数理解析研究所講究録
225巻 1975年 1-15

Reduced b-function

佐藤 幹夫 述
矢野 環 記.

これは，Reduced b-函数についての，佐藤先生の講演，個人的談話，unofficial prints 等から組み立てたものである．その他色々補足がある．

この方面はあまり開拓されていないが，本来，bそのものよりも，理論的にはあつかいやすいはずのものと思われる．

§1. 定義. 基本性質 — $\overline{b}$, $\overline{b}'$, c_∞ —

$b(s)$ は, $P(s)f^{s+1}=b(s)f^s$ となる, monic, degree 最小なものであった。これにならい, monic な $\mathbb{C}[s]$ の元達 $b_1(=b)$, $b_2,\cdots,b_\nu,\cdots$, を次の様に定義する.

Def. 1 $$(b_\nu(s)) \equiv [\mathcal{D}[s]f^{s+\nu} : f^s]_{\mathbb{C}[s]}$$

f の巾乗 f^ν の b 函数を $b_{f^\nu}(s)$ とすれば,

Cor. 2 $$(b_{f^\nu}(s)) = (b_\nu(\nu s))$$

Thm. 3 $\exists! \,\overline{b}(s),\ \overline{b}'(s),\ c_\nu(s),\ c_\infty(s),\ c'_\nu(s)$

$\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$b_\nu(s) = [\overline{b}(s)]_\nu\, c_\nu(s+\nu)$$
$$= c'_\nu(s)\,[\overline{b}'(s)]_\nu$$

$\nu \le \nu' \Rightarrow c_\nu(s) \mid c_{\nu'}(s)$; $\nu \ge \nu_0 \Rightarrow \begin{cases} c_\nu(s) = c_\infty(s) \\ c'_\nu(s) = c_\infty(s) \end{cases}$

(c' についても同様).

ここに, $[\varphi(s)]_\nu = \varphi(s)\varphi(s+1)\cdots\varphi(s+\nu-1)$

Def. 4 $\overline{b}(s)$ を f の right reduced b-fn
$\overline{b}'(s)$ を 〃 left 〃 と呼ぶ.

Cor. 5 $\nu \ge \nu_0$, $$\overline{b}(s) = \frac{b_{\nu+1}(s)}{b_\nu(s+1)}$$

$$\overline{b}'(s) = \frac{b_{\nu+1}(s-\nu)}{b_\nu(s-\nu)}$$

$\bar{b}(s)$ は，f^s の analytic continuation に最適であり，通常 reduced b とは，$\bar{b}(s)$ のことをいう．($b_{red}(s)$ ともかく．）よって，今後も理論は $\bar{b}(s)$ を主体にのべる．しかし立場によっては $\bar{b}'(s)$ も有効である．又，mixed b-fn も定義しうる．

$\bar{b}(s) = \prod(s+\alpha_j)$ $\quad \gamma(s) = \prod\Gamma(s+\alpha_j)$ とすれば，

$P_\nu(s) f^{s+\nu} = b_\nu(s) f^s$ より，

$$\frac{1}{C_\infty(s+\nu)} P_\nu(s)\left(\frac{1}{\gamma(s+\nu)} f^{s+\nu}\right) = \frac{1}{\gamma(s)} f^s$$

よって，$\mathrm{Re}\, s \gg 0$ から，$\frac{1}{\gamma(s)} f^s$ を $s \in \mathbb{C}$ へ接続しうる．

$\bar{b}'(s)$ では，$C_\infty(s)$ の零点がわざわいする．

example. $\quad f = x^4 + y^4$

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+\tfrac{2}{4})(s+\tfrac{3}{4})(s+\tfrac{4}{4})(s+\tfrac{5}{4})(s+\tfrac{6}{4})$$

$$\bar{b}(s) = (s+1)\cdot(s+\tfrac{2}{4}) \cdots\cdots (s+\tfrac{5}{4})$$

$$\bar{b}'(s) = (s+1)\cdot \quad (s+\tfrac{3}{4}) \cdots\cdots (s+\tfrac{6}{4})$$

$$C_\infty(s) = C_1(s) = s+\tfrac{2}{4} =$$

一般の quasi-hom. isolated の場合については p. 　　をみよ．

〈定理の証明〉

lemma $\quad b_{\nu+\nu'}(s) \mid b_\nu(s) b_{\nu'}(s+\nu)$ ①

$\quad b_\nu(s) \mid b_{\nu+\nu'}(s)$ ②

$\quad b_{\nu'}(s+\nu) \mid b_{\nu+\nu'}(s)$ ③

$\because)\quad b_{\nu'}(s+\nu) b_\nu(s) f^s \in \mathcal{D}[s]\, b_{\nu'}(s+\nu) f^{s+\nu} \subset \mathcal{D}[s] f^{s+\nu+\nu'}$

$\quad b_{\nu+\nu'}(s) f^s \in \mathcal{D}[s] f^{s+\nu+\nu'} \subset \mathcal{D}[s] f^{s+\nu}$

$\quad b_{\nu+\nu'}(s) f^{s+\nu} \in f^\nu \mathcal{D}[s] f^{s+(\nu+\nu')} \subset \mathcal{D}[s] f^{(s+\nu)+\nu'}$

$b(-s)=0$ の根を，mod $\mathbb{Z}$ で分類し，$\{\alpha_1\},\cdots,\{\alpha_\ell\}$ とする．

$\{\alpha_j\} \equiv \{\alpha_j, \alpha_j+i_j^{(1)}, \cdots, \alpha_j+i_j^{(n_j-1)}\}$ $\qquad \alpha_i \not\equiv \alpha_j \mod \mathbb{Z}$

$i_j^{(k)} < i_j^{(k+1)}$ とする．$1+i_j^{(n_j-1)} = \ell(\alpha_j)$ と記す．

①によれば，$b_\nu(s)$ の任意の factor $s+\beta$ に関し，$\exists j$，$\beta \equiv \alpha_j \mod \mathbb{Z}$．$\beta \geq \alpha_j$．又，整除関係は各 group $\{\alpha_j\}$ ごとに，対応する factors で成立することを想起し，その factors のみをみて，$s+\alpha_j \mapsto s+1$ とすれば，結局

$$b_\nu(s) = \prod_{i=1}^{r+\nu-1}(s+i)^{\mu_{\nu,i}} \qquad \text{としてよい．}$$

$$\left(b(s) = (s+1)^{\mu_{1,1}} \cdots (s+r)^{\mu_{1,r}} \qquad \nu_{0,0} \neq 0 \quad \nu_{0,r} \neq 0 \right)$$

このようにすれば，①②③は次の様になる．

$$\mu_{\nu+\nu',i} \leq \mu_{\nu,i} + \mu_{\nu',i-\nu}$$
$$\mu_{\nu,i} \leq \mu_{\nu+\nu',i}$$
$$\mu_{\nu',i-\nu} \leq \mu_{\nu+\nu',i}$$

又，$\mu_{\nu,i} = 0 \quad i \geq \nu+r$，$\quad (\mu_{\nu,i}=0 \quad \nu \leq 0 \text{ or } i \leq 0)$

<u>Claim</u> i) $\nu \geq \varepsilon$，$1 \leq i \leq r-1$ のとき，$\mu_{\nu,i} = \mu_i$ (cte)

ii) $i \geq r$，$1 \leq \rho \leq r-1$．$\quad \mu_{\nu,\nu+\rho} = \mu'_\rho$ (cte)

iii) $\nu \geq i \geq r$ のとき，$\quad \mu_{\nu,i} = \mu$ (cte)

iv) $\mu_1 \leq \mu_2 \cdots \leq \mu_{r-1} \leq \mu \geq \mu'_1 \geq \cdots \geq \mu'_{r-1}$

v) $\mu_k + \mu'_k \geq \mu$

$\because$) <u>$j \geq i$</u> $\qquad \mu_{j,i} \leq \mu_{i,i} + \mu_{j-i,0} = \mu_{i,i}$

$\mu_{i,i} \leq \mu_{j,i} \qquad \therefore\ \mu_{j,i} = \mu_{i,i}$

特に $i=1,\cdots,r-1$ のとき $\mu_i \equiv \mu_{i,i}$ とおくと，

$i<j \Rightarrow \mu_{i,i} \leq \mu_{j,j}$ より，$\quad \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{r-1}$

$\underline{\underline{i \geq r}}$ $\quad \mu_{j,i} \leq \mu_{i-r,i} + \mu_{j-i+r,r} = \mu_{j-i+r,r}$

$\mu_{j-(i-r),r} \leq \mu_{j,i} \qquad \therefore \ \mu_{j,i} = \mu_{j-i+r,r}$

$j<i$ のとき，$\rho = i-j$ として，$\underline{\mu'_\rho} = \mu_{r-\rho,r} \ (= \mu_{j,\rho+j})$

とおくと，$\rho \leq \rho' \Rightarrow \mu'_\rho = \mu_{r-\rho,r} \geq \mu_{r-\rho',r} = \mu'_{\rho'}$

$\therefore \ \mu'_1 \geq \cdots \geq \mu'_{r-1}$.

$\underline{\underline{j \geq i \geq r}}$ このとき，上の2つが同時に成立して

$\mu_{i,i} = \mu_{j,i} = \mu_{(j-i)+r,r}$. これが $\forall j \geq \forall i \geq r$

について成立するので結局 $\mu_{j,i} = \mu_{r,r} \equiv \mu$.

そして，$\mu_{r-1} = \mu_{r-1,r-1} \leq \mu_{r,r} \geq \mu_{r-1,r} = \mu'_1$

又，$\mu_k + \mu'_k = \mu_{k,k} + \mu_{r-k,r} \geq \mu_{r,r} = \mu$.

$$\begin{cases} \beta_1 = \mu_1 \\ \beta_2 = \mu_2 - \mu_1 \\ \vdots \\ \beta_{r-1} = \mu_{r-1} - \mu_{r-2} \\ \beta_r = \mu - \mu_{r-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta'_1 = \mu - \mu'_1 \\ \beta'_2 = \mu'_1 - \mu'_2 \\ \vdots \\ \beta'_r = \mu'_{r-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \mu_1 + \mu'_1 - \mu \\ \vdots \\ \gamma_{r-1} = \mu_{r-1} + \mu'_{r-1} - \mu \end{cases}$$

とって，$\bar{b}(s) \equiv (s+1)^{\beta_1} \cdots (s+r)^{\beta_r}$ $\quad (c_\infty(s) = (s+1)^{\gamma_1} \cdots (s+r-1)^{\gamma_{r-1}})$

$\bar{b}'(s) \equiv (s+1)^{\beta'_1} \cdots (s+r)^{\beta'_r}$

とおけば，ま b_ν の分解をすえる.

$c_\nu(s)$ の定義と $c_\nu | c_\infty$ はもはや明らかであろう.

一般には，各 $\{\alpha_j\}$ で行なって，乗ずればよい.

quod erat demonstrandum.

証明方法の，又 $\bar{b}$, c 構成の

Cor. 6 $\nu_0 \leq \max_j l(\alpha_j)$ ととれる.

$$\bar{b}(s)\, c_\infty(s+1) = c_\infty(s)\, \bar{b}'(s)$$

$$c_\infty(s) \,\big|\, [\bar{b}(s)]_{\nu_0}, \ [\bar{b}'(s-\nu_0)]_{\nu_0}$$

この第二式 $\dfrac{\bar{b}'(s)}{\bar{b}(s)} = \dfrac{c_\infty(s+1)}{c_\infty(s)}$ を用いれば, 2つの Prop を得る.

$$\frac{c_\nu(s+\nu)}{c'_\nu(s)} = \left[\frac{\bar{b}'(s)}{\bar{b}(s)}\right]_\nu = \frac{c_\infty(s+\nu)}{c_\infty(s)}$$

(もっとも どうしても必要というのではないが)

従って,

Prop. 7 If $c_\nu(s) = c'_\nu(s)$, then
$c_\nu(s) = c'_\nu(s) = c_\infty(s)$.

Prop. 8 $c_\infty(s)$ が cte の時, その時に限って $\bar{b}'(s) = \bar{b}(s)$

従って, $b(s) = \bar{b}(s)$ の時以外では, right reduced b と, left reduced b は異なる。だが, 根の, mod $\mathbb{Z}$ でみた各 group の元数は, つねに等しい。

§.2 $\bar{b}$ の min. poly. としての実現 —$\mathfrak{M}(s)$—

$b(s)$ は $\mathfrak{M} = \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1}$ における s の最小多項式であった. $\bar{b}(s)$ を, 同様にとらえることを説明し, reduced b の一般化についてもふれる.
記法を少し変更する.

$P_\nu(s)$ $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ を

$$P_\nu(s) f^s = c_\infty(s)\, \bar{b}(s-1) \cdots \bar{b}(s-\nu) f^{s-\nu}$$

となるものとせよ. $P_\nu(s)$ は mod $\mathcal{J}[s]$ で unique.
$P_0(s)\ (= c_\infty(s))$, $P_1(s)$, $\cdots$ で generate される $\mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]$ の submodule を $c_\infty(s)\mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]$ とする.

$\mathfrak{J}[s] \subset c_\infty(s)\mathfrak{K}[s] \subset \mathcal{D}[s] \subset \mathfrak{K}[s] \subset \frac{1}{c_\infty(s)}\mathcal{D}[s]$.

$P_m[s] \in \mathcal{D}[s]P_0[s]+\cdots+\mathcal{D}[s]P_{m-1}[s]$ となる m をとる.

i.e. $P_m[s]+A_1[s]P_{m-1}[s]+\cdots+A_m[s]P_0[s]=0 \mod \mathfrak{J}[s]$

$P_{m'}[s]P_n[s+n]=c_\infty(s)P_{m'+n}[s+n] \mod \mathfrak{J}[s+n]$

に注意し, $P_n[s+n]$ を左から乗じて $c(s)$ で除せば, $(s\mapsto s-n)$

$P_{m+n}[s]+A_1[s-n]P_{m+n-1}[s]+\cdots+A_m[s-n]P_n[s]=0 \mod \mathfrak{J}[s]$.

$\therefore \mathfrak{K}[s]=\frac{1}{c_\infty(s)}\left(\mathcal{D}[s]P_0[s]+\cdots+\mathcal{D}[s]P_{m-1}[s]\right)$

従って, $\mathfrak{M}(s)=\mathfrak{K}[s]/\mathfrak{J}[s]$ とおくと,

$$=\mathcal{D}[s]f^s+\bar{b}(s-1)\mathcal{D}[s]f^{s-1}+\cdots+[\bar{b}(s-m+1)]_{m-1}\mathcal{D}[s]f^{s-m+1}.$$

$\overline{\mathfrak{M}}_\nu(s)\equiv\mathfrak{M}(s)/\mathfrak{M}(s+\nu)$ とおく.

Thm. 9 $[\bar{b}(s)]_\nu$ は, $\overline{\mathfrak{M}}_\nu(s)$ における endomorphism s の minimal polynomial である.

∵) $[\bar{b}(s)]_\nu\mathfrak{M}(s)\supset\mathfrak{M}(s+\nu)$ は明らか. $\overline{\mathfrak{M}}_\nu(s)$ における s の minimal poly. を $\bar{\bar{b}}_\nu(s)$ とし, $\bar{b}(s)$ は k 次であるとする.

if $\exists\,\bar{\bar{b}}_{\nu_0}(s)\neq[\bar{b}(s)]_{\nu_0}$, g.c.d をとって,

$\deg\bar{\bar{b}}_{\nu_0}<\deg[\bar{b}]_{\nu_0}$ にできる. $\therefore\ \exists k'<k$ s.t.

$\deg\bar{\bar{b}}_\nu<\nu k'\quad(\nu\gg0)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \\
\mathcal{D}[s]f^s/\mathfrak{M}(s+\nu+m-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+\nu} \arrow[r] \arrow[loop above, "{[\bar{b}(s)]_\nu c_\nu(s+\nu)}"] & 0 \\
\mathfrak{M}(s)/\mathfrak{M}(s+\nu+m-1) \arrow[loop left, "\bar{\bar{b}}_{\nu+m-1}(s)"] & &
\end{tikzcd}$$

$\therefore\ \nu k\leq(\nu+m-1)k'$

これは $k'<k$ に矛盾

さらに，$\mathfrak{M}(s)$ はこの性質をもつ最小のものである。
これを説明するため，いくつか一般的事項を準備しよう．

$\mathfrak{N}(s)$ とは，$\mathcal{D}[s]$ module であって，

$$\exists m_0 , \quad \mathcal{D}[s]f^{s-m_0} \supset \mathfrak{N}(s) \supset \mathcal{D}[s]f^{s}$$

$$\mathfrak{N}(s) \supset \mathfrak{N}(s+1)$$

をみたすものとする。

$b_{\mathfrak{N},\nu}(s)$ を $\mathfrak{N}(s)/\mathfrak{N}(s+\nu) \circlearrowleft s$ の min. poly とする.
(存在は上の条件から保証される．) $b_{\mathfrak{N},1}$ を $b_{\mathfrak{N}}$ と記す.

$$\mathfrak{N}(s) \supset \mathfrak{N}(s+\nu) \supset \mathfrak{N}(s+\nu+\nu') \qquad \text{より}$$

$$\begin{cases} b_{\mathfrak{N},\nu+\nu'}(s) \mid b_{\mathfrak{N},\nu}(s)\, b_{\mathfrak{N},\nu'}(s+\nu) \\ b_{\mathfrak{N},\nu}(s) \mid b_{\mathfrak{N},\nu+\nu'}(s), \quad b_{\mathfrak{N},\nu'}(s+\nu) \mid b_{\mathfrak{N},\nu+\nu'}(s) \end{cases}$$

従って，定理 3 の証明はそのまま通用して次が成立する。

Thm 10. $\exists\, \bar{b}_{\mathfrak{N}}, \ \bar{b}'_{\mathfrak{N}}, \ c_{\mathfrak{N},\nu}, \ c'_{\mathfrak{N},\nu}, \ c_{\mathfrak{N}}$

$$\begin{aligned} b_{\mathfrak{N},\nu}(s) &= [\bar{b}_{\mathfrak{N}}(s)]_\nu \, c_{\mathfrak{N},\nu}(s+\nu) \\ &= c'_{\mathfrak{N}}(s)\, [\bar{b}'_{\mathfrak{N}}(s)] \end{aligned}$$

· $\nu \le \nu'$ $\quad c_{\mathfrak{N},\nu} \mid c_{\mathfrak{N},\nu'}$; $c'_{\mathfrak{N},\nu} \mid c'_{\mathfrak{N},\nu'}$; $\exists \nu_0 \le \nu$, $c_{\mathfrak{N},\nu} = c'_{\mathfrak{N},\nu} = c_{\mathfrak{N}}$.

$$\bar{b}_{\mathfrak{N}}(s)\, c_{\mathfrak{N}}(s+1) = c_{\mathfrak{N}}(s)\, \bar{b}'_{\mathfrak{N}}(s)$$

$\bar{b}'_{\mathfrak{N}}$ は $\bar{b}_{\mathfrak{N}}$ と $c_{\mathfrak{N}}$ から定まる故，pair$(\bar{b}_{\mathfrak{N}}, c_{\mathfrak{N}})$
により，$\mathfrak{N}$ の特徴づけを考える.

$\mathfrak{N}(s) \rightsquigarrow (\bar{b}_{\mathfrak{N}}, \bar{c}_{\mathfrak{N}})$ とかくとき，

$\mathcal{D}[s]f^s \rightsquigarrow (\bar{b}, c)$ ，　$\mathfrak{M}(s) \rightsquigarrow (\bar{b}, 1)$

$A \supset B$ で，A/B における s の min. poly が $a(s)$ であることを，右のように表示する　$A \overset{a(s)}{\supset} B$

$m \geq m_0$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}[s]f^{s-m_0} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[rr, bend left, "b_{m_0}(s-m_0)"] & \mathfrak{N}(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend right, "g(s)"'] & \mathcal{D}[s]f^s \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend left, "h(s)"] \arrow[dr, phantom, "\supset"] \arrow[dr, bend right, "b_{m-m_0}(s)"'] & \mathfrak{N}(s+m_0) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend left, "b_{\mathfrak{N},m-m_0}(s+m_0)"] & \mathfrak{N}(s+m) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend right, "g(s+m)"'] & \mathcal{D}[s]f^{s+m} \\
& & & \mathcal{D}[s+m-m_0]f^{s+m-m_0} \arrow[ur, phantom, "\supset"] \arrow[ur, bend right, "h(s+m-m_0)"'] & &
\end{tikzcd}$$

上の図式より，

1. $b_{m-m_0}(s) \mid b_{\mathfrak{N},m}(s)$; $b_{\mathfrak{N},m-m_0}(s+m_0) \mid b_m(s)$
2. $h(s) \mid b_{m_0}(s)$, $b_{\mathfrak{N},m_0}(s)$

   $g(s) \mid b_{m_0}(s-m_0)$, $b_{\mathfrak{N},m_0}(s)$
3. $b_m(s) \mid h(s)\, b_{\mathfrak{N},m-m_0}(s+m_0)\, g(s+m)$

   $b_{\mathfrak{N},m}(s) \mid g(s)\, b_{m-m_0}(s)\, h(s+m-m_0)$

$\deg \bar{b} = d$,　$\deg \bar{b}_{\mathfrak{N}} = d'$ とおく.

十分大なる m に対して，1 の 2 つの式は

$$(m-m_0)d + \deg c \leq md' + \deg c_{\mathfrak{N}}$$

$$(m-m_0)d + \deg c_{\mathfrak{N}} \leq md + \deg c$$

$m \to \infty$ として，　$d = d'$. 再び上の式より，

$$|\deg c_{\mathfrak{N}} - \deg c| \leq m_0 d.$$

2. より　$\deg g, \deg h \leq m_0 d + \min(\deg c_{m_0}, \deg c_{\pi, m_0})$

3 より　~~$m \to \infty$~~ m 十分大で　$m_0 d + |\deg c_\pi - \deg c| \leq \deg g + \deg h$.

b_π と b は，次数が等しいのみならず，根の間にも著しい関係がある。mod. $\mathbb{Z}$ groups の数の一致，各 group の元の個数の一致は容易である。さらに調べるには，ある一つの mod. $\mathbb{Z}$ group に着目して，次の様にしてよい。

$b(s) = (s+n_1)\cdots(s+n_d)$　　$n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_d$.（整数）

$b_\pi(s) = (s+n_1')\cdots(s+n_d')$　　$n_1' \leq n_2' \leq \cdots \leq n_d'$　（〃）

1 の第一式より

$$[(s+n_1)\cdots(s+n_d)]_{m-m_0}\, c(s+m-m_0) \mid [(s+n_1')\cdots(s+n_d')]_m\, c_\pi(s+m)$$

両辺の，絶対値最小根の因子を比較すれば，$n_1 \geq n_1'$.

一方，第二式より

$$[(s+m_0+n_1')\cdots(s+m_0+n_d')]_{m-m_0}\, c_\pi(s+m) \mid [(s+n_1)\cdots(s+n_d)]_m\, c(s+m)$$

∴ $m_0 + n_1' \geq n_1$.　　まとめて　　$n_1 \geq n_1' \geq n_1 - m_0$.

従って，$[s+n_1]_{m-m_0} \mid [s+n_1']_m$.　$r_{1,m}(s) = [s+n_1']_m / [s+n_1]_{m-m_0}$

$$[(s+n_2)\cdots(s+n_d)]_{m-m_0}\, c(s+m-m_0) \mid r_{1,m}(s)[(s+n_2')\cdots(s+n_d')]_m\, c_\pi(s+m)$$

$n_1 \leq n_2$ と，$r_{1,m}(s)$ の表わし方より，$s+n_2 \mid [(s+n_2')\cdots(s+n_d')]_m$.

i.e. $n_2 \geq n_2'$　同様に　$n_2' + m_0 \geq n_2$.　このようにして，

$\underline{1 \leq i \leq d}$　　$n_i \geq n_i' \geq n_i - m_0$.

即ち，我々は次の定理を得た。

Thm. 11 1. $\deg \bar{b}_\pi = \deg \bar{b}$

2. $|\deg c_\pi - \deg c| \le m_0 d$

3. $\bar{b}_\pi$ と $\bar{b}$ の mod. $\mathbb{Z}$ groups の個数，その代表元達の mod $\mathbb{Z}$ class，各 group の元数はことごとく一致し，

$\bar{b}$ の $(s+\alpha_j)(s+\alpha_j+i_2)\cdots(s+\alpha_j+i_d)$ $\quad i_k \le i_{k+1}$

$\bar{b}_\pi$ の $(s+\alpha_j+i_1')(s+\alpha_j+i_2')\cdots(s+\alpha_j+i_d')$ $\quad i_k' \le i_{k+1}'$

が対応する因子とすれば， $i_k \ge i_k' \ge i_k - m_0$.
$(i_1=0)$

一般に， $(\bar{b}_{Z_1}, c_{Z_1}) = (\bar{b}_{Z_2}, c_{Z_2})$

$\Rightarrow$ $b_{Z_1+Z_2} = b_{Z_1} = b_{Z_2}$ $\qquad c_{Z_1+Z_2} \mid c_{Z_1} = c_{Z_2}$

$b'_{Z_1\cap Z_2} \in b'_{Z_1} = b'_{Z_2}$ $\qquad c_{Z_1\cap Z_2} \mid$ 〃 .

$(\bar{b}_\pi, c_\pi) = (\bar{b}, 1)$ の場合，次の定理がある.

この条件は $b_\pi(s) = \bar{b}(s)$ と同値なことに注意せよ.

$\mathcal{M}'(s) = \{u(s) \in \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{D}[s] f^{s-\nu} \mid \exists m,\ [\bar{b}(s)]_m u(s) \in \mathcal{M}(s+m)\}$ とおく.*

明らかに $\mathcal{M}'(s) \supset \mathcal{M}(s)$.

作り方より， $\bar{b}(s)\mathcal{M}'(s) \subset \mathcal{M}'(s+1)$

この2つから， $b_{\mathcal{M}'} = \bar{b}_{\mathcal{M}'} = \bar{b}$.

* $\exists l$, $\mathcal{D}[s] f^{s-l} \supset \mathcal{M}'(s)$ とおもわれるが，証明はまだない.

$\mathfrak{N}(s)$ は従来の仮定を課す.

Thm.12 $b_{\mathfrak{N}}(s)=\bar{b}(s) \iff \mathfrak{M}'(s)\supset\mathfrak{N}(s)\supset\mathfrak{M}(s)$.

∵) ⇒ 条件より $\mathfrak{N}(s+1)\supset\bar{b}(s)\mathfrak{N}(s)\supset\bar{b}(s)\bar{b}(s-1)\mathfrak{N}(s-1)\cdots$

i.e. $\mathfrak{N}(s)\supset[\bar{b}(s-k)]_k\mathfrak{N}(s-k)\supset[\bar{b}(s-k)]_k\mathcal{D}[s]f^{s-k}$.

∴ $\mathfrak{N}(s)\supset\mathfrak{M}(s)$. これを用いて, $m\geq m_0$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{N}(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend right, "\varphi(s)"'] \arrow[rr, bend left, "{[\bar{b}(s)]_m}"] & \mathfrak{M}(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[rr, bend right, "{[\bar{b}(s)]_m}"'] & \mathfrak{N}(s+m) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend left, "\varphi(s+m)"] & \mathfrak{M}(s+m) \end{tikzcd}$$

m 十分大にとって, min.poly $(\mathfrak{N}(s)/\mathfrak{M}(s+m)\ni s) \mid [\bar{b}(s)]_m$.

一方 $\mathfrak{N}(s)\supset\mathfrak{N}(s+m)$ の $[b(s)]_m$ は best possible.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{N}(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[r, bend right, "{[b(s)]_m}"'] & \mathfrak{N}(s+m) \end{tikzcd}$$

よって上の $\mid$ は実は等号.

∴ $\mathfrak{M}'(s)\supset\mathfrak{N}(s)$

⇐ $\mathcal{D}[s]f^{s-m_0}\supset\mathfrak{N}(s)$ として,

$\mathfrak{M}''(s)=\mathfrak{M}(s-m_0)\cap\mathfrak{M}'(s)$ とおく. m 十分大にして

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}''(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[rrrr, bend left, "{[\bar{b}(s)]_m}"] & \mathfrak{N}(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[rr, bend right, "{[\bar{b}_{\mathfrak{N}}(s)]_m c_{\mathfrak{N}}(s+m)}"'] & \mathfrak{M}(s) \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathfrak{N}(s+m) \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathfrak{M}(s+m) \end{tikzcd}$$

$\bar{b}_{\mathfrak{N}}(s)$ の根は, Thm. に従い $\bar{b}(s)$ のものより 0 か自然数をひいたもの. しかし, 上の図式より, 結局 $c_{\mathfrak{N}}=1$

$\bar{b}_{\mathfrak{N}}=\bar{b}$ でなければならない. Q.E.D.

§3. Quasi-hom. の場合の $\bar{b}(s)$

f: weighted hom. isol. sing $\quad (\sum a_i x_i D_i) f = f$
とする。(f: quasi-hom. isol. sing なら Saito の定理よりこうしてよい)

$$\frac{t^{a_1}-t}{1-t^{a_1}} \cdots \frac{t^{a_n}-t}{1-t^{a_n}} = \sum_{\alpha\in \mathbb{Q}_+} q_\alpha t^\alpha$$
として。(右辺は有限項)

$$b(s) = (s+1)\prod_{q_\alpha\neq 0}(s+\alpha).$$

$$B(s) = (s+1)\prod_{\alpha\in \mathbb{Q}_+}(s+\alpha)^{q_\alpha}$$
が固有多項式であった。

$$\mathcal{M}_\nu = \mathcal{D}[s]f^s \big/ \mathcal{D}[s]f^{s+\nu} \simeq \mathcal{D} \big/ \mathcal{J}_0+\mathcal{D}f^\nu$$

$$\mathcal{J}_0 = \{ P(x,D) \mid P(x,D)f^s=0\}. \quad \mathcal{J}_0 = \sum \mathcal{D}(f_i D_j - f_j D_i)$$
となることは、$\nu=1$ の場合と同様。又明らかに、

$$0 \to (\mathcal{M}_{\nu'})_{s\mapsto s+\nu} \to \mathcal{M}_{\nu+\nu'} \to \mathcal{M}_\nu \to 0.$$

$\mathcal{M}_\nu$ における s の min. poly. が $b_\nu(s)$ であった。固有多項式を $B_\nu(s)$ とする。 $b_1(s)=b(s)$, $B_1(s)=B(s)$.

$B_\nu(s) = [s+1]_\nu B'_\nu(s)$ という表示をもつ。(上の seq. から明らか) 除さわずの寄与が $B'_\nu(s)$ になる。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \leftarrow & \mathrm{Hom}((\mathcal{M}_\nu)_{s\mapsto \nu+\nu'}, B_{pt}) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_{\nu+\nu'}, B_{pt}) & \leftarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_\nu, B_{pt}) & \leftarrow 0. \\
& \circlearrowright & & \circlearrowright & & \circlearrowright & \\
& B'_\nu(s+\nu) & & B'_{\nu+\nu'}(s) & & B'_\nu(s) &
\end{array}$$

$$B'_{\nu+\nu'}(s) = B'_{\nu}(s)\, B'_{\nu'}(s+\nu) \qquad \therefore\ B'_{\nu}(s) = [B'(s)]_{\nu}$$

$$\therefore\quad B_{\nu}(s) = [s+1]_{\nu} \prod (s+\alpha)^{q_\alpha + \cdots + q_{\alpha-\nu+1}}$$

min. poly としては,

$$b_{\nu}(s) = [s+1]_{\nu} \prod_{\alpha} (s+\alpha)\ ;\ (q_\alpha, \cdots, q_{\alpha-\nu+1}) \neq 0 .$$

従って, $\nu \geq \nu_0$ ととり Cor. により次をうる.

Thm. f: quasi-hom. isolated sing.

$$\bar{b}(s) = (s+1) \prod (s+\alpha_j)$$
$$\bar{b}'(s) = (s+1) \prod (s+\alpha'_j)$$

ここに, $b(s)/(s+1)$ の根の mod. Z group の最小代表元達を $\{\alpha_j\}$, 最大代表元達を $\{\alpha'_j\}$ とする.

$$\because)\quad \bar{b}(s) = \frac{b_{\nu+1}(s)}{b_{\nu}(s+1)}$$
$$= \frac{[s+1]_{\nu+1} \cdot \prod (s+\alpha)\ (q_\alpha, \cdots, q_{\alpha-\nu}) \neq 0}{[s+2]_{\nu}\ \prod (s+\alpha)\ \ (q_{\alpha-1}, \cdots, q_{\alpha-\nu}) \neq 0}.$$
$$= (s+1) \prod (s+\alpha)\quad q_\alpha \neq 0,\ (q_{\alpha-1}, \cdots, q_{\alpha-\nu}) = 0 .$$

$\nu \geq \nu_0$ とすれば, 第二因子の α は, 絶対値最小のもののみが残っていることになる。

example. Elementary Singularities.

A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 $\qquad b = \bar{b} = \bar{b}'$

$\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$ $\qquad c_1(s) = c(s) = s+1$

(ここで $\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_8$ は3変数表示にとった。2変数表示だと $s+\frac{1}{2}$)

example. $f : (\mathbb{C}^n, 0)$ hom. degree r isol. sing.

$$\bar{b}(s) = (s+1)\cdot\left(s+\frac{n}{r}\right)\cdots\left(s+\frac{n+(r-1)}{r}\right)$$

$$\bar{b}'(s) = (s+1)\cdot\left(s+\frac{(n-1)(r-1)}{r}\right)\cdots\left(s+\frac{n(r-1)}{r}\right)$$

$$c(s) = \left(s+\frac{n}{r}\right)\cdots\left(s+\frac{n(r-1)-r}{r}\right)$$