ が $\mathcal{D}_X$ 連接加群であっても $\varphi^*\mathcal{L}$ は $\mathcal{D}_Y$ 連接とは限らない, と

いうことだが，次に述べる特別な場合にはこの事は成り立つ。

我々が必要なのは，Y が X の部分多様体で φ が埋め込みの時であるから，その時に話を限る。

$\mathcal{L}$ が Y に関して非特性的とは

$$S.S.(\mathcal{L}) \cap P_Y^*X = \phi$$

の時である。$\mathcal{L}$ が単独の方程式で Y が超曲面の時，偏微分方程式論における普通の意味の非特性的という事と一致する。

<u>補題 3.7.</u>

Y が X の部分多様体

$$\rho : P^*X \underset{X}{\times} Y - P_Y^*X \longrightarrow P^*Y$$

を標準射影とする。

$\mathcal{L}$ は $\mathcal{D}_X$ 連接加群で，Y に関して非特性的であるとする。この時，

i) $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y ; \mathcal{L}) = \mathcal{T}or_i^{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\hookrightarrow X} ; \mathcal{L})$

は $\mathcal{D}_Y$ 連接加群であり

ii) $S.S.\left(\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y ; \mathcal{L})\right) \subset \rho\left(S.S.(\mathcal{L}) \underset{X}{\times} Y\right)$

が成り立つ。

証明は[8] P64 にある。$\mathcal{D}_{Y \to X} \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{D}_X} \varphi^{-1}\mathcal{L}$ を$\mathcal{L}|_Y$とも書く。
定理3.5.の証明はいくつかの段階に分けて行なう。

命題3.8.
$\mathcal{L} = \mathcal{D}/\mathcal{J}$ とする。$\mathcal{J}$は予想3.2.に出てきた。この時，$\mathcal{L}$は$\mathcal{D}$連接加群で
$S.S.(\mathcal{L}) = W$

(証明)
まず$\mathcal{J}$が$\mathcal{D}$連接である事を言う。ここでは基本予想は必要ではない。

$$\mathcal{J}_m = \{P(x,D) \in \mathcal{J} \,/\, P\text{は高々}m\text{階}\}$$

とする時 $\mathcal{J}_m (\subset \mathcal{O}_X^N)$が $\mathcal{O}_X$ 連接である事を言えばよい。([6] 命題1.1.4.)
$P(x,D) = P_m(x,D) + P_{m-1}(x,D) + \cdots$ とすると
$P(x,D) f^s$を実際計算し，sの巾の係数を0とおけば，$P(x,D)$の係数に対する有限個の関係式が出るから，$\mathcal{J}_m$は連接である。
この関係式の具体形を，参考の為書いておこう。
(証明は，作用素の積の公式から出る。詳しくは[8] Theorem 1.5.4. 但しそこではf^sの代わりに$\delta(f(x))$を考えているが，関係式は代数的に決まるもので任意函数$\psi(t)$に対して$\psi(f(x))$を考えても同じである。)

$$\sum_{\substack{j=k-|\alpha|+\nu \\ |\alpha|\geq 2\nu}} \frac{1}{\alpha!\nu!} P_k^{(\alpha)}(x, df(x)) \times$$
$$\times \left\{ D_x^\alpha (f(x)-f(z)-\langle x-z, df(z)\rangle)^\nu \Big|_{z=x} \right\} = 0$$
$$j = m, \cdots, 0$$

但し $P_k^{(\alpha)}$ は $\frac{\partial P_k}{\partial \xi^\alpha}$ を表わす。

始めの二項は次のようになる。

$$P_m(x, df(x)) = 0$$

$$P_{m-1}(x, df(x)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x) P_m^{ij}(x, df(x)) = 0$$

ちなみに予想3.2.は第一の方程式を満たすように P_m が与えられた時，第二，第三，… を満たすように P_{m-1}, P_{m-2}, … が決められるかという問題で $m=2$ の時ですらわかっていない。

予想3.2.を認めるならば $S.S.(\mathcal{L}) = W$ は定義から明らかである。　（証明終）

命題3.9.

$\mathbb{C}\times X = \{(t, x)\}$ とする。

$\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}\times X}(tf(x))^s$ とおくと，$\mathcal{L}$ は $t=1$ に関して非特性的で

$\mathcal{L}\big|_{t=0} = \mathcal{D}_X[s]f(x)^s$ は $\mathcal{D}_X$ 連接加群で

$S.S.(\mathcal{L}\big|_{t=0}) = W$

（証明）

$\mathcal{L}$が$t=1$に関して非特性的な事は系3.4.から従う。$P(s,x,D_x)$をそこに与えられた形のものとして $P(t\frac{\partial}{\partial t},x,D_x)(tf(x))^s=0$ となるからである。$\mathcal{L}|_{t=0}=\mathcal{D}[s]f(x)^s$は明らかであろう。残りの主張は補題3.7と命題3.8から従う。

（証明終）

（定理3.5の証明）

$\mathcal{N}$についての主張は命題3.7.

$\mathcal{M}=\mathcal{N}_s/\mathcal{N}_{s+1}$ 故 $\mathcal{M}$は連接

また明らかに $S.S.(\mathcal{M})\subseteq W_0$ （証明終）

4. b-函数の分解

$b_j(s)$ を $\mathcal{T}or_j^{\mathcal{D}}(\Omega^n, \mathcal{M})$ における s の最小多項式とすると, $b_0(s)b_1(s)\cdots b_{n-1}(s)$ は $b(s)$ で割り切れる事を示す。両者は一致する事が予想される。

準備として, 最大過剰決定系に関する更にいくつかの性質を述べよう。([8])

いままで $\mathcal{D}$ 左加群ばかりを扱ってきたが, $\mathcal{D}$ 右加群も必要になるので両者の対応を説明しよう。

Ω^n を n form の層とする。これは局所的には $\mathcal{O}$ と同型であり, その断面は局所座標を使って $f(x)\,dx$ と書ける。別の局所座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ を使うと, 同じ断面は $f(x(y)) \det \frac{\partial x}{\partial y}\, dy$ となる。すなわち Ω^n は制限写像が

$$f(x) \longmapsto f(x(y)) \det \frac{\partial x}{\partial y}$$

で与えられるような可逆層 (invertible sheaf) である。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(U) & \times & \Omega^n(U) & \longrightarrow & \Omega^n(U) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ (P(x,D), & & f(x)\,dx) & \longmapsto & \{P^*(x,D)f(x)\}\,dx \end{array}$$

は制限写像と可換で, 従って層準同型を与える。これによって Ω^n は $\mathcal{D}$ 右加群となる。

(証明) 作用素の積として

(4.1) $\det \frac{\partial x}{\partial y} \circ P^*(x, D) = P^*(y, D) \circ \det \frac{\partial x}{\partial y}$

が成り立つ。(但し $P^*(x, D)$ というのは，形式的随伴作用素で局所座標に依存して決まる。$P(x, D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$ ならば，$P^*(x, D) = \sum (-D)^\alpha \circ a_\alpha(x)$ である。)

これから明らかに

$$\{P^*(x, D) f(x)\} dx = P^*(y, D) \{f(x(y)) \det \tfrac{\partial x}{\partial y}\} dy$$

(証明終)

今 $\mathcal{M}$ が $\mathcal{D}$ 左加群とすると $\Omega^n \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{M}$ は

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^n(U) \underset{\mathcal{O}(U)}{\otimes} \mathcal{M}(U) & \times & \mathcal{D}(U) & \longrightarrow & \Omega^n(U) \underset{\mathcal{O}(U)}{\otimes} \mathcal{M}(U) \\ \Psi & & \Psi & & \\ (f(x) dx \otimes m, & & P(x, D)) & \mapsto & dx \otimes P^*(x, D)\{f(x) m\} \end{array}$$

によって $\mathcal{D}$ 右加群になる。この事は (4.1) を使って容易に確められる。

一方 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\Omega^n, \mathcal{O}) = \Omega^{n \otimes -1}$ は $(\det \frac{\partial x}{\partial y})^{-1}$ で変換される可逆層であり上と同様にして，$\mathcal{D}$ 右加群 $\mathcal{M}$ に対し $\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^{n \otimes -1}$ は $\mathcal{D}$ 左加群となる。

$\mathcal{M}$を$\mathcal{D}$左加群とすると，$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D})$は明らかに$\mathcal{D}$右加群となるが，特に$\mathcal{M}$が最大過剰決定系の時

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D}) = 0 \quad i \neq n$$

である。([8])よって$\mathcal{M}$の双対($\mathcal{D}$左)加群$\mathcal{M}^*$を

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D}) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^{n\otimes -1}$$

で定義する。

$*$は完全的(exact)な函手(functor)で$(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$である。

例2.2.では$Y = \{x_1 = \cdots = x_r = 0\}$の時

$$\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{D}/\mathcal{D}x_1 + \cdots + \mathcal{D}x_r + \mathcal{D}D_{r+1} + \cdots + \mathcal{D}D_n$$

と定義したが，双対性(duality)を考えるのに必要なので以下では

$$\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}^d_Y(\mathcal{O}_X) \qquad d = \operatorname{codim} Y$$

とする。また例2.2.の加群は$\mathcal{B}^f_{Y|X}$と書く。$\mathcal{B}_{Y|X}$は$\mathcal{D}$連接加群ではないが次の事が成り立つ。

命題4.1.

$\mathcal{M}$を最大過剰決定系，$X = \cup X_\alpha$を定理2.2の条件を満たす分割とするYを分割要素の合併であるようなXの部分多様体とすると

$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X})$ は，各分割要素上有限次元の局所定数層となる。また $\operatorname{supp} \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X})$ は locally closed で余次元 $\geqq i - \operatorname{codim} Y$

双対性について説明する。

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X^{r_{N+1}} \xrightarrow{P_N(x,D)} \cdots \xrightarrow{P_1(x,D)} \mathcal{D}_X^{r_1} \xrightarrow{P_0(x,D)} \mathcal{D}_X^{r_0} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

を $\mathcal{M}$ の自由分解（free resolution）とする。(C J)

ここで $\mathcal{D}_X^{r_i}$ は横ベクトル P_i は $r_{i+1} \times r_i$ 型の行列である。

$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{pt})$ は

$$(4.2) \quad \mathcal{B}_{pt}^{r_{N+1}} \xleftarrow{P_N(x,D)} \cdots \xleftarrow{P_1(x,D)} \mathcal{B}_{pt}^{r_1} \xleftarrow{P_0(x,D)} \mathcal{B}_{pt}^{r_0}$$

の右から i 番目のコホモロジーである。ここでは $\mathcal{B}_{pt}^{r_i}$ は縦ベクトル。

$\mathcal{T}or_i^{\mathcal{D}}(\Omega^n, \mathcal{M})_{x_0}$ は

$$(4.3) \quad \Omega_{x_0}^{n\,r_{N+1}} \xrightarrow{P_N^*(x,D)} \cdots \xrightarrow{P_1^*(x,D)} \Omega_{x_0}^{n\,r_1} \xrightarrow{P_0^*(x,D)} \Omega_{x_0}^{n\,r_0}$$

の右から i 番目のホモロジーである。ここでは $\Omega_{x_0}^{n\,r_i}$ は横ベクトルで，$P_i^*(x, D)$ は $P_i(x, D)$ の各成分を adjoint にした $r_{i+1} \times r_i$ 型の行列である。(4.2) は (FS) 空間の列，(4.3) は (DFS) 空間の列で互いに双対であり (4.2) のコホモロジーが有限であるから

$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{pt})$ と $\mathcal{T}or^{\mathcal{D}}_i(\Omega^n, \mathcal{M})_{x_0}$ とは双対空間になる。
さらに一般に次の事が成り立つ。

命題 4.2.
$\mathcal{M}$, $X = \bigcup X_\alpha$ は命題 4.1. と同じとする。X_α を次元 d の分割要素とし $x_\alpha \in X_\alpha$ とする。この時

$$\mathcal{T}or^{\mathcal{D}}_i(\Omega^n, \mathcal{M})_{x_\alpha} \text{ と } \mathcal{E}xt^{i-d}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{X_\alpha|X})_{x_0}$$

とは互いに双対空間である。

最後に $\mathcal{T}or^{\mathcal{D}}_i(\Omega^n, \mathcal{M}) = \mathcal{E}xt^{n-i}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}^*, \mathcal{O})$

従って $S_i = \mathrm{supp}\, \mathcal{T}or^{\mathcal{D}}_i(\Omega^n, \mathcal{M})$ とすると $\dim S_i$ は高々 i 次元で，その中に S_i' があって $\dim(S_i - S_i') < i$ かつ $\mathcal{T}or^{\mathcal{D}}_i(\Omega^n, \mathcal{M})\big|_{S_i'}$ は局所定数層となる事に注意して，主定理を述べよう。

定理 4.3.
$b_i(s)$ を s を $\mathcal{T}or^{\mathcal{D}}_i(\Omega^n, \mathcal{M})\big|_{S_i'}$ に働かせた時の最小多項式とすると

$$b_0(s)\, b_1(s) \cdots b_{n-1}(s)\, \mathcal{M} = 0$$

(注意) $\mathcal{T}or_n^{\mathcal{D}}(\Omega^n, \mathcal{M}) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^n(\mathcal{M}^*, \mathcal{O})$ は，$\mathcal{M}$ の従って $\mathcal{M}^*$ の support が nowhere dense なので 0。よって $b_n(s) = 1$ である。なお S_i' の連結成分の数が 2 以上の時は，$b_i(s)$ としては，各成分での最小多項式の最小公倍数を取る。

もうひとつ重要な補題が必要である。

補題 4.4.

$\mathcal{M}$ を最大過剰決定系とし
$\mathrm{supp}\,\mathcal{M} \subset Y$, $S.S.(\mathcal{M}) \subset P_Y^*X$
とする。ここで Y は非特異な部分多様体である。この時 Y 上で局所的に

$$\mathcal{M} \cong (\mathcal{B}_{Y|X}^f)^N$$

となる。

(定理 4.3. の証明)

$\mathcal{M}_i = b_i(s) \cdots b_n(s)\mathcal{M}$ とおいた時 $i = n$ から始めて $\dim \mathrm{supp}\,\mathcal{M}_i < i$ が成り立つ事を $i = 0$ まで言えればよい。$\mathrm{supp}\,\mathcal{M} \subset \{f(x) = 0\}$ 故 $i = n$ はよい。$\dim \mathrm{supp}\,\mathcal{M}_{i+1} = i$ としよう。$\mathrm{supp}\,\mathcal{M}_{i+1}$ のひとつの i 次元の既約成分を Y としよう。

この時 非特異な Y' が Y の中にあって
$\dim(Y-Y') < i$ かつ
$S.S.(\mathcal{M}) \cap P^*X \underset{X}{\times} Y' \subset P^*_{Y'}X$
となる。
よって Y' では $\mathcal{M}_{j+1} \cong (\mathcal{B}^f_{Y'|X})^N$

命題 4.2. から $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{D}}(\Omega^n, \mathcal{M})_{y'}$ と

$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y'|X})_{y'}$ とは互に双対。

よって $b_i(s)\mathcal{T}or_i^{\mathcal{D}}(\Omega^n, \mathcal{M})_{y'} = 0$ だから

$b_i(s)\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y'|X})_{y'} = 0$ である。

従って $b_i(s)\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_{j+1})_{y'} = 0$

よって可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[d, "b_i(s)"'] \arrow[dr, "0"] & \\ \mathcal{M} \arrow[r, "b_i(s)\cdots b_{n-1}(s)"'] & \mathcal{M}_{i+1} \end{tikzcd}$$

が成り立つ。すなわち $\mathcal{M}_{i\,y'} = 0$
(証明終)

5. 局所モノドロミーとの関係

我々の理論と局所モノドロミーの理論（[3]，[7]）との関連について要点のみ述べる。

$f(x)$ は今後 $f(0)=0$ と仮定する。f は，$\mathbb{C}^n$ の原点の近傍から $\mathbb{C}$ の原点の近傍への写像を与える。

まず $\mathcal{N}=\mathcal{D}[s]f^s$ に $f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 加群の構造を入れる。そのために $\mathcal{N}$ の表わし方を変えておくと都合がよい。

$\psi(t)$ を1変数の任意函数，$\vartheta = t\dfrac{d}{dt}$ とする。

$\mathcal{D}[\vartheta]=\{P(\vartheta,x,D) \,/\, P(s,x,D)\in\mathcal{D}[s]\}$ とすると $\mathcal{D}[\vartheta]\psi(f)$ は $\mathcal{D}$ 左加群になる。ここで $P(\vartheta,x,D)=\sum_{j=0}^{m}P_j(x,D)\vartheta^j$ の時

$$P(\vartheta,x,D)\psi(f)=\sum P_j(x,D)\{(\vartheta^j\psi)(f)\}$$

であると理解し，右辺を普通の合成函数の微分公式で形式的に計算し，$\left(\dfrac{\partial^k\psi}{\partial t^k}\right)(f)$ の係数がすべて消える時 $P(\vartheta,x,D)\psi(f)=0$ と考えるのである。

明らかに $\mathcal{D}[s]f^s=\mathcal{D}[\vartheta]\psi(f)$ である。

$\varphi(t)\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ とすると次のような $\mathcal{N}$ の $\mathcal{D}$ 準同型がある。

今 $\mathcal{N}$ の元を $P(\vartheta)\psi(f)$ としよう。$\vartheta^j(\varphi(t)\psi(t))$ を形式的に計算して $t=f$ と代入すると $\mathcal{N}$ の元が得られる。これを

$\mathcal{D}$ linear に拡張して $P(\vartheta)\psi(f)$ の行き先を決める事ができる。すなわち

$$\varphi(t):\ \mathcal{D}[\vartheta]\psi(f) \longrightarrow \mathcal{D}[\vartheta]\psi(f).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}[\vartheta]\psi(f) & \longrightarrow & \mathcal{D}[\vartheta]\psi(f) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \sum P_j(x,D)(\vartheta^j\psi)(f) & \longmapsto & \sum P_j(x,D)\big(\vartheta^j(\varphi\psi)\big)(f) \end{array}$$

である。$\mathcal{N}=\mathcal{D}[s]f^s$ という記法では

$$t:\ P(s)f^s \longmapsto P(s+1)f^{s+1}$$

である。$\varphi(t):\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}$ は $\mathcal{D}[s]$ linear にはならない。実際 s と $\varphi(t)$ の交換関係は次の通りである。

命題 5.1.

$$[s,\varphi(t)] = -t\varphi'(t)$$

（証明）

$\mathcal{N}=\mathcal{D}[\vartheta]\psi(f)$ という記法では s は ϑ に一致する。

$$\vartheta\circ\varphi(t)\big(\vartheta^j\psi(f)\big) = \vartheta\left\{\vartheta^j(\varphi\psi)(f)\right\}$$

$$= \vartheta\left\{\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\vartheta^\nu\varphi\,\vartheta^{j-\nu}\psi\Big|_{t=f}\right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\vartheta^\nu\varphi\,\vartheta^{j+1-\nu}\psi\Big|_{t=f}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{j+1}\frac{j+1-\nu}{j+1}\binom{j+1}{\nu}\vartheta^\nu\varphi\,\vartheta^{j+1-\nu}\psi\Big|_{t=f}$$

$$= \vartheta^{j+1}(\varphi\psi)\Big|_{t=f} - \sum_{\nu=0}^{j+1}\frac{\nu}{j+1}\binom{j+1}{\nu}\vartheta^{\nu-1}(\vartheta\varphi)\,\vartheta^{j+1-\nu}\psi\Big|_{t=f}$$

$$= \varphi(t)\circ\vartheta\big(\vartheta^j\psi(f)\big) - (\vartheta\varphi)(t)\big(\vartheta^j\psi(f)\big)$$

（証明終）

定理5.2. $0<\varepsilon\ll\delta\ll 1$ に対して

$$\mathbb{C}^n\supset U=\{x\in\mathbb{C}^n \,/\, |x|<\delta,\ |f(x)|<\varepsilon\}$$
$$D=\{t\in\mathbb{C} \,/\, |t|<\varepsilon\}$$

とおく。$f: U\longrightarrow D$ である。

1) $R^k f_*(\Omega^n \overset{L}{\underset{\mathcal{D}}{\otimes}} \mathcal{N}|_U)$ は $\mathcal{O}_D$ 連接加群。

2) $R^k f_*(\Omega^n \overset{L}{\underset{\mathcal{D}}{\otimes}} \mathcal{N}|_U)\Big|_{D-\{0\}} = R^{k-n+1} f_*(\mathbb{C})\otimes\mathcal{O}_{D-\{0\}}$

であって，この層に働かせた時の S の核は $R^{k-n+1}f_*(\mathbb{C})$ である。

3) $R^k f_*(\Omega^n \overset{L}{\underset{\mathcal{D}}{\otimes}} \mathcal{N}|_U)_0 = \mathcal{T}or_k^{\mathcal{D}}(\Omega^n,\mathcal{N})_0$

証明は略す。$\mathcal{T}or_k^{\mathcal{D}}(\Omega^n,\mathcal{N})_0 \circlearrowleft t$ は単射であり $R^k f_*(\Omega^n \overset{L}{\underset{\mathcal{D}}{\otimes}} \mathcal{N})$ は $\mathcal{O}_D$ 加群として自由であると予想されるが，今はその free part を考える事にして

$$R^{n-1-k} f_*(\Omega^n \overset{L}{\underset{\mathcal{D}}{\otimes}} \mathcal{N})_{0\,free} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mu_k} \text{ である。}$$

ここで $\mu_k=\dim H^k(f^{-1}(\varepsilon)\cap U;\ \mathbb{C})$。
$\mathcal{N}$ に入れた $f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の作用は，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mu_k}$ では $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の普通の作用と一致する。2) から

$$0\longrightarrow R^k f_*(\mathbb{C})\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mu_k}\xrightarrow{\ S\ }\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mu_k}$$

が $t=0$ で完全だが，$[S,\varphi(t)]=-t\varphi(t)$ より $S=-t\dfrac{d}{dt}+A(t)$　$A(t)$ は $\mu_k\times\mu_k$ 行列

の形である事がわかる。従って局所モノドロミーの固有多項式は $\exp 2\pi i A(0)$ の固有多項式となる。

一方

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{t} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

であるから

$$\to \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0 \xrightarrow{t} \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0 \to \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0$$

$$\to \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-2-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0 \xrightarrow{t} \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-2-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0 \to$$

より

$$0 \to \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0 / t\, \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0$$

$$\to \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{M})_0 \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Tor}_{n-2-k}(\Omega^n, \mathcal{N})_0 \overset{t}{\to} \overset{0}{\to})$$

従って我々の理論と局所モノドロミーは次の対応を持つ。

<u>定理5.3.</u>

1) $\mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{M})_0$ の中に S 不変な部分空間で $\mathbb{C}^{\mu_k} = H^k(f^{-1}(\varepsilon) \cap U; \mathbb{C})$ に同型なものが存在し，

$$S|_{\mathbb{C}^{\mu_k}} = A(0)$$

従って局所モノドロミーの固有多項式は $\exp(2\pi i S|_{\mathbb{C}^{\mu_k}})$ の固有多項式である。

更に t が単射である事が言えれば

$$\mathcal{T}or^{\mathcal{D}}_{n-1-k}(\Omega^n, \mathcal{M}) = H^k(f^{-1}(\varepsilon) \cap U; \mathbb{C})$$

となる。そして固有多項式が対応するだけでなく $\exp(2\pi i S|_{C^k})$ が実際に局所モノドロミーを与える事が予想される。

† (p.15)　この形の予想は，現在命題 $S_{\mathcal{D}}$ と呼ぶが，
反例がある．　$f=\frac{1}{n}(x_1^n+\cdots+x_N^n)-\frac{1}{m}(x_1\cdots x_N)^m$　$N\geq 3$
$n\geq(2N-1)m-2$ のとき，　$\exists p(s,x,\xi)=x_1^{2m-2}(x_2\cdots x_N)^{Nm-2}s^2+\cdots$
$p(f,x,df)=0$ しかし，p を主シンボルとする $\mathcal{J}(s)$ の元はない．
そこで，次のように変更する．（これについては反例はまだない）

基本予想 S

$p(s,x,\xi)$ (s,ξ) について form が $p(f,x,df)=0$ をみたすとき，
W_0 の proper analytic subset を除いた残りの $\forall(x,\xi)$ の
nbd で，$\exists P(s)\in\mathcal{P}\otimes\mathcal{J}[s]$ s.t. $\sigma(P(s))=p$.

ここで $\mathcal{P}$ は pseudo-diff op. の sheaf. 詳しくは S-K-K を参照すべきであるが，$P^*X\ni(x_0,\xi_0)$ において $p(x_0,\xi_0)\neq 0$ のとき，$p(x,D)^{-1}$ というものが存在するように，$\mathcal{D}$ を拡大したものである．S.S. は一般に $\mathcal{P}$-module に対し def. される
以下で基本予想を用いるところは，すべて上の S を用いるように変更する。S は，W_0 の generic pt. で予想が成立することを主張するから，おおくなさしさかりはない．

* (p.17)　命題 $S_{\mathcal{D}}$ の反例が，又この命題 $SK_{\mathcal{D}}$ の反例ともなる

** (p.17)　この命題 i.e. $\exists s^m+A_1s^{m-1}+\cdots+A_m\in\mathcal{J}[s]$ は，
予想 K といわれる．現在のところ，"simplex type" という函数では，一般に成立する．isolated でも，一般には不明．

1. Bernstein, The analytic continuation of generalized functions w.r.t. a parameter, F.A.A., 1972. 26–40.
2. Björk: Dimensions over Algebras of Differential Operators, preprint.
3. Brieskorn: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta Math. Vol. 2 103–160 (1970)
4. Ehrenpreis: Fourier Analysis on Several Complex Variables.
5. Kawai-Kashiwara: Pseudo-differential Operators in hyperfunction theory. Proc. Japan Acad. 46, 1130–1134
6. Kashiwara: 偏微分方程式系の代数的研究（東大修論）
7. Milnor: Singular points of Complex Hypersurfaces
8. Sato-Kawai-Kashiwara: Microfunctions and Pseudo-differential Equations Springer Lecture Note.
9. 佐藤幹夫（新谷記）：概均質ベクトル空間の代数的理論.
10. Palamodov:
11. 矢野 環：b函数の理論（京大修士論文）
12. 三輪－佐藤－柏原：b函数の決定. (in this volume)