数理解析研究所講究録
226巻 1975年 168-214

極大過剰決定系と概均質ベクトル空間のb-函数

京大理　柏原正樹

序

極大過剰決定系の構造は，それを micro-local に，即ち cotangent bundle T^*X において考察する時，始めて，　よく把握する事ができる。

例えば，極大過剰決定系は，その support Λ の generic point においては，order (or monodromy, or principal symbol) のみによって決定されてしまう。しかも，Λ の codim 2 の集合を除いた部分の構造によって，global な構造が決定されてしまう（codim 2 の set は homotopy 論の立場からは negligeable な事との類似）。

従って，その support が可約で，その既約成分たちが codim 1 で交る時の構造を決定する事は非常に重要である。

実際，以下に示す様に，Λ_0, Λ_1 という2つの Lagrangian が codim 1 の subset で交る

時の構造を研究する事から，概均質ベクトル空間の b-function を具体的に計算する公式を導き出す事を得る。

以下のノートは，このシンポジウムの話を，精しく別の機会に話した時に，木村達雄君がまとめてくれたもので，同君への謝意とともに，この講究録に載せる。

名大・理　木村 達雄 記

☆ 方程式の principal symbol

$T^*X \supset \Lambda$ Lagrangean

$\mathcal{P} \supset \mathcal{J}$ coherent ideal s.t. $\underline{\bar{\mathcal{J}} = J_\Lambda}$

但し $\bar{\mathcal{J}}$ は $\mathcal{J}$ の symbol ideal

$J_\Lambda = \{\Lambda$ 上で 0 になる関数全体$\} = (\Lambda$ の定義 ideal$)$

すなわち $\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{J}$ は Λ に support をもつ

単一な極大過剰決定系 (simple な MOS) とする.

$\underline{u\ ;\ \mathcal{P}/\mathcal{J}}$ の generator $(= 1 \bmod \mathcal{J})$ とすると

$\mathcal{J}u = 0$ である.

u に対して, u の Λ における principal symbol

$\underline{\sigma_\Lambda(u) \in \sqrt{\Omega_\Lambda^n}}$ を定義しよう. それは

定数倍を除いて unique である.

$\sigma_\Lambda(u)$ は次の微分方程式の solution として

定数倍を除いて unique に定まる.

$$(1)\quad \boxed{\widetilde{L_P}\, s = 0 \qquad ({}^\forall P \in \mathcal{J})}$$

以下 この方程式について説明する.

$P(x,D) = \sum_{j \leq m} P_j(x,D) \in \mathcal{P}$ とする．但し

$P_j(x,\xi)$ は ξ について j 次斉次 とする．

この $P(x,D)$ に対し

$$\boxed{L_P(x,\xi) \overset{\text{def}}{=} H_{P_m(x,\xi)} + \left(P_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P_m(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_i} \right)}$$

とおくと L_P は Λ 上の 一階 の differential operator

と考えることができる．

$L_P = v + \varphi$ ， v は vector field ， φ は scalar field

と表わすとき， L_P は 次のようにして $\sqrt{\Omega^n_\Lambda}$ に

作用する．（Ω^n_Λ は Λ 上の volume elements の空間）

$$\widetilde{L_P} = \widetilde{v+\varphi} \quad : \quad \sqrt{\Omega^n_\Lambda} \longrightarrow \sqrt{\Omega^n_\Lambda}$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ s & \longmapsto & \underline{\frac{1}{2s} L_v(s^2) + \varphi s} \end{array}$$

但し L_v は v 方向の Lie 微分， $\frac{1}{2s} L_v(s^2)$ は

$\otimes s$ で $\frac{1}{2} L_v(s^2) \in \Omega^n_\Lambda$ になる $\sqrt{\Omega^n_\Lambda}$ の元 という意味．

Ω^n_Λ の section ω を1つ fix すると

$\sqrt{\Omega^n_\Lambda} \ni s \longmapsto s^2 = \omega \in \Omega^n_\Lambda$ となる $\sqrt{\Omega^n_\Lambda}$ の

section が 二つあるが，どちらか一方を fix し $\sqrt{\omega}$ と記す．

そのとき $\sqrt{\Omega_\Lambda^n}$ の section は $f\sqrt{\omega}$（f は関数）の形にかける。

$s=f\sqrt{\omega}$ に対し $\widetilde{v+\varphi}$ の作用がどうなるかを調べてみよう.

$s=f\sqrt{\omega}$ に対し, $\frac{1}{2s}L_v(s^2)+\varphi s$ を計算すればよい.

$L_v(f^2\omega)=2f\,v(f)\,\omega+f^2L_v(\omega)$ ゆえ

$$(2)\quad \boxed{f\sqrt{\omega}\ \xmapsto{\widetilde{(v+\varphi)}}\ \Big(v(f)+\underbrace{\frac{f}{2}\cdot\frac{L_v(\omega)}{\omega}+\varphi f}\Big)\sqrt{\omega}}$$

一般に p次 covariant tensor field $t=\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n}t_{i_1\cdots i_p}\,dx_{i_1}\otimes\cdots\otimes dx_{i_p}$ の $X=\sum_{l=1}^{n}a_l\frac{\partial}{\partial x_l}$ 方向の Lie 微分 (L_Xt) は

$$L_Xt=\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\left\{a_l\frac{\partial t_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_l}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial a_l}{\partial x_{i_k}}t_{i_1\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ i_k}}{l}\cdots i_p}\right\}\right)dx_{i_1}\otimes\cdots\otimes dx_{i_p}$$

特に

$$\boxed{L_{\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}}\,dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n}$$

特に $L_{(x_i\frac{\partial}{\partial x_i})}dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n=dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n$

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_i}}dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n=0$$

$$L_{a(x)\frac{\partial}{\partial x_i}}dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n=\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\cdot dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n$$

etc.

$L_v(\varphi s)=v(\varphi)\,s+\varphi L_v(s)$

Theorem 1. $\widetilde{L_P}\, s = 0 \ (P \in \mathfrak{g})$ の solution は local には存在して定数倍を除いて unique.（analytic solution）

Proof）

まず T^*X 上の関数 f が Λ 上で 0 $(f|\Lambda = 0)$ ならば H_f は Λ 上の vector field とみなせることを示そう。

$f|\Lambda = 0$ ゆえ df を $T^*\Lambda$ の元とみなすと 0，よって $df \in T^*_\Lambda(T^*X)$ と考えられる.

他方 $T^*(T^*X)$ と $T(T^*X)$ は $d\omega$（ω は canonical 1-form）により，$df \longleftrightarrow H_f$（Hamilton field）によって同一視される.　よって $df \in T^*_\Lambda(T^*X)$ はこの対応により $H_f \in (T\Lambda)^\perp$ と考えられるが Λ は Lagrangean ゆえ $(T\Lambda)^\perp = T\Lambda$. よって $H_f \in T\Lambda$ と考えられる.　図で示せば

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & T\Lambda & \longrightarrow & T(T^*X) \ni H_f & \longrightarrow & T_\Lambda(T^*X) \\
 & & & d\omega \updownarrow \quad \updownarrow & & \\
0 \longleftarrow & T^*\Lambda & \longleftarrow & T^*(T^*X) \ni df & \longleftarrow & T^*_\Lambda(T^*X)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
T^*_\Lambda(T^*X) & \xleftrightarrow{d\omega} & (T\Lambda)^\perp \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
df & \longleftrightarrow & H_f
\end{array}$$

さて　仮定より $\overline{\mathcal{J}} = J_\Lambda$　ゆえ

$P_1, \cdots, P_n \in \mathcal{J}$ s.t. $\sigma(P_1), \cdots, \sigma(P_n)$ が J_Λ の base

（すなわち $\underline{P_1, \cdots, P_n}$ は $\mathcal{J}$ の involutory base）

なるものが　とれる。

そのとき　$\sigma(P_i)|\Lambda = 0$　ゆえ　$H_{\sigma(P_i)}$ は $T\Lambda$ の元

とみなせるが，$d\sigma(P_1), \cdots, d\sigma(P_n)$ が $T_\Lambda^*(T^*X)$ の base

ゆえ $\underline{H_{\sigma(P_1)}, \cdots, H_{\sigma(P_n)}\ \text{は}\ (T\Lambda)^\perp = T\Lambda\ \text{の base}}$ である。

さて　$s = f\sqrt{\omega} \in \sqrt{\Omega_\Lambda^n}$　に対して

$$\tilde{L}_{P_j} s = \left(v_j(f) + \frac{f}{2} \cdot \frac{L_{v_j}(\omega)}{\omega} + \varphi_j f \right) \sqrt{\omega} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(v_j + \frac{1}{2} \frac{L_{v_j}(\omega)}{\omega} + \varphi_j \right) f = 0 \qquad (L_{P_j} = v_j + \varphi_j)$$

但し　$P_j(x, D) = \sum_{k \le m_j} P_j^{(k)}(x, D)$　とおくとき

$$v_j = H_{\sigma(P_j)} = H_{P_j^{(m_j)}(x,\xi)}, \qquad \varphi_j = P_j^{(m_j-1)}(x,\xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j^{(m_j)}(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_i}$$

今

$$G_j = H_{\sigma(P_j)} + \frac{1}{2} \frac{L_{H_{\sigma(P_j)}}(\omega)}{\omega} + P_j^{(m_j-1)}(x,\xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j^{(m_j)}(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_i}$$

$$= v_j + \psi_j$$　とおけば

(1) は　$G_j f = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$　と同値になる.

次に $[G_j, G_k] = \Sigma a_{jkl} G_l$ を示そう。それには

$[\tilde{L}_{P_j}, \tilde{L}_{P_k}] f\sqrt{\omega} = ([G_j, G_k] f)\sqrt{\omega}$ ゆえ

$[\tilde{L}_{P_j}, \tilde{L}_{P_k}] = \Sigma a_{jkl} \tilde{L}_{P_l}$ を示せばよい。

lemma 1. $P = v + \varphi$, $P' = v' + \varphi'$ (v, v' vector field, φ, φ' scalar field) $\Rightarrow$ $\widetilde{[P, P']} = [\tilde{P}, \tilde{P}']$

lemma 2. $[L_P, L_Q] = L_{[P,Q]}$

lemma 3. $\tilde{L}_{AP} = \sigma(A)\tilde{L}_P$ $\sigma(A)$ は ΨDO. A の principal symbol

これらの lemma を認めれば

$[\tilde{L}_{P_j}, \tilde{L}_{P_k}] = \widetilde{[L_{P_j}, L_{P_k}]} = \tilde{L}_{[P_j, P_k]}$

$P_1, \cdots, P_n$ は $\mathfrak{g}$ の base ゆえ（そして $[P_j, P_k] \in \mathfrak{g}$ だから）

$[P_j, P_k] = \sum_l A_{jkl} P_l$ とおくと

$\tilde{L}_{[P_j, P_k]} = \tilde{L}_{\Sigma A_{jkl} P_l} = \Sigma \tilde{L}_{A_{jkl} P_l} = \Sigma \sigma(A_{jkl}) \tilde{L}_{P_l}$

$\therefore$ $[G_j, G_k] = \Sigma a_{jkl} G_l$ がいえた。

以上のことより　次の Pfaff の lemma が使えて solution が 1次元であることがいえる。

lemma (Pfaff) $G_j = v_j + \psi_j$ $(j=1,\cdots,n)$, v_j は vector field, ψ_j は関数, が n 次元 manifold の x_0 の近傍上で define された n ケの diff. op. で

1) $v_j(x_0) \in T_{x_0}X$ は tangent space の base

2) $[G_j, G_k] = \sum_l a_{jkl} G_l$, 但し a_{jkl} は x_0 の nbd. で def された関数

$\Rightarrow$ $G_1 u = \cdots = G_n u = 0$ の解は x_0 の nbd で 1 次元 vector space になる.

諸公式

☆ $H_f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$; Hamilton field

$P = \sum_{j \le m} P_j(x, D)$

$L_P^{(m)} = H_{\sigma_m(P)} + \sigma_{m-1}(P)$; 一階の diff. op.

$\sigma_m(P) = P_m(x, \xi)$, $\sigma_{m-1}(P) = P_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P_m(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_i}$

☆ $L_{PQ}^{(m+\ell)} = \sigma_m(P) L_Q^{(\ell)} + \sigma_\ell(Q) L_P^{(m)} + \frac{1}{2} \{ \sigma_m(P), \sigma_\ell(Q) \}$

但し P, Q はそれぞれ高々 m, ℓ 階. { } は Poisson bracket.

☆ $L_{[P,Q]}^{(m+\ell-1)} = [L_P^{(m)}, L_Q^{(\ell)}]$

この証明には $R = PQ = \sum_{j \le m+\ell} R_j(x, D)$ とおくとき

$R_j = \sum_{\substack{\nu+\mu-|\alpha| \\ = j}} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha P_\nu)(D_x^\alpha Q_\mu)$ を使う.

特に $R_{m+\ell} = P_m Q_\ell$, $R_{m+\ell-1} = P_m Q_{\ell-1} + P_{m-1} Q_\ell + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q_\ell}{\partial x_i}$

(P_i は $P_i(x, \xi)$ のイミ.)

☆ $H_{fg} = f H_g + g H_f$, $H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g]$

☆ $\widetilde{L}_{AP} = \sigma(A) \widetilde{L}_P$, $\widetilde{L}_{PA} = \widetilde{L}_P \sigma(A)$

Theorem 2. $\underline{\sigma_\lambda(Qu) = \sigma(Q)\overset{\text{mod const.}}{\sigma_\lambda(u)} \text{ if } \sigma(Q)|_\lambda \neq 0}$

Proof) $(PQ^{-1})(Qu) = 0$ for $P \in \mathcal{J}$

$R = PQ^{-1}$ $(P \in \mathcal{J})$ とおくと

$$\widetilde{L}_R(\sigma(Q)\sigma_\lambda(u)) = \widetilde{L}_P\,\sigma(Q)^{-1}\sigma(Q)\sigma_\lambda(u)$$

$$= \widetilde{L}_P\,\sigma_\lambda(u) = 0 \quad (\forall R \text{ s.t. } R(Qu) = 0)$$

$$\therefore\ \sigma_\lambda(Qu) = \sigma(Q)\,\sigma_\lambda(u)_{\text{mod const.}} \quad //$$

Theorem 3. $\sigma_\lambda(u)$ は ξ に関して homogeneous である.

Proof) $v = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ に対し

$$\underline{\widetilde{L}_P s = 0\ (\forall P \in \mathcal{J}) \Rightarrow \widetilde{L}_P(\tilde{v} s) = 0\ (\forall P \in \mathcal{J})}$$

を示せば 解は定数倍を除いて unique ゆえ Euler's identity より ξ について homogeneous であることがわかる.　　　これを示そう.

$\widetilde{L}_p \tilde{v} = \tilde{v}\widetilde{L}_{p'} + [\widetilde{L}_p, \tilde{v}]$ ゆえ

$\widetilde{L}_p(\tilde{v}s) = [\widetilde{L}_p, \tilde{v}]s = [\widetilde{L_p, v}]s$ であるから

$[L_p, v] = -(m-1)L_p$ （P : m 階）を示せば

$\widetilde{L}_p(\tilde{v}s)$ がいえる.

lemma. $[v, L_p^{(m)}] = (m-1)L_p^{(m)}$

$$L_p^{(m)} = \sum_i \left(\frac{\partial P_m(x,\xi)}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial P_m(x,\xi)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) + \sigma_{m-1}(P)$$

$$[v, \sigma_{m-1}(P)] = \left(v(\sigma_{m-1}(P)) + \sigma_{m-1}(P)v\right) - \sigma_{m-1}(P)v$$

$$= v(\sigma_{m-1}(P)) = (m-1)\sigma_{m-1}(P)$$

$$\left[v, \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] = v\left(\frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}v\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i}v$$

$$= v\left(\frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = (m-1)\frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\left[v, \frac{\partial P_m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right] = v\left(\frac{\partial P_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial P_m}{\partial x_i}v\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial P_m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}v$$

$$= m\left(\frac{\partial P_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i} - \left(\frac{\partial P_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i} = (m-1)\frac{\partial P_m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

結局 $[v, L_p^{(m)}] = (m-1)L_p^{(m)}$ //

Def. $ord_\Lambda(u) = \sigma_\Lambda(u)$ の ξ に関する homog. degree

Theorem 4. $P \in \mathcal{J}$, $d\sigma_m(P) \equiv \varphi\,\omega \mod J_\Lambda$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{ord}_\Lambda(u) + \frac{m-1}{2}\right)\varphi \equiv \left(P_{m-1} - \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 P_m}{\partial x_i \partial \xi_i}\right) \mod J_\Lambda$$

但し ω は canonical 1-form.

Proof) $d\sigma_m(P) \equiv \varphi\,\omega \mod J_\Lambda$

$$\Big\updownarrow d\omega$$

$H_{\sigma_m(P)} = -\varphi v$ on Λ である.

$$\begin{array}{ccc} T^*(T^*X) & \longleftrightarrow & T(T^*X) \\ \Psi & & \Psi \\ df & \longleftrightarrow & H_f \\ \omega & \longleftrightarrow & -v = -\sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \end{array}$$

$$\therefore \widetilde{L_P} = \widetilde{(-\varphi v)} + \sigma_{m-1}(P)$$

$$= -\varphi \tilde{v} - \frac{1}{2}v(\varphi) + \sigma_{m-1}(P)$$

$$= -\varphi \tilde{v} - \frac{m-1}{2}\varphi + \sigma_{m-1}(P)$$

($\because$ φ は $(m-1)$次 homog. 実際 $d\sigma_m(P)$ は m次 homog. で ω は 1次 homog. かつ $d\sigma_m(P) \equiv \varphi\,\omega \mod J_\Lambda$ より)

$\tilde{v}\,\sigma_\Lambda(u) = \mathrm{ord}_\Lambda(u)\cdot\sigma_\Lambda(u)$ に注意すれば

$$\left(-\varphi\,\mathrm{ord}_\Lambda(u) - \frac{m-1}{2}\varphi + \sigma_{m-1}(P)\right)\sigma_\Lambda(u) = 0$$

$$\therefore \left(\mathrm{ord}_\Lambda(u) + \frac{m-1}{2}\right)\varphi\,\sigma_\Lambda(u) = \sigma_{m-1}(P)\,\sigma_\Lambda(u)$$

$$\therefore \left(\mathrm{ord}_\Lambda(u) + \frac{m-1}{2}\right)\varphi = \sigma_{m-1}(P) \quad \text{on } \Lambda \qquad //$$

Cor. $P \in \mathcal{J}$, Pは一階 s.t. $d\sigma(P) \equiv \omega \mod J_\Lambda$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ord}_\Lambda(u) = P_0(x,\xi) - \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2\sigma(P)}{\partial x_i \partial \xi_i}\Big|_\Lambda \qquad //$$

☆ このような P の存在は次のようにしていえる.

接触変換で $\Lambda = \{x_1 = \cdots = x_n = 0\}$ とできるが, そのとき $\sigma_1(P) = \sum x_i \xi_i$ をとればよい.

例 1)　$(x_1, \cdots, x_n)$ を局所座標として

$$x_1 u = \cdots = x_r u = 0, \quad D_{r+1} u = \cdots = D_n u = 0$$

なる方程式系を考える.

$$u = \delta(x_1, \cdots, x_r), \quad \Lambda = \{(x, \xi) \mid x_1 = \cdots = x_r = 0, \xi_{r+1} = \cdots = \xi_n = 0\}$$

$$\begin{cases} L_{x_j} = H_{x_j} = -\dfrac{\partial}{\partial \xi_j} \\ L_{D_j} = H_{\xi_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j} \end{cases}$$

$$\sigma_\Lambda(u) = \varphi \sqrt{d\xi_1 \cdots d\xi_r \, dx_{r+1} \cdots dx_n}$$ とおくと

$$\widetilde{\frac{\partial}{\partial \xi_j}} \sigma_\Lambda(u) = 0 \ (1 \leq j \leq r), \quad \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_j}} \sigma_\Lambda(u) = 0 \ (r+1 \leq j \leq n)$$

$$L_{\frac{\partial}{\partial \xi_j}} (d\xi_1 \cdots dx_n) = L_{\frac{\partial}{\partial x_j}} (d\xi_1 \cdots dx_n) = 0$$ ゆえ

これは $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} = 0 \ (1 \leq j \leq r), \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \ (r+1 \leq j \leq n)$

を意味する.　$\therefore \varphi = \text{const}.$

$$\therefore \sigma_\Lambda(\delta(x_1, \cdots, x_r)) = \sqrt{d\xi_1 \cdots d\xi_r \, dx_{r+1} \cdots dx_n}$$

☆ $\sigma_\Lambda(u)$ は modulo constant でしか定義されていないことに注意.

$$\therefore \operatorname{ord}_\Lambda(\delta(x_1, \cdots, x_r)) = \frac{r}{2} \qquad //$$

例2) $\underline{(x_1D_1-\alpha)u=(x_2D_2-\beta)u=D_3u=\cdots=D_nu=0}$

$\underline{\Lambda_1=\{x_1=x_2=\xi_3=\cdots=\xi_n=0\}}$

$\underline{\Lambda_2=\{x_1=\xi_2=\xi_3=\cdots=\xi_n=0\}}$

とするとき $\sigma_{\Lambda_1}(u)$, $\sigma_{\Lambda_2}(u)$ を求めよう.

∘ $P_1(x,D)=x_1D_1-\alpha \quad \in \mathfrak{J}$

$$L_{P_1(x,D)}=H_{x_1\xi_1}-\alpha-\frac{1}{2}=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}-\alpha-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ L_{P_1}=-\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+\alpha+\frac{1}{2}\right)\quad \text{on } \Lambda_1,\Lambda_2 \quad \left(\begin{smallmatrix}x_1=0\\ \text{に注意}\end{smallmatrix}\right)$$

∘ $P_2(x,D)=x_2D_2-\beta \quad \in \mathfrak{J}$

$$L_{P_2(x,D)}=x_2\frac{\partial}{\partial x_2}-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}-\beta-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ L_{P_2}=-\left(\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+\beta+\frac{1}{2}\right)\quad \text{on } \Lambda_1$$

$$=\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_2}-\beta-\frac{1}{2}\right)\quad \text{on } \Lambda_2$$

∘ $P_j(x,D)=D_j \quad (3\le j\le n)$

$$L_{P_j}=H_{\xi_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}$$

さて $\omega_1=d\xi_1d\xi_2dx_3\cdots dx_n$, $\omega_2=d\xi_1dx_2dx_3\cdots dx_n$

とおき $\sigma_{\Lambda_1}(u)=f_1\sqrt{\omega_1}$, $\sigma_{\Lambda_2}(u)=f_2\sqrt{\omega_2}$ とおいて

f_1, f_2 を求めよう.

まず $L_{P_1} = -\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \alpha + \frac{1}{2}\right)$

$\mathcal{L}_{\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}} \omega_1 = \omega_1$, $\mathcal{L}_{\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}} \omega_2 = \omega_2$ ゆゑ

Lie 微分

$$\tilde{L}_{P_1} f_1 \sqrt{\omega_1} = -\left(\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + \frac{f_1}{2} \cdot \frac{L_{\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}} \omega_1}{\omega_1} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) f_1\right)\sqrt{\omega_1}$$

$$= -\left(\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + (\alpha+1) f_1\right)\sqrt{\omega_2} = 0$$

同様に $\tilde{L}_{P_1} f_2 \sqrt{\omega_2} = -\left(\xi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} + (\alpha+1) f_2\right)\sqrt{\omega_2} = 0$

次に $L_{P_2} = -\left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \beta + \frac{1}{2}\right)$ on Λ_1 ゆゑ

今と全く同様に $\tilde{L}_{P_2} f_1 \sqrt{\omega_1} = -\left(\xi_2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} + (\beta+1) f_1\right)\sqrt{\omega_1} = 0$

他方 $L_{P_2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \beta - \frac{1}{2}$ on Λ_2 ゆゑ

($\mathcal{L}_{x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}} \omega_2 = \omega_2$ ゆゑ)

$$\tilde{L}_{P_2} f_2 \sqrt{\omega_2} = \left(x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{f_2}{2} \cdot \frac{L_{x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}} \omega_2}{\omega_2} - \left(\beta + \frac{1}{2}\right) f_2\right)\sqrt{\omega_2}$$

$$= \left(x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \beta f_2\right)\sqrt{\omega_2} = 0$$

最後に $L_{P_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(3 \leq j \leq n)$ ゆゑ

$$\tilde{L}_{P_j} f_i \sqrt{\omega_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \sqrt{\omega_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

従って $\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} = -(\alpha+1) f_1$, $\xi_2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} = -(\beta+1) f_1$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = 0$ $(3 \leq j \leq n)$

$f_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, x_3, \cdots, x_n)$ ゆえ

$$f_1 = \xi_1^{-\alpha-1}\,\xi_2^{-\beta-1}$$

$$\therefore\ \boxed{\begin{aligned}\sigma_{\Lambda_1}(u) &= \xi_1^{-\alpha-1}\,\xi_2^{-\beta-1}\sqrt{d\xi_1 d\xi_2 dx_3 \cdots dx_n}\\ \mathrm{ord}_{\Lambda_1}(u) &= -\alpha-\beta-1\end{aligned}}$$

他方. $\xi_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_1} = -(\alpha+1) f_2, \quad x_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = \beta f_2$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_j} = 0 \quad (3 \le j \le n)$$

$$\therefore\ f_2 = \xi_1^{-\alpha-1}\, x_2^{\beta}$$

$$\therefore\ \boxed{\begin{aligned}\sigma_{\Lambda_2}(u) &= \xi_1^{-\alpha-1}\, x_2^{\beta}\sqrt{d\xi_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n}\\ \mathrm{ord}_{\Lambda_2}(u) &= -\alpha-\tfrac{1}{2}\end{aligned}}$$

特に $\mathrm{ord}_{\Lambda_1}(u) - \mathrm{ord}_{\Lambda_2}(u) - \frac{1}{2} = -\beta-1$ は重要な役割を演ずる. (P. 参照)

例3) (G, V) prehomog. $S = \{f=0\} \cup S'$ $f \leftrightarrow \delta\chi$

Λ good Lagrangean

そのとき $\underline{\sigma_\Lambda(f^s) = f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}}$ である.

f_Λ は Λ 上の $\delta\chi$ に対応する rel inv.

ω_Λ は Λ 上の tr_V に対応する rel. inv. volume elt.

Proof) Λ が good Lagrangean ゆえ

$\langle Ax, D_x\rangle - s\,\delta\chi(A)$ $(A \in \mathfrak{g})$ が $\mathcal{J}$ の

involutory base になっている.

$P(x, D) = \langle Ax, D_x\rangle - s\,\delta\chi(A)$ とおく.

$H_{\langle Ax, y\rangle} = \langle Ax, D_x\rangle - \langle {}^tAy, D_y\rangle$

$\sum_i \frac{\partial^2 \langle Ax, y\rangle}{\partial x_i \partial y_i} = \mathrm{tr}_V A$ ゆえ

$$L_P = \langle Ax, D_x\rangle - \langle {}^tAy, D_y\rangle - s\,\delta\chi(A) - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}_V A$$

さて $H_{\langle Ax, y\rangle}$ は $(x, y) \mapsto (gx, {}^tg^{-1}y)$ の微分表現

ゆえ $L_{H_{\langle Ax, y\rangle}} \omega_\Lambda = (\mathrm{tr}_V A)\,\omega_\Lambda$ ←Lie 微分

$H_{\langle Ax, y\rangle} f_\Lambda = \delta\chi(A) f_\Lambda$

$$\therefore\ \widetilde{L}_{H_{\langle Ax, y\rangle}} f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda} = \left(H_{\langle Ax, y\rangle} f_\Lambda^s + \frac{1}{2}\frac{L_{\langle Ax, y\rangle}\omega_\Lambda}{\omega_\Lambda}\right)\sqrt{\omega_\Lambda}$$

$$= \left(s\,\delta\chi(A) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}_V A\right) f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$$

$\therefore\ \widetilde{L}_P\, f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda} = 0 \quad \text{for } \forall P \in \mathfrak{g}$ 　解は unique ゆえ

$\therefore\ \sigma_\Lambda(f^s) = f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$ (mod const.)

☆ $\underline{\mathrm{ord}_\Lambda f^s = s\,\delta\chi(A_0) - \mathrm{tr}_{V^*_{x_0}} A_0 + \frac{1}{2}\dim V^*_{x_0}}$

但し $A_0 x_0 = 0$, $-{}^tA_0 y_0 = y_0$

$(x_0, y_0) \in \Lambda$ gen. pt.

$\mathrm{ord}_\Lambda f^s = \deg_y \sigma_\Lambda(f^s) = \deg_y f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$

$= s\deg_y f_\Lambda + \frac{1}{2}\deg_y \omega_\Lambda$

$(\langle Ax, D_x\rangle - \langle {}^tAy, D_y\rangle) f_\Lambda = \delta\chi(A) f_\Lambda(x, y)$

$\langle y, D_y\rangle f_\Lambda(x, y) = (\deg_y f_\Lambda) f_\Lambda(x, y)$

ゆえに $A_0 x_0 = 0$, $-{}^tA_0 y_0 = y_0$ 　$f_\Lambda(x_0, y_0) \neq 0$ なる A_0

をとれば 　$\deg_y f_\Lambda = \delta\chi(A_0)$

$\Lambda (\subset T^*V = V \times V^*)$ の V への projection を Y

とし 　V の局所座標 $(t_1, \dots, t_n)$ を $Y = \{t_1 = \dots = t_r = 0\}$

$\Lambda = \{t_1 = \dots = t_r = 0,\ \tau_{r+1} = \dots = \tau_n = 0\}$ 　となるようとると

$\omega_\Lambda = \varphi\, d\tau_1 \cdots d\tau_r\, dt_{r+1} \cdots dt_n$ 　と表わせるが

$d\tau_1 \cdots d\tau_r$ は $V^*_{x_0}$ の, $dt_{r+1} \cdots dt_n$ は $\mathfrak{g} \cdot x_0$ の volume elt ゆえ

$d\tau_1 \cdots d\tau_r dt_{r+1} \cdots dt_n$ は $\mathrm{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \mathrm{tr}_{\mathfrak{g} \cdot x_0} A_0$

$= 2\,\mathrm{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \mathrm{tr}_V A_0$ の変化をうける ($A_0 \in \mathfrak{g}_{x_0}$ の作用で)

が $(L_{\langle A_0 x, D_x \rangle} - L_{\langle {}^t A_0 y, D_y \rangle})\,\omega_\Lambda = \mathrm{tr}_{V_{x_0}} \omega_\Lambda$

ゆえ φ は $-2\,\mathrm{tr}_{V_{x_0}^*} A_0$ の変化をうけるが A_0 の

とり方より φ は $-2\,\mathrm{tr}_{V_{x_0}^*} A_0$ 次 homog.

$\therefore$ ω_Λ は $(r - 2\,\mathrm{tr}_{V_{x_0}^*} A_0)$ 次 homog.

$$\therefore\ \mathrm{ord}_\Lambda f^s = s\,\delta\chi(A_0) - \mathrm{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \frac{\dim V_{x_0}^*}{2} \qquad //$$

☆ local な b-関数

(G, V, f) prehomog. v.s.

$T^*V \supset \Lambda$ good Lagrangean

Def. $\underline{b_\Lambda(s)}$ が Λ における b-関数

$\Leftrightarrow$ $\exists P$; Λ の gen. pt. の 近傍 で def された elliptic operator (i.e. $\sigma(P)|_\Lambda \neq 0$) s.t. $Pf^{s+1} = b_\Lambda(s) f^s$

i.e. $\quad P f u_s = b_\Lambda(s) u_s$

u_s は $\mathcal{P}/\mathcal{P}(\sum_{A\in\mathfrak{g}} \langle Ax, D_x\rangle - s\,\delta\chi(A))$ の generator

lemma 1. $fu_s \neq 0$ (for generic s), かつ fu_s は $(\langle Ax, D_x\rangle - (s+1)\delta\chi(A))(fu_s) = 0$ を みたす.

$\because$) $\exists Q(x, D_x) f u_s = \tilde{b}(s) u_s$, $\therefore \tilde{b}(s) \neq 0$ なる $fu_s = 0$

$\to u_s = 0$ 矛盾. //

lemma 2. $\underline{P f u_s = b_\Lambda(s) u_s \text{ , } P \text{ elliptic op.}}$

$\Rightarrow$ $\underline{P \text{ は order が } m_\Lambda \text{ で } \sigma_{m_\Lambda}(P)|_\Lambda = \text{const.}\ f_\Lambda^{-1}}$

但し $f_\Lambda = f/s^{m_\Lambda}$

$\because$) $\sigma(u_s) = f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$, $\sigma(fu_s) = f_\Lambda^{s+1}\sqrt{\omega_\Lambda}$

$\sigma(P(fu_s)) = \sigma(P)\sigma(fu_s) = \sigma(P) f_\Lambda^{s+1}\sqrt{\omega_\Lambda} = \sigma(b_\Lambda(s) u_s)$

$$= f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda} \quad \text{mod const.}$$

$$\therefore \ \sigma_{m_\Lambda}(P) = \text{const.}\, f_\Lambda^{-1} \qquad //$$

Theorem 1. (一意性)　$b_\Lambda(s)$ は 定数倍を除いて unique.

Proof)

$$P_1 f u_s = b_1(s)\, u_s$$
$$P_2 f u_s = b_2(s)\, u_s \qquad P_1, P_2 \text{ elliptic}$$

$f u_s = b_1(s) P_1^{-1} u_s$ ゆえ　$b_2(s) u_s = b_1(s) P_2 P_1^{-1} u_s$.

$$\therefore \ (b_2(s) - b_1(s) P_2 P_1^{-1})\, u_s = 0$$

$\sigma_0(b_2(s) - b_1(s) P_2 P_1^{-1}) = b_2(s) - \text{const.}\, b_1(s) \neq 0$ と

すると $(b_2(s) - b_1(s) P_2 P_1^{-1})$ elliptic となり $u_s = 0$ となり

矛盾.　　$\therefore \ b_2(s) = \text{const.}\, b_1(s)$.　　//

☆ lemma 2 より $P_2 P_1^{-1}$ の Λ 上の symbol は const. であることに注意.

Theorem 2. (存在定理)

$\exists$ $(-m_\Lambda)$ 階の operator P_Λ s.t. $\sigma_{-m_\Lambda}(P_\Lambda)|_\Lambda = f_\Lambda$

$\exists$ $b_\Lambda(s) = s^{m_\Lambda} + (m_\Lambda - 1$ 次以下の s の多項式$)$

s.t.　$f u_s = b_\Lambda(s) P_\Lambda u_s$　,　$u_s = f^s$

Proof)

次の記号を導入する.

$T(s)$ が s について多項式の ΨDO、とするとき

$\underline{\mathrm{ord}}\, T(s) = \{ s$ を1階と考えたときの order $\}$

すなわち $T(s) = \sum_{j \geq 0} s^j T_j$ としたとき $\max_j (j + \mathrm{ord}\, T_j)$.

さて P を $(-m_\lambda)$ 階でその principal symbol が W 上で

$\sigma_{-m_\lambda}(P)\big|_W = f_\lambda = f / s^{m_\lambda}$ なるものとする.

そのとき $f = \sigma_{-m_\lambda}(P) \langle A_0 x, y \rangle^{m_\lambda}$ on W である.

(但し $\langle A_0 x, y \rangle u_s = s u_s$, $\delta\chi(A_0) = 1$.)

$$\therefore\ f - P \langle A_0 x, D_x \rangle^{m_\lambda} = \sum_{A_j \in \mathfrak{g}_0} T_j(x, D_x) \langle A_j x, D_x \rangle + K \qquad (\mathrm{ord}\, K \leq -1)$$

と表わせる.

(W 上 0 になる関数は $\langle A_j x, y \rangle$ $(A_j \in \mathfrak{g}_0)$ で張られる.)

$$\therefore\ f u_s = s^{m_\lambda} P u_s + K u_s, \quad \mathrm{ord}\, K \leq -1.$$
$$= (s^{m_\lambda} P + K) u_s$$

ここで $K u_s = 0$ なら O.K.

$K u_s \neq 0$ の場合を考える.

lemma 3. $G(s) u_s \neq 0 \Rightarrow G(s) u_s \overset{\exists}{=} T(s) u_s$ s.t. $T(s)$ elliptic かつ $\underline{\mathrm{ord}}\, T(s) \leq \underline{\mathrm{ord}}\, G(s)$

sublemma 1. $G(s)$ が elliptic でなければ

$\exists T(s)$ s.t. $T(s)u_s = G(s)u_s$, $\underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, T(s) \leq \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, G(s)$

$\mathrm{ord}\, T(s) \leq \mathrm{ord}\, G(s) - 1$

∵) $G = \sum_{j \geq 0} s^j G_j$, $\mathrm{ord}\, G_j \leq \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, G(s) - j$, $\mathrm{ord}\, G(s)$

と表わしたとき, 各 G_j に対して

$G_j u_s = {}^{\exists} T_j(s) u_s$, $\underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, T_j(s) \leq \mathrm{ord}\, G_j$

$\mathrm{ord}\, T_j(s) \leq \mathrm{ord}\, G_j - 1$

がいえれば $T(s) = \sum_{j \geq 0} s^j T_j(s)$ とおけば $T(s)$ が求めるものである.

従って $G(s)$ は s を含まぬとしてよい、以下 G とかく.

$m = \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, G(s) (= \mathrm{ord}\, G)$ とおくと

$\sigma_m(G)|_{\Lambda} = 0$ で Λ は good Lagrangean ゆえ

$\sigma_m(G) = \sum_{A_j \in \mathfrak{g}_0} a_j \langle A_j x, y \rangle + a_0 \langle A_0 x, y \rangle$, $d\chi(A_0) = 1$

と表わせる. ここで a_j, a_0 は $(m-1)$ 次 homog. (involutory base ゆえそうとれる.)

$\therefore\ G = \sum A_j(x, D_x) \langle A_j x, D_x \rangle + A_0(x, D_x) \langle A_0 x, D_x \rangle$

$+ \ (m-1$ 階以下$)$

$\therefore\ G u_s = (\underbrace{s A_0(x, D_x)}_{(m-1)\text{階}} + \underbrace{K}_{(m-1)\text{階}}) u_s = T(s) u_s$ とおく

と $\mathrm{ord}\, T(s) \leq m - 1 = \mathrm{ord}\, G - 1$,

$\underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, T(s) \leq m = \mathrm{ord}\, G$ //sublem 1.

sublemma 2. $G(s)u_s \neq 0 \Rightarrow {}^\exists r$ s.t. $G(s)u_s = T(s)u_s$ となる任意の $T(s)$ に対して $\mathrm{ord}\, T(s) \geqq r$.

∵) Λ が good Lagrangean ゆえ そこでは 方程式は module として simple. ∴ $\mathcal{P}G(s)u_s = \mathcal{P}u_s$ ∴ ${}^\exists K(s)$ elliptic s.t. $G(s)u_s = K(s)u_s$. そのとき $G(s)u_s = T(s)u_s$ なる $T(s)$ に対し $\mathrm{ord}\, T(s) \geqq \mathrm{ord}\, K(s)$. 実際 $\mathrm{ord}\, K(s) > \mathrm{ord}\, T(s)$ とすれば $(K(s)-T(s))u_s = 0$, $\sigma(K(s)-T(s)) = \sigma(K(s)) \neq 0$ ゆえ $u_s = 0$ となり矛盾. //sublem 2.

lemma 3 の Proof) sublem 1 をくりかえして $T(s)$ が elliptic にとれればよい. とれないと order を限りなくさげていけるから sublem 2 より $G(s)u_s = 0$ となり仮定に反する. //lem 3.

さて この lem 3 により $Ku_s \overset{\exists}{=} G(s)u_s$, $G(s)$ elliptic $\underline{\mathrm{ord}}\, G(s) \leqq -1$ とでき

$$f u^s = (s^{m_\lambda}P + G(s))u_s$$ を得る.

lemma 4. $\mathrm{ord}\, G(s) \leqq -m_\lambda$

∵) $\mathrm{ord}\, G(s) > -m_\lambda$ とすると $\mathrm{ord}\,(s^{m_\lambda}P + G(s))u_s$

$= \mathrm{ord}\, G(s) + \mathrm{ord}\, u_s = \mathrm{ord}\, f u^s = \mathrm{ord}\, u_s - m_\lambda$

$(\mathrm{ord}\, u_s = -m_\lambda s - \frac{\mu_\lambda}{2})$ ∴ $\mathrm{ord}\, G(s) = -m_\lambda$ 矛盾 //

$\underline{\underline{\text{ord}}}\, G(s) \leq -1$, $\text{ord}\, G(s) \leq -m_\Lambda$ ゆえ $G(s)$ は

sについて $(m_\Lambda - 1)$ 次以下の多項式である.

今 $P(s) = s^{m_\Lambda} P + G(s)$ とおけば

$\mathfrak{f} u_s = P(s) u_s$, $\underline{\underline{\text{ord}}}\, P(s) \leq 0$, $\text{ord}\, P(s) \leq -m_\Lambda$

$$\sigma_{-m_\Lambda}(P(s))|_\Lambda = s^{m_\Lambda} \mathfrak{f}_\Lambda + (s\text{について } m_\Lambda \text{次未満})$$

となる。

さて $\mathfrak{f} u_s = P(s) u_s$ より $\sigma(\mathfrak{f} u_s) = \mathfrak{f}_\Lambda^{s+1} \sqrt{\omega_\Lambda}$

$\|$ mod const.

$\sigma(P(s) u_s) = \sigma_{-m_\Lambda}(P(s)) \mathfrak{f}_\Lambda^{s} \sqrt{\omega_\Lambda}$

$\therefore \sigma_{-m_\Lambda}(P(s))|_\Lambda = \text{const.}\, \mathfrak{f}_\Lambda$

今 $\underline{\sigma_{-m_\Lambda}(P(s))|_\Lambda = b_\Lambda(s) \mathfrak{f}_\Lambda}$ とおけば

$b_\Lambda(s) = s^{m_\Lambda} + (s$の $m_\Lambda - 1$ 次の polyn.$)$

と表わせることがわかった.

lemma 5. $P(s) u_s$ が u_{s+1} の微分方程式をみたして

$\sigma_{-m_\Lambda}(P(\alpha))|_\Lambda = 0$ ならば $P(s) u_s = (s-\alpha) P_1(s) u_s$

$\text{ord}\, P_1(s) \leq -m_\Lambda$, $\underline{\underline{\text{ord}}}\, P_1(s) \leq \underline{\underline{\text{ord}}}\, P(s) - 1$, と表わせる.

Proof) まず いくつかの sublemma を証明する.

sublemma 1. $P(\alpha) u_\alpha = 0$

$\because)$ $\sigma(P(\alpha))|_\Lambda = 0$ ゆえ $\sigma(P(\alpha)) = \sum \varphi_j \langle A_j x, y \rangle$ と

表わせる. $\therefore\ P(\alpha)=\sum \Phi_j(x,D_x)(\langle A_j x, D_x\rangle -\alpha\,\delta\chi(A))+K$

u_αに作用させたら0.　　$\mathrm{ord}\,K \leq \mathrm{ord}\,P(\alpha)-1$

$\therefore\ \mathrm{ord}\,P(\alpha)u_\alpha \leq \mathrm{ord}\,u_\alpha - m_\Lambda - 1$

他方 $P(\alpha)u_\alpha = f u_\alpha \neq 0$ とすれば

$$\mathrm{ord}\,P(\alpha)u_\alpha = \mathrm{ord}(f u_\alpha) = \mathrm{ord}\,u_\alpha - m_\Lambda \quad \text{矛盾}. \ //$$

sublemma 2. 一般に $T(\alpha)u_\alpha = 0$ なら $\exists R(s)$ s.t.

$$T(s)u_s = (s-\alpha)R(s)u_s, \quad \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\,R(s) \leq \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\,T(s)-1$$
$$\mathrm{ord}\,R(s) \leq \mathrm{ord}\,T(s)$$

$\because$) Λ が good Lagrangean ゆえ　　$\delta\chi(A_0)=1$

$$T(\alpha)=\sum_{A_j\in\mathfrak{g}_0}\Phi_j(x,D_x)\langle A_j x, D_x\rangle + M(\langle A_0 x, D_x\rangle - \alpha)$$
$$\mathrm{ord}\,M \leq \mathrm{ord}\,T(\alpha)-1$$

と表わせる. 一般に $T(s)=T(\alpha)+R_1(s)(s-\alpha)$ とかける(多項式の剰余の定理). そのとき $\mathrm{ord}\,R_1(s) \leq \mathrm{ord}\,T(s)$, $\underline{\underline{\mathrm{ord}}}\,R_1(s) \leq \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\,T(s)-1$ が成り立つ. これを u_s に作用させると

$$T(s)u_s = (s-\alpha)R_1(s)u_s + M(s-\alpha)u_s$$
$$= (s-\alpha)(R_1(s)+M)u_s$$

を得るから $R(s)=R_1(s)+M$ とおけばよい. //

この二つの sublemma より lemma 5 が直ちに得られる. //

lemma 6. $P(s)u_s$ が u_{s+1} の微分方程式をみたして

$\sigma_{-m_\lambda}(P(s))$ が $C(s)$ でわれるなら

$P(s)u_s = C(s)P_1(s)u_s$, $\mathrm{ord}\, P_1(s) = -m_\lambda$

$\underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, P_1(s) \leq \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, P(s) - \deg C(s)$

Proof) 帰納法で示す.

$P(s)u_s = (s-\alpha_1)\cdots(s-\alpha_k)P_k(s)u_s$ が示されれば

($k=1$ のときは lemma 5), $P_k(s)u_s$ は u_{s+1} の微分方程式

をみたし, $\sigma(P_k(\alpha_{k+1}))|_\Lambda = 0$ なる lem 5 より

$P_k(s)u_s = (s-\alpha_{k+1})P_{k+1}(s)u_s$ が成り立つ. //lem 6.

さて $\sigma_{-m_\lambda}(P(s))|_\Lambda = b_\lambda(s) f_\Lambda$ ゆえ lem 6 から

$f u_s = P(s)u_s = b_\lambda(s)P_1(s)u_s$ を得る.

ここで $P_1(s)$ は $-m_\lambda$ 階で $\sigma_{-m_\lambda}(P_1(s)) = f_\Lambda$

$\underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, P_1(s) \leq \underline{\underline{\mathrm{ord}}}\, P(s) - m_\lambda = -m_\lambda$.

よって $P_1(s) = \sum_{j\geq 0} s^j Q_j$, $\mathrm{ord}\, Q_j \leq -m_\lambda - j$

と表わせる.

$\therefore P_1(s)u_s = \sum_{j\geq 0} Q_j(x,D)\langle A_0 x, D_x\rangle^j u_s$.

今 $P_\Lambda(x,D) = \sum_{j\geq 0} Q_j(x,D)\langle A_0 x, D_x\rangle^j$ と

おけば $\mathrm{ord}\, P_\lambda \leq -m_\lambda$ で

$$\sigma_{-m_\lambda}(P_\lambda)|_\Lambda \underset{\uparrow}{=} \sigma_{-m_\lambda}(Q_0) = \sigma_{-m_\lambda}(P_1(s)) = f_\lambda$$

Λ 上で $\langle A_0 x, y\rangle = s = 0$ ゆえ.

$\therefore\ f u_s = b_\lambda(s) P_\lambda u_s$, $\mathrm{ord}\, P_\lambda \leq -m_\lambda$, $\sigma_{-m_\lambda}(P_\lambda)|_\lambda = f_\lambda$

Th 2.

(G, V, f) reductive regular P.V.

$f^*(D_x) f^{s+1} = b(s) f^s$ が (G, V) の b-関数

であった.

◎ 原点の conormal bundle $\Lambda = 0 \times V^*$ における $b_\lambda(s)$

を考えると $f^*(y)$ は Λ の gen. pt で $\neq 0$ ゆえ $f^*(D_x)$

は elliptic operator. $\therefore$ 一意性より $b(s) = b_\lambda(s)$.

◎ gen. pt の conormal bundle $\Lambda = V \times \{0\}$ における

$b_\lambda(s) = 1$ である. 実際 $\frac{1}{f}$ は Λ の gen. pt で

elliptic operator である.

☆ Lagrangeans の codim 1 の交わり

Th. $T^*X \supset \Lambda_1 ; \Lambda_2$ Lagrangeans

$S = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ が $(n-1)$ 次元 ; かつ

$T_p S = T_p\Lambda_1 \cap T_p\Lambda_2$ for $\forall p \in S$

そして $\mathcal{J} u = 0$, $\overline{\mathcal{J}} = J_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ を仮定する.

そのとき ある量子化された接触変換により

$$(x_1 D_1 - \alpha) u = (x_2 D_2 - \beta) u = D_3 u = \cdots = D_n u = 0$$

$$\Lambda_1 = \{ x_1 = x_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0 \}$$

$$\Lambda_2 = \{ x_1 = \xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0 \}$$

$u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ となる.

(証略)

そのとき

$$\sigma_{\Lambda_1}(u) = \xi_1^{-\alpha-1} \xi_2^{-\beta-1} \sqrt{d\xi_1 d\xi_2 dx_3 \cdots dx_n}$$

$$\sigma_{\Lambda_2}(u) = \xi_1^{-\alpha-1} x_2^{\beta} \sqrt{d\xi_1 dx_2 \cdots dx_n}$$

$$e_1 = \mathrm{ord}_{\Lambda_1}(u) = -\alpha-\beta-1$$

$$e_2 = \mathrm{ord}_{\Lambda_2}(u) = -\alpha-\frac{1}{2}$$

であった. (P.16 参照)

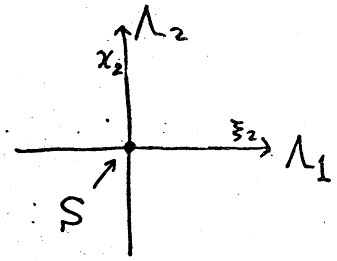
Theorem 1. $e_1 - e_2 - \frac{1}{2} \,(= -\beta - 1) \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$

ならば $\mathcal{M} = \mathcal{P}u$ は Λ_1 にのみ support をもつ quotient $\mathcal{M}_1$

をもつ： $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow 0$; $\operatorname{supp} \mathcal{M}_1 = \Lambda_1$

Proof) $e_1 - e_2 - \frac{1}{2} = -\beta - 1 = \ell \in \mathbb{Z}_+$ とおくと

$$\mathcal{M} \begin{cases} (x_1 D_1 - \alpha) u = 0 \\ (x_2 D_2 + \ell + 1) u = 0 \\ D_3 u = 0 \\ \vdots \\ D_n u = 0 \end{cases}$$



さて $\mathcal{M}_1$ として

$$\mathcal{M}_1 \begin{cases} (x_1 D_1 - \alpha) v = 0 \\ x_2 v = 0 \\ D_3 v = 0 \\ \vdots \\ D_n v = 0 \end{cases}$$

をとると $x_2 \neq 0$ なら $v = 0$ となるから $\operatorname{supp} \mathcal{M}_1 = \Lambda_1$ である.

$u' = D_2^{\ell} v$ は $(x_2 D_2 + \ell + 1) D_2^{\ell} v = D_2^{\ell+1} x_2 v = 0$ ゆえ

$\mathcal{M}$ の方程式をみたすから
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 \\ \Psi & & \Psi \\ u & \longmapsto & D_2^{\ell} v \end{array}$$
なる map が

ある.

Λ_1 の gen. pt で D_2 は elliptic ゆえ onto map である. //

Cor. $e_1-e_2-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}_+$ ならば $\mathcal{M}=\mathcal{P}u$ は Λ_2 にのみ support をもつ submodule $(\neq 0)$ をもつ.

$\because$ $\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}_1\longrightarrow 0$ の kernel を $\mathcal{M}_2$ とおくと

$(0\to\mathcal{M}_2\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}_1\to 0)$ $\mathcal{M}_2$ は Λ_2 にのみ support をもつ submodule である. //

Th において

$$0\longrightarrow \underset{=\mathcal{M}_2}{\mathcal{P}(x_2^{l+1}u)}\longrightarrow \underset{=\mathcal{M}}{\mathcal{P}u}\longrightarrow \underset{=\mathcal{M}_1}{\mathcal{P}v}\longrightarrow 0$$

$$x_2^{l+1}u\longmapsto x_2^{l+1}u\longmapsto x_2^{l+1}D_2^{l}v=\ast\, x_2v=0$$

Λ_2 では x_2 は elliptic ゆえ $\mathcal{M}_2=\mathcal{M}$

一方 $D_2(x_2^{l+1}u)=x_2^{l}(x_2D_2+l+1)u=0$ で

Λ_1 では D_2 は可逆 (elliptic) ゆえ $(x_2^{l+1}u)=0$

i.e. Λ_1 では $\mathcal{M}_2=0$.

Theorem 2. $\mathcal{M}=\mathcal{P}u$ が Λ_1 に support をもつ non-trivial quotient をもてば $e_1-e_2-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}_+$

(Th 1 の逆)

$\sigma_{\Lambda_1}(u)$ は $\Lambda_1\cap\Lambda_2$ で $(e_1-e_2-\frac{1}{2})$ 次の order

(証明は P. 参照)

Theorem 3.

(Λ') $-m's-\frac{\mu'}{2}$ $\qquad$ Λ, Λ' good Lagrangean

$(m \geqq m')$ $\qquad$ $T_p(\Lambda \cap \Lambda') = T_p\Lambda \cap T_p\Lambda'$

(Λ) $-ms-\frac{\mu}{2}$ $\qquad$ for $\forall p \in \Lambda \cap \Lambda'$

$$\Rightarrow \quad b_{\Lambda}(s) = \left[(m-m')s + \frac{\mu-\mu'+1}{2}\right]^{m-m'} \cdot b_{\Lambda'}(s)$$

Proof) $m \geqq m'$ のとき まず $b_{\Lambda'}(s) \mid b_{\Lambda}(s)$ を示そう。
そのためには $(s-\alpha)^k \mid b_{\Lambda'}(s) \rightarrow (s-\alpha)^k \mid b_{\Lambda}(s)$ をいえば
よい。 まず $k=1$ のとき

lemma 1. $\quad b_{\Lambda'}(\alpha)=0 \rightarrow b_{\Lambda}(\alpha)=0$

∵) $P_{\Lambda'} f u_s = b_{\Lambda'}(s) u_s$ ゆえ $f u_\alpha = 0$ on Λ'

もし $b_{\Lambda}(\alpha) \neq 0$ なら $P_{\Lambda} f u_\alpha = b_{\Lambda}(\alpha) u_\alpha \neq 0$ ゆえ

$f u_\alpha \neq 0$ on Λ. $\quad \therefore$ supp $\mathcal{P}(f u_\alpha) = \Lambda$

- $\mathcal{P} u_\alpha \supset \mathcal{P} f u_\alpha$ は Λ に support をもつ $\mathcal{P}$-module
  $\Leftrightarrow \quad (m-m')\alpha + \frac{\mu-\mu'-1}{2} \in \mathbb{Z}_+$
- $\mathcal{P} u_{\alpha+1} \rightarrow \mathcal{P} f u_\alpha \rightarrow 0$ は Λ に support をもつ quotient
  $u_{\alpha+1} \longmapsto f u_\alpha$
  $\Leftrightarrow \quad -(m-m')(\alpha+1) - \frac{\mu-\mu'+1}{2} \in \mathbb{Z}_+$

$\therefore \; -(m-m')-1 \in \mathbb{Z}_+$ $\qquad$ 矛盾 $\quad$ //

lemma 2. $(s-\alpha)^k \mid b_\Lambda(s)$, $(s-\alpha)^k \mid b_{\Lambda'}(s)$
$\Rightarrow \exists G$ s.t. $f u_s = (s-\alpha)^k G u_s$

sublemma. $G u_\alpha = 0 \Rightarrow \exists T$ s.t. $G u_s = (s-\alpha) T u_s$

$\because$) $G u_\alpha = 0 \longleftrightarrow G = \sum T_j (\langle A_j x, D_x \rangle - \alpha\, \delta\chi(A_j))$
$\therefore G u_s = \sum (s-\alpha)\delta\chi(A_j) T_j u_s$ //

lem 2 の証) 帰納法. $f u_s = (s-\alpha)^{k-1} G u_s = b_\Lambda(s) P_\Lambda u_s$ on Λ
$= b_{\Lambda'}(s) P_{\Lambda'} u_s$ on Λ'

$$\therefore G u_s = \frac{b_\Lambda(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_\Lambda u_s \quad \text{on } \Lambda$$

$$= \frac{b_{\Lambda'}(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_{\Lambda'} u_s \quad \text{on } \Lambda'$$

$\therefore G u_\alpha = 0$ $\therefore$ sublemma より $G u_s = (s-\alpha) G' u_s$
$\therefore f u_s = (s-\alpha)^{k-1} \cdot (s-\alpha) G' u_s$ //

lemma 3. $(s-\alpha)^k \mid b_{\Lambda'}(s)$, $(s-\alpha)^{k-1} \mid b_\Lambda(s)$
$\Rightarrow (s-\alpha)^k \mid b_\Lambda(s)$ (i.e. $b_{\Lambda'}(s) \mid b_\Lambda(s)$)

$\because$) まず lem 2 より $\exists G$ s.t. $f u_s = (s-\alpha)^{k-1} G u_s$

よって $G u_s = \dfrac{b_{\Lambda'}(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_{\Lambda'} u_s$ on Λ' . $\therefore G u_\alpha|_{\Lambda'} = 0$

さて $(s-\alpha)^k \nmid b_\Lambda(s)$ とすれば

$G u_s = \dfrac{b_\Lambda(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_\Lambda u_s$ on Λ ゆえ $G u_\alpha|_\Lambda \neq 0$

よって $\mathcal{P}Gu_\alpha \subset \mathcal{P}u_\alpha$ は Λ に support をもつ submodule ゆえ
$(m-m')\alpha + \frac{\mu-\mu'-1}{2} \in \mathbb{Z}_+$

他方 $\mathcal{P}u_{\alpha+1} \longrightarrow \mathcal{P}Gu_\alpha$ は Λ に support をもつ quotient ゆえ
$u_{\alpha+1} \longmapsto Gu_\alpha$

$-(m-m')(\alpha+1) - \frac{\mu-\mu'+1}{2} \in \mathbb{Z}_+ \quad \therefore -(m-m')-1 \in \mathbb{Z}_+$ 矛盾 //

以上により $e_{\Lambda'}(s) \mid e_\Lambda(s)$ が示された。

さて lemma 2 より たゞちに

lemma 2′ $\quad c(s) \mid e_\Lambda(s), \quad c(s) \mid e_{\Lambda'}(s)$
$\Rightarrow \exists G$ s.t. $fu_s = c(s)Gu_s$

を得るが，$e_{\Lambda'}(s) \mid e_\Lambda(s)$ ゆえ

$\exists G$ s.t. $fu_s = e_{\Lambda'}(s)Gu_s$

ここで $-(m-m')\alpha - \frac{\mu-\mu'+1}{2} = l \in \mathbb{Z}_+$ を仮定すると

$$\mathcal{M}_\alpha \xrightarrow{\exists} \mathcal{N} \longrightarrow 0 \qquad (\operatorname{supp}\mathcal{N} = \Lambda)$$
$$u_\alpha \longmapsto v$$

次に $-(m-m')(\alpha+1) - \frac{\mu-\mu'+1}{2} = l - (m-m') < 0$ を

仮定すると $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ は Λ に spt をもつ quotient がないから

$\mathcal{P}Gv = 0 \qquad \therefore Gv = 0$

$$\mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$
$$\mathcal{P}u_{\alpha+1} \longmapsto \mathcal{P}Gu_\alpha \twoheadrightarrow \mathcal{P}Gv$$
$$u_{\alpha+1} \longmapsto Gu_\alpha$$

$\therefore Gu_\alpha|_\Lambda = 0$ ($\mathcal{M}_\alpha$ と $\mathcal{N}$ は Λ の gen. pt の近傍で同型ゆえ)

さて　$fu_s = b_\lambda(s) P_\lambda u_s$

$\quad\quad \parallel$

$b_{\lambda'}(s) G u_s$

$$\therefore\ G u_s = \frac{b_\lambda(s)}{b_{\lambda'}(s)} P_\lambda u_s$$

そして　$G u_\alpha \big|_\lambda = 0$　より　$(s-\alpha) \,\Big|\, \dfrac{b_\lambda(s)}{b_{\lambda'}(s)}$

結局　$\left.\begin{array}{l} -(m-m')\alpha - \dfrac{\mu-\mu'+1}{2} = l \\ l = 0, 1, \cdots, m-m'-1 \end{array}\right\} \Rightarrow (s-\alpha) \,\Big|\, \dfrac{b_\lambda(s)}{b_{\lambda'}(s)}$

が証明された．　すなわち

$$\prod_{l=0}^{m-m'-1} \left(s + \frac{1}{m-m'}\left(\frac{\mu+\mu'+1}{2} + l\right)\right) b_{\lambda'}(s) \,\Big|\, b_\lambda(s)$$

ところが　$b_\lambda(s)$ は m 次，$b_{\lambda'}(s)$ は m' 次　ゆえ

次数を比べて一致することがわかる．

$[\alpha]^m = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$　という記号を使えば

$$b_\lambda(s) = b_{\lambda'}(s) \left[(m-m')s + \frac{\mu-\mu'+1}{2}\right]^{m-m'} \quad (\text{mod const.})$$

// Th 3.

Th. $\mathcal{M} = \mathcal{P}u$ m.o.s. かつ symbol ideal が reduced, support $= \Lambda_0 \cup \Lambda_1$

1) (交わりの近傍で) Λ_0 は non-singular

2) $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$ $(n-1)$ 次元

3) $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \subset W^{n+1}$ non-singular

$\Rightarrow$ quantized contact transformation で 次の形に変換される。

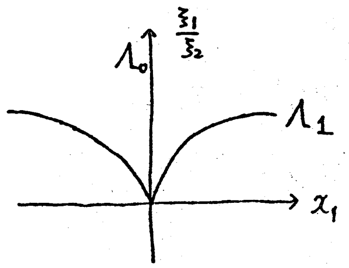
$$\left(\frac{1}{n+m} x_1 D_1 + \frac{1}{m} x_2 D_2 - \lambda\right) u = 0$$

$$\left[x_1 (D_1^m - x_1^n D_2^m) + \mu D_1^{m-1}\right] u = 0$$

$$D_3 u = \cdots = 0$$

$$\Lambda_0 = \{ x_1 = x_2 = \xi_3 = \xi_4 = \cdots = 0 \}$$

$$\Lambda_1 = \left\{ x_2 + \frac{m}{n+m} x_1 \frac{\xi_1}{\xi_2} = 0,\ \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^m = x_1^n,\ \xi_3 = \cdots = 0 \right\}$$



$$\begin{cases} m = 1 \longrightarrow & \text{どんな}n\text{でも同型ゆえ } n = 1 \text{ と解釈} \\ m \geq 2 \\ n \geq 1 & (m, n) = 1 \end{cases}$$

n, m の求め方 を考えよう.

symbol ideal を J とすると

$$J = \left(\frac{1}{n+m} x_1 \xi_1 + \frac{1}{m} x_2 \xi_2 \,,\; x_1(\xi_1^m - x_1^n \xi_2^m),\; \xi_3, \xi_4, \cdots \right)$$

$$J \ni f = \varphi_1\left(\frac{1}{n+m} x_1 \xi_1 + \frac{1}{m} x_2 \xi_2 \right) + \varphi_2\, x_1(\xi_1^m - x_1^n \xi_2^m) + \varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4 + \cdots$$

$f|_{\Lambda_0} = 0$ ゆえ H_f を Λ_0 上の vector field と考えることができる.

$$H_f = \left(-\frac{\varphi_1}{m+n} \xi_1 + \varphi_2 \xi_1^m \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\varphi_1}{m} \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \cdots \quad \text{on } \Lambda_0$$

さて一般に X mfd, $v = \sum a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ を $p \in X$ で 0 になる p の近傍で def された vector field とすると

$$\begin{array}{cccc} A_v : & T_pX & \longrightarrow & T_pX \\ & \Psi & & \Psi \\ & \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \longmapsto & \displaystyle\sum \frac{\partial a_k}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ & \Psi & & \Psi \\ & w & \longmapsto & [w, v](p) \end{array}$$

と作用する.

さて $S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ として $p \in S$ gen. pt をとると

$T_p\Lambda_0 \supset T_pS$ であるが

$S = \{ x_1 = x_2 = \xi_1 = \xi_3 = \cdots = 0 \}$ ゆえ

$$(H_f)_p \equiv -\frac{\varphi_1(P)}{m}\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} \equiv -\frac{\varphi_1(P)}{m}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j} \mod T_pS$$

$$\therefore \left(H_f - a\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)_p \in T_pS \quad \left(a = -\frac{\varphi_1(P)}{m}\right)$$

ここで $\left(H_f - a\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)_p = 0$ (i.e. $\varphi_3(P) = \cdots = 0$) を仮定すると

$$A_{H_f - a\sum\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}} : T_p\Lambda_0 / T_pS \circlearrowleft$$

↑ 1次元 vector space!

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1} \longmapsto \left(-\varphi_1(P)\left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m}\right) + m\,\xi_1^{m-1}\varphi_2(P)\right)\frac{\partial}{\partial\xi_1}$$

よって $A_{H_f - a\sum\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}} : T_p\Lambda_0/T_pS \circlearrowleft$ の固有値を α とおくとき

1) $m = 1 \Rightarrow \alpha$ は不定

2) $m > 1 \Rightarrow \alpha = ma\left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m}\right)$

i.e. $\frac{\alpha + a}{a} = \frac{m}{m+n}$

a と α は計算可能な量ゆえ m と n が $(m, n) = 1$ という条件より定まる.

特に $\Lambda_0 = \overline{T^*_{G x_0}V} = \overline{G(x_0, y_0)}$;

$\Lambda_1 = \overline{T^*_{G x_1}V} = \overline{G(x_1, y_1)}$,

$S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \overline{G(x_0, y_1)}$

$\{\langle Ax, y\rangle \ A \in \mathfrak{g}\}$ の生成する ideal $= J_{\Lambda_0 \cup \Lambda_1}$ のときを

考えよう、

$f = \langle Ax, y \rangle \quad A \in \mathfrak{g}$ に対し

$H_f = \langle Ax, D_x \rangle - \langle {}^tAy, D_y \rangle$

$A_1 x_0 = 0, \ -{}^tA_1 y_1 = y_1$ なる A_1 で

f をつくると $(H_f)_p = \langle y, D_y \rangle_p$

$\therefore \ a = 1.$

$A_{H_f - \langle y, D_y \rangle} = A_{\langle Ax, D_x \rangle - \langle ({}^tA+1)y, D_y \rangle}$

$= \begin{pmatrix} A & \\ & -({}^tA+1) \end{pmatrix} \quad V \times V^* \longrightarrow V \times V^*$, を $T_p\Lambda_0$ に

制限したものを考える.

$T_p\Lambda_0 / T_pS = V^*_{x_0} / \mathfrak{g}_{x_0} y_1 \hookleftarrow -({}^tA_1 + 1)$

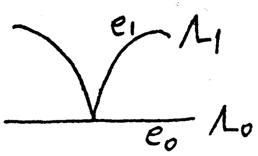
$-{}^tA_1$ の $V^*_{x_0}/\mathfrak{g}_{x_0}y_1$ での固有値を β とすると

$\alpha = \beta - 1, \quad \frac{\alpha + a}{a} = \frac{m}{m+n}$ ゆえ

$\boxed{\beta = \frac{m}{m+n}}$, $(m, n) = 1$ を得る.

β が不定 $\Leftrightarrow m = 1 \Leftrightarrow$ transversal に交わる. //

さて $m \geqq 2$ のとき，b-関数を決定しよう。



$$\mathrm{ord}_{\Lambda_0} u = e_0, \quad \mathrm{ord}_{\Lambda_1} u = e_1$$

次のことが知られている.

Theorem. 1) $\sigma_{\Lambda_0}(u)$ は $S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ で $\left(\frac{(n+m)(e_0-e_1)}{n+1} - \frac{m}{2}\right)$ 位の zero

2) Λ_0 に support をもつ submodule がある

$$\Leftrightarrow \frac{(n+m)(e_1-e_0)}{n+1} - \frac{m}{2} = l \in \mathbb{Z}_+$$

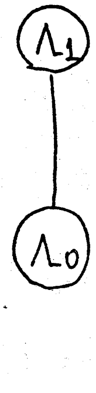
かつ $l \equiv 0, 1, \cdots, n \mod (n+m)$

3) Λ_0 に support をもつ quotient がある

$$\Leftrightarrow \frac{(n+m)(e_0-e_1)}{n+1} - \frac{m}{2} = l \in \mathbb{Z}_+$$

かつ $l \equiv 0, 1, \cdots, n \mod (n+m)$

（証略）



Λ_1: $-m_1 s - \frac{\mu_1}{2}$

$$\sigma(u) = f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$$

Λ_0: $-m_0 s - \frac{\mu_0}{2}$

$$\begin{cases} -\delta\chi = a_1 \delta\rho_1 + \cdots \\ \mathrm{tr}_{V_{x_0}^*} = c_1 \delta\rho_1 + \cdots \end{cases}$$

$$\Lambda_0 = \overline{G(x_0, y_0)}, \quad \Lambda_1 = \overline{G(x_1, y_1)}$$

$$S = \overline{G(x_0, y_1)}$$

g_1 : $V_{x_0}^*$ の既約 rel inv s.t. $g_1(y_1) = 0$

そのとき $f_\Lambda = g_1^{-a_1} \cdots \quad \omega_\Lambda = g_1^{-2c_1} \cdots$

よって $\sigma_{\Lambda_0}(u)$ の S における zero の order

$$= -a_1 s - c_1 = \frac{n+m}{n+1}\left((m_1 - m_0)s + \frac{\mu_1 - \mu_0}{2}\right) - \frac{m}{2}$$

$\because$ ☆ $\begin{cases} \dfrac{n+m}{n+1} = \dfrac{a_1}{m_0 - m_1} \\ m = 2c_1 - \dfrac{a_1(\mu_0 - \mu_1)}{(m_0 - m_1)} \end{cases}$ なる関係がある。

以下 $m_1 < m_0$ を仮定しよう.

まず $b_{\Lambda_1}(s) \mid b_{\Lambda_0}(s)$ を証明する.

必要な条件を列挙しよう.

⊙ $\mathcal{M}_s = \mathcal{P} f^s$ が Λ_0 に support をもつ quotient がある

$\Longleftrightarrow -a_1 s - c_1 = l \in \mathbb{Z}_+, \quad l \equiv 0, 1, \cdots, n \mod (n+m)$

⊙ $\mathcal{M}_s = \mathcal{P} f^s$ が Λ_0 に support をもつ submodule がある

$\Longleftrightarrow a_1 s + c_1 - m = l \in \mathbb{Z}_+, \quad l \equiv 0, 1, \cdots, n \mod (n+m)$

$b_{\Lambda_1}(s) \mid b_{\Lambda_0}(s)$ を示すには

☆ $c(s) \mid b_{\Lambda_j}(s) \quad (j=0,1)$, $\quad c(s)(s-\alpha) \mid b_{\Lambda_1}(s)$

$$\Rightarrow c(s)(s-\alpha) \mid b_{\Lambda_0}(s) \qquad \text{をいえばよい.}$$

そうでないとすれば，前と同様にして

$$f u_s = c(s)\,{}^{\exists}G u_s, \quad f u_s = b_{\Lambda_1}(s) P_{\Lambda_1} u_s$$

$$G u_s = \frac{b_{\Lambda_1}(s)}{c(s)} P_{\Lambda_1} u_s, \quad G u_s = \frac{b_{\Lambda_0}(s)}{c(s)} P_{\Lambda_0} u_s$$

$$\Rightarrow G u_\alpha|_{\Lambda_1} = 0, \quad G u_\alpha|_{\Lambda_0} \neq 0$$

$\mathcal{P} u_\alpha \supset \mathcal{P} G u_\alpha$, $\operatorname{spt} \mathcal{P} G u_\alpha = \Lambda_0$ $\quad\therefore\ a_1\alpha + c_1 - m \in \mathbb{Z}_+$

他方 $\mathcal{P} u_{\alpha+1} \twoheadrightarrow \mathcal{P} G u_\alpha$, $\underbrace{\text{quotient}}_{\Lambda_0 \text{に spt をもつ}}$ が存在．$\therefore\ -a_1(\alpha+1) - c_1 \in \mathbb{Z}_+$

$\therefore\ -a_1 - m \in \mathbb{Z}_+$ 矛盾． //

↑ 前頁☆と仮定 $m_1 < m_0$ より $a_1 > 0$ に注意！

さて $\quad -a_1\alpha - c_1 = l \in \mathbb{Z}_+$, $\quad l \equiv 0, 1, \dots, n \mod (n+m)$

とすると
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_\alpha & \longrightarrow & {}^{\exists}\mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ u_\alpha & \longmapsto & v & & \end{array} \qquad \operatorname{support} \mathcal{N} = \Lambda_0$$

$f u_s = b_{\Lambda_1}(s) G u_s$,

よって
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_{\alpha+1} & \longmapsto & \mathcal{M}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{P} G v \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ u_{\alpha+1} & \longmapsto & G u_\alpha & \longmapsto & G v \end{array}$$
をつくると

PGu は $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ の Λ_0 に support をもつ quotient である。

ここで、更に $-a_1(\alpha+1)-c_1=l-a_1$, $l-a_1\notin\mathbb{Z}_+$

or $l-a_1\not\equiv 0,1,\cdots,n \mod(n+m)$

を仮定すれば、

$\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ は Λ_0 に spt をもつ quotient は存在しないから

$Gu=0 \quad \therefore\ Gu_\alpha\big|_{\Lambda_0}=0$ （$\because$ Λ_0 においては $\mathfrak{M}_\alpha$ と $\mathfrak{N}$ は同型 ）

$$fu_s=b_{\Lambda_1}Gu_s=b_{\Lambda_0}(s)P_{\Lambda_0}u_s$$

$$\therefore\ Gu_s=\frac{b_{\Lambda_0}(s)}{b_{\Lambda_1}(s)}P_{\Lambda_0}u_s \quad \text{on } \Lambda_0$$

$$\therefore\ (s-\alpha)\ \Big|\ b_{\Lambda_0}(s)/b_{\Lambda_1}(s)$$

結局

Proposition 1) $-a_1\alpha-c_1=l\in\mathbb{Z}_+$, $l\equiv 0,1,\cdots,n \mod(n+m)$

かつ 2) $l-a_1\notin\mathbb{Z}_+$ or $l-a_1\not\equiv 0,1,\cdots,n \mod(n+m)$

$$\Longrightarrow\ (s-\alpha)\ \Big|\ b_{\Lambda_0}(s)/b_{\Lambda_1}(s)$$

が証明された。

この条件 1), 2) を詳しく調べてみよう。

lemma. $a_1 \equiv 0 \mod (n+m)$

∵) $a_1 \equiv c' \mod (n+m)$, $0 < c' < n+m$ と仮定すると
$c' = \ell_1 + \ell_2$, $0 \leq \ell_1 \leq n$, $1 \leq \ell_2 \leq m-1$ と表わせるが
$\ell_1 \equiv 0, 1, \cdots, n$, $\ell_1 - a_1 \equiv -\ell_2 \not\equiv 0, 1, \cdots, n \mod (n+m)$
ゆえ $\ell = \ell_1 + k(n+m)$, $k \geq 0$ なる勝手な ℓ (kをうごかす) が解になり b-関数の因子が無限ヶになり矛盾 //

このことより 1), 2) の条件は

$$\ell \equiv 0, 1, \cdots, n \mod (n+m), \quad \ell - a_1 \notin \mathbb{Z}_+, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+$$

となる.

$$\therefore \ \ell \equiv 0, 1, \cdots, n, \quad 0 \leq \ell < a_1 = c(n+m)$$

∃c (by lemma)

$$\therefore \ \ell = 0, \cdots, n$$
$$m+n, \cdots, m+2n$$
$$2(m+n), \cdots, 2(m+n)+n$$
$$\cdots$$
$$(c-1)(m+n), \cdots, (c-1)(n+m)+n$$

$$\therefore \ -c(n+m)\alpha - c_1 = k + \nu(m+n)$$

$$k = 0, \cdots, n, \quad \nu = 0, \cdots, c-1$$

$$\therefore \ -\alpha = \frac{k + \nu(n+m) + c_1}{c(n+m)}$$

$$\therefore\ b_{\Lambda_1}(s)\prod_{k=0}^{n}\prod_{\nu=0}^{c-1}\left(s+\frac{k+\nu(n+m)+C_1}{c(n+m)}\right)\Big|\ b_{\Lambda_0}(s)$$

但し $a_1 = c(n+m)$

$$\therefore\ b_{\Lambda_1}(s)\prod_{k=0}^{n}\left[cs+\frac{c_1+k}{n+m}\right]^c\Big|\ b_{\Lambda_0}(s)$$

$$m_1 + c(n+1) = m_1 + m_0 - m_1 = m_0$$

$\because$ P41の☆より $c = \dfrac{m_0 - m_1}{n+1}$

よって両辺の次数が一致するから

$$b_{\Lambda_1}(s)\prod_{k=0}^{n}\left[cs+\frac{c_1+k}{n+m}\right]^c = b_{\Lambda_0}(s) \quad //$$