数理解析研究所講究録
226巻 1975年 114-167

Micro-local Calculus I

京大・数理研　佐藤 幹夫

序

研究集会(1974年7月1日〜4日)での佐藤および柏原の講演はMicro-local Calculus I, IIと題するものでした。

ここにはMicro-local Calculus Iのかわりに佐藤が名古屋大学で行った同じ内容の集中講義(1974年5月27日〜31日)の，神保道夫氏のノートを、またMicro-local Calculus IIのかわりに9月に柏原氏が名古屋大学で行った講義の木村達雄氏によるノートを載せます。

京大・理・大学院　神保 道夫記

5月27日（月）

“超局所解析”　一般論ではなく具体例を通じて話す．
古典解析学に近い考え方
Infinitesimal Calculus … 最も簡単なものに分析し 全体を integrate してつなぎあわせる
この立場にもう一度戻ろう（より徹底して）．　Neo Classic

Maximally overdetermined system of LDEq. (or ΨDEq)
（以下すべて linear とする）

◎ system of LDEq. (ΨDEq.) とは何か．

すべて local に考える．係数はすべて analytic とする．
（必要に応じて real ⟷ complex にうつり合う）
今回は有限階の operator のみ考える．
unknown function は 1コ とする．

$$P_j(x, D)u = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

$$\mathcal{D} \ni P_j(x, D) = \sum_{|\nu| \leq m} a_\nu(x) D^\nu$$

多様体上で定義された operator の germ

$\mathcal{D}$: ring of L.D.Op. (sheaf)
$\nu = (\nu_1, \cdots \nu_n)$
$|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$
$D^\nu = D_1^{\nu_1} \cdots D_n^{\nu_n}$,　$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, D_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$.

（$j = 1, 2, \cdots$ は無限個あってもよいが 実は Hilbert の基底定理が成立ち，有限個でよい）
i.e. $\mathcal{D}$ は Noetherian

$\mathcal{P}$ … micro-local に. (特定の点 だけでなく ∃co-direction についても局所化して考える)

cotangent bundle 上の sheaf.

$$P(x,D) = P^{(m)}(x,D) + P^{(m-1)}(x,D) + \cdots + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vector field}}}{P^{(1)}(x,D)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{函数 or scalar field}}}{P^{(0)}(x,D)}$$

(この書き方は 座標系によっているが, top の部分には intrinsic な意味がある)

$D_j \circ x_i - x_i \circ D_j = \delta_{ij}$ (交換関係)

低階の項を無視すれば 可換となる.

$P^{(m)}(x,\eta)$ … x について analytic, η について 斉次 m 次多項式

principal symbol or 特性多項式

$\mathcal{D} = \bigcup_m \mathcal{D}^{(m)}$ (高さ m 階の operator)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{D}^{(m-1)} \arrow[r] & \mathcal{D}^{(m)} \arrow[r, "\sigma_m"] & \mathcal{O}^{(m)} \arrow[r] & 0 \\ & & P \arrow[r, mapsto] & P^{(m)}(x,\eta) & \end{tikzcd}$$

(可換環.)

($\mathcal{O}^{(m)}$ は η について斉次 m 次多項式, 係数が x の analytic fn. であるものの sheaf)

$$\mathcal{D}^{(m)}/\mathcal{D}^{(m-1)} \simeq \pi_* \mathcal{O}^{(m)}$$

$\eta = (\eta_1, \cdots \eta_n) = \eta_1 dx_1 + \cdots + \eta_n dx_n$ 余接 vector (at some pt.)

X^n : 実 or 複素 n 次元多様体

$(x,\eta) \in T^*X$.

$$\begin{tikzcd} T^*X \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{O}^{(m)} \arrow[d, "\text{direct img.}"] \\ X & \pi_* \mathcal{O}^{(m)} \end{tikzcd}$$

$\pi_* \mathcal{O}^{(m)}$ は x については localize されているが fibre 方向には まだ global.

$\mathscr{D}$ から $\mathscr{P}$ にいくと $\mathcal{O}^{(m)}$ が 十こで 出てくる.

$$(x_0, \eta_0) \in T^*X \qquad f \in \mathcal{O}^{(m)}_{(x_0,\eta_0)} \quad \cdots \quad f(x, c\eta) = c^m f(x, \eta)$$

（$|c|$ は 1 に十分近い）

きちんと言うならば $(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \cdots + \eta_n \frac{\partial}{\partial \eta_n}) f = mf$ をみたすもの といえばよい（Euler identity）.

（今言った概念を抽象化することもできて skew manifold というものを定義できる；時間があればそれにふれる）

もとに戻って. 方程式とは何か？

$A_j(x, D) \in \mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$) を勝手にとって施すと

$$\{\sum_{j=1,2,\cdots} A_j(x,D) P_j(x,D)\} u = 0$$

問題なのは P_j たちでなく それらで張られる左一次結合

$$\mathscr{J} = \{ \sum A_j P_j \ ; \ A_j \in \mathscr{D} \ (\text{resp. } \mathscr{P}) \}$$

である。 $\mathscr{J}$ は left ideal of $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$)

$\mathscr{D}$ は Noether だから $\mathscr{J}$ は有限生成（各germで）

$P_1, P_2, \cdots$ $\mathscr{J}$ の basis

$Q_1, Q_2, \cdots$ なる別の basis をとったとしても同じ答である.

（見掛けは違っても方程式としては equivalent ）

更に

$$\mathcal{M} = \mathscr{D}/\mathscr{J} \quad (\text{resp. } \mathscr{P}/\mathscr{J})$$

なる left module の方が本質的である.

（unknown fn u を fix して考えれば $\mathscr{J}$ を考えても さしつかえない）

$\mathcal{M} = \mathcal{D} \cdot u$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{J} \arrow[r] & \mathcal{D} \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[r, mapsto] & Au & \end{tikzcd}$$

（u は "不定文字" であって
方程式の記述である.
cf. $x^{17} - 1 = 0$ ）

u とは $1 \mapsto 1u$ の行先. (mod $\mathcal{J}$)
$\bar{1} = 1 \bmod \mathcal{J}$ を u の定義とする。

$$\mathcal{J}^{(m)} \underset{\text{Df.}}{=} \mathcal{J} \cap \mathcal{D}^{(m)}$$

system of LDEq. (of unknown u) $\Longleftrightarrow$ coherent left ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$

ΨDEq. $\Longleftrightarrow$ 〃 $\subset \mathcal{P}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^{(m)} \arrow[r, "\sigma_m"] & \mathcal{O}^{(m)} \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{J}^{(m)} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & J^{(m)} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\hat{J} = \bigoplus_{m=0,1,2,\cdots} J^{(m)} \quad \subset \quad \hat{\mathcal{O}} = \bigoplus_{m=0,1,2,\cdots} \mathcal{O}^{(m)}$$ graded ring

coherent 斉次 ideal.

<u>定義</u> $\mathcal{J}$ の元 $\overset{m_1}{P_1}, \cdots, \overset{m_N}{P_N}$ が包合的な basis であるとは,
$\sigma_{m_1}(P_1), \cdots, \sigma_{m_N}(P_N)$
が J の basis になること。

（このとき $P_1, \cdots, P_N$ が $\mathcal{J}$ の basis であることが
すぐに分る）

$\mathcal{J}$ の basis を勝手にとっても J の basis にはならないことに注意。

$$\mathcal{J} \ni Q = A_1P_1 + \cdots + A_NP_N$$

$\mathcal{J}$ が包合的 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{J}^{(m)} \ni Q$ のとき A_1 を $\leq m-m_1$ 階,
$\cdots$ A_N を $\leq m-m_N$ 階
に選べる. （≤ 0 のとき 0 階）

勝手な basis をとったらこうはならない. つまらない例だが

$$\begin{cases} (D_1^2 + D_2)u = 0 \\ D_1 u = 0 \end{cases}$$

（const. がみたす方程式）

を考える。

$$\mathcal{J} = \mathcal{D}(D_1^2 + D_2) + \mathcal{D}D_1 = \mathcal{D}\underline{D_1} + \mathcal{D}\underline{D_2}$$

involutory basis

$Q = A_1D_1 + A_2D_2$ が上のようにとれることは明らか.

$= A_1'(D_1^2 + D_2) + A_2' D_1$ ではうまくいかないことも明らか.

方程式系 $\mathcal{J}$. symbol ideal $\hat{\mathcal{J}} = \oplus \mathcal{J}^{(m)} \subset \hat{\mathcal{O}} = \oplus \mathcal{O}^{(m)}$

T^*X の函数環

<u>定義</u>. 可換環 $\hat{\mathcal{O}}$ の ideal $\hat{\mathcal{J}}$ が決める
零点集合は T^*X の analytic subvariety
を作る.
これを方程式系 $\mathcal{J}$ の特性多様体という.

$\hat{\mathcal{J}}$ の basis $p_1(x,\eta), \cdots, p_N(x,\eta)$

$$V = \{(x,\eta) \in T^*X \,;\, p_1(x,\eta) = \cdots = p_N(x,\eta) = 0\}$$

いいかえると $\mathcal{J}$ の <u>包合的な</u> basis $P_1, \cdots, P_N$ をとって

$$V = \{(x,\eta) \in T^*X \,;\, \sigma_{m_j}(P_j)(x,\eta) = 0 \,,\, j = 1, \cdots, N\}$$

$T^*X^{2n} \supset V$

$\overset{\circ}{V}$ の既約成分は <u>n 次元以上</u>.

独立な方程式が n 個であることを意味する。

$T^*X \ni (x, \eta)$; $\omega = \eta_1 dx_1 + \cdots + \eta_n dx_n$ （$2n$ 変数の 1-form）

これを canonical 1-form という.

$$d\omega = d\eta_1 \wedge dx_1 + \cdots + d\eta_n \wedge dx_n \qquad \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ -1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & & -1 & & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$T^*(T^*X)$ の <u>non degenerate</u> skew symmetric form

（$d\omega$ は T^*X 上に symplectic structure を def するという）

一般に偶数次元の多様体上の closed 2-form で, tangent space 上 non degenerate skew symmetric form を定義するときにこういう.

$$\begin{array}{l} (d\omega)^n \neq 0 \\ \quad \shortparallel \\ n!\, d\eta_n \wedge \cdots \wedge d\eta_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{array}$$

といってもよい.

ω: 斉次正準構造 （乃至 接触構造 $/ P^*X$）

canonical vector field $\eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \cdots + \eta_n \frac{\partial}{\partial \eta_n}$ が定義できる。

（ω によって $T^*(T^*X)$ と $T(T^*X)$ を identify する.）

◎ Poisson 括弧積.　　$\varphi, \psi \in \hat{\mathcal{O}}_{T^*X}$

$$\{\varphi, \psi\} \underset{Df.}{=} \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial\eta_j}\right)$$

これは $d\omega$ による, covector field　$d\varphi, d\psi$ の内積.
$d\varphi$ に対応する vector field は

$$H_\varphi = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_j}\frac{\partial}{\partial\eta_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

これを Hamiltonian vector field とよぶ。

$$\{\varphi, \psi\} = H_\varphi(\psi) = -H_\psi(\varphi)$$

である。

——— ⟨o⟩ ———

characteristic variety のもつ性質は？

一般に $T^*X \supset \hat{V}$　analytic subvariety
定義 ideal $\hat{\mathcal{J}}$ をとる。

<u>定義</u>.

$$\varphi, \psi \in \hat{\mathcal{J}} \Rightarrow \{\varphi, \psi\} \in \hat{\mathcal{J}}$$

が成立つとき, $\hat{V}$ が包合的 subvariety であるという.

<u>定理</u>. characteristic variety は involutory である。
（一般の場合 実は証明は大変である）

（ここで $\hat{\mathcal{J}}$ が 出鱈目でなく, reduced ideal,
つまり $f^m \in \hat{\mathcal{J}}\ \exists m \Rightarrow f \in \hat{\mathcal{J}}$ をみたすことが大事である。
"包合的" という条件は, 勝手な ideal を与えてその巾をとるといつも成立ってしまい 意味がなくなる）

°"simple"のとき　つまり $\mathcal{J}$ の symbol ideal $\hat{\mathcal{J}}$ が reduced というときには　証明が簡単である。
(multiplicity の概念も 定義できるのであるが 述べない)

$\varphi . \psi \in \hat{\mathcal{J}}$; $\varphi = \sigma_m(\overset{\exists}{P})$, $\psi = \sigma_\ell(\overset{\exists}{Q})$

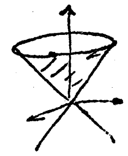
このとき $PQ - QP \in \mathcal{J}$ であるが, このとき symbol は
(top は可換だから 消えて)

$$\sigma_{m+\ell-1}(PQ - QP) = \{\varphi, \psi\} \quad . \qquad \text{QED}$$

接触多様体の
包含的部分多様体 は, どの既約成分も 余次元 n 以下 になる。
(classical result)

◎ isotropic subvariety.

長さ0 の vector を isotropic vector という.
(indefinite だったら たくさんある.　) right cone



indefinite metric をもつ Riemannian mfd
~~⟺~~ が totally isotropic
⟺ submfd の tangent space が 長さ0.

定義. $\hat{V} \hookrightarrow T^*X$ が isotropic

$$\underset{\text{Df.}}{\Longleftrightarrow} \quad \iota^*\omega = 0$$

(ω は T^*X の canonical 1-form)

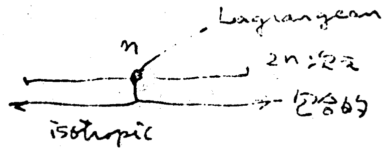
isotropic subvariety のどの既約成分も 高さ n 次元 となることがいえる。
(今度は あまり 次元が 上がれない)

定義

Lagrangean subvariety とは，包合的 純 n 次元 のもの.

= isotropic かつ 純 n 次元

= 包合的 & isotropic



はじめに戻って 定義を述べると，

定義 characteristic variety が Lagrangean である ような system を Maximally overdetermined system とよぶ.

例 & Exercise 1

$n = 1.$ $\quad (x\frac{d}{dx} - s)u = 0$

$u = c \cdot x^s$

函数としてとらえるには 解釈が必要である.

$x_+^s \qquad (x+i0)^s$

$(-x)_+^s \qquad (x-i0)^s$

（実際 超函数としては 2つの独立解がでる）

$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 二次形式

$u = c \cdot f(x)^s$ （ formalに symbolicalに 考え これが満足する <u>方程式の方</u> を考える.）

$$\begin{cases} (x_1D_1 + \cdots + x_nD_n \ \text{[illegible]} - 2s)u = 0 \\ (x_jD_i - D_ix_j)u = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$$

$\frac{n(n+1)}{2} + 1$ コ.

$$\mathcal{J} = \mathcal{D}(\underline{x_1 D_1 + \cdots - 2s}) + \sum \mathcal{D}(\underline{x_j D_i - x_i D_j})$$

問 これが実際に involutory basis であることを示せ.
（実は 高々一階の operator のときには
$X_i X_j - X_j X_i$ が X_i たちで かければ よい）

$\hat{\mathcal{J}} \subset \hat{\mathcal{O}}$

$\hat{V}$ は 3つの 既約成分からなる Lagrangean subvar. である. $= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$

$\Lambda_0 = \{(0, \eta)\,;\ \eta$ 任意$\} =$ 0の逆像

$\Lambda_1 = \{(x, \eta)\,;\ f(x) = 0,\ f(\eta) = 0,\ x /\!/ \eta\}$ （ただし $0 /\!/ {}^{\forall}$vector と解釈する）

$\Lambda_2 = \{(x, 0)\,;\ x$ 任意$\} =$ 0-section

$P = P^{(m)} + P^{(m-1)} + \cdots$

$Q = Q^{(l)} + Q^{(l-1)} + \cdots$

$\sigma_{m+l-1}(PQ - QP) = \ ?$

$$PQ = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{P^{(m)}(x, D)\, Q^{(l)}(x, D)} + P^{(m)}(x, D)\, Q^{(l-1)}(x, D) + \cdots + P^{(m-1)}(x, D)\, Q^{(l)}(x, D) + \cdots$$

$\sum a_\nu D^\nu (\sum b_\mu D^\mu) = \cdots$ を計算したい.

$$Dx = xD + 1$$
$$Df(x) = f(x)D + f'(x)$$
$$D^\nu f(x) = f(x)D^\nu + \frac{\nu}{1!} f'(x) D^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} f''(x) D^{\nu-2} + \cdots$$

これを multi-index にしても成立って，

$$D^{\nu}\cdot f(x) = f(x)\,D^{\nu} + \frac{}{1!}$$

$$h(D)\,f(x) = f(x)\,h(D) + \frac{1}{1!}\sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial h}{\partial D_j}(D) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,\frac{\partial^2 h}{\partial D_i \partial D_j}(D) + \cdots$$

$$= \sum \frac{1}{\nu!}\,D_x^{\nu} f(x)\cdot D_D^{\nu}\,h(D)$$

$$\sum_{\nu} a_{\nu}(x)\,D^{\nu}\cdot\sum_{\mu} b_{\mu}(x)\,D^{\mu} = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu}(x)\,b_{\mu}(x)\,D^{\nu+\mu}$$

$$+ \frac{1}{1!}\sum a_{\nu}(x)\Big(\sum \frac{\partial b_{\mu}}{\partial x_j}\nu_j D^{\nu-e_j}\Big)D^{\mu}$$

$\sigma_{m+l-1}(PQ-QP)$ にかかってくるのはこの 才2項だけである．

それは 前半分が

$$\sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

となる．後半分も同様だから　　$\{\varphi, \psi\}$ となる．

5月28日（火）

P^*X，　$\sqrt{-1}S^*X$

◎ $\mathcal{P}$ の説明．（すべて finite order）

$\mathcal{D} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{D}^{(m)}$　　　$\ni \sum_{|\nu|\leq m} a_{\nu}(x)D^{\nu}$　（一点を指定してそこの germ）

$\mathcal{P} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}^{(m)}$

$T^*X - X \ni (x_0, \eta_0)$　$(\eta_0 \neq 0)$

スカラー倍による同値類を $\eta_0\infty$ とかく．

$$\mathcal{P}^{(m)}_{(x_0,\eta_0\infty)} \ni P(x,D) = \sum_{j=-\infty}^{m} P^{(j)}(x,D) = P^{(m)}(x,D) + P^{(m-1)}(x,D) + \cdots$$

$P^{(j)}(x,\eta)$ は (x_0,η_0) の（jに無関係な）ある近傍で定義された analytic function で η 変数について斉次. i.e. $\left(\eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\cdots+\eta_n\frac{\partial}{\partial\eta_n}-j\right)P^{(j)}(x,\eta)=0.$

但し増大度に関する条件があって,

$$\sqrt[|j|]{\frac{1}{|j|!}|p^{(j)}(x,\eta)|}$$ が $|j|\to\infty$ のとき

ある近傍で一様に有界.

これはかなり緩い条件である。

例えば (x_0,η_0) で $\eta_{10}\neq 0$ としたとき,

$\frac{1}{\eta_1}$ はたしかに正則である。

η_1^j は $\forall j\in\mathbb{Z}$ に対し正則である（micro-local に！）

したがって次のような operator も ΨDOp. である：

（$\eta_1\neq 0$ で well defined な）

$$\frac{1}{\eta_1}+\frac{1!}{\eta_1^2}+\frac{2!}{\eta_1^3}+\frac{3!}{\eta_1^4}+\cdots$$ つまり $P(x,D)=D_1^{-1}+1!D_1^{-2}+2!D_1^{-3}+\cdots$

論理的には cohomology や kernel function の言葉で構成されているが, 実際に扱う場合には, micro-local に（つまり各点の近傍で）考えていることを忘れなければこれで十分である。

$$\sqrt{D_1^2+\cdots+D_n^2}$$ $\eta_{01}^2+\cdots+\eta_{0n}^2\neq 0$ なる点の近傍で考える.

$$= D_1\sqrt{1+\frac{D_2^2}{D_1^2}+\cdots+\frac{D_n^2}{D_1^2}}$$ $(1,0,\cdots,0)$ の近傍で well defi

抽象化 のことについても少し話しておく。

contact mfd. $\hat{\omega}$: canonical 1-form ($d\hat{\omega}$ non deg.)

$$\begin{tikzcd} \hat{Y}^{2n} \arrow[d, "GL(1)=\mathbb{C}-\{0\}"'] \\ Y^{2n-1} \end{tikzcd}$$

df
$\longleftrightarrow H_f$
$\{f, g\} = H_f(g) = -H_g(f)$
包合的部分多様体
isotropic
Lagrangean

などを説明した

これらは ${}^{\forall}$contact mfd 上で考えられる。

ところが実は 適当に座標をとると

$$d\hat{\omega} = x_{n+1}dx_1 + \cdots + x_{2n}dx_n$$

とかけることが分り，したがって local には contact mfd は必ず T^*X と同型になることが分る。

$$\hat{\omega} = \eta_1 dx_1 + \cdots + \eta_n dx_n$$
$$= \eta_1\, d\frac{x_1\eta_1 + \cdots + x_n\eta_n}{\eta_1} - x_2\eta_1\, d\frac{\eta_2}{\eta_1} - \cdots - x_n\eta_1\, d\frac{\eta_n}{\eta_1}$$

座標をかえてもよい． 上は一例で Legendre 変換という.

座標変換 … n 変数の任意函数の自由度
接触変換 … $(2n-1)$ 〃 〃
ずっと広い.

$\iota^* \hat{\omega} \neq 0$ $\qquad \iota : \hat{V}^{2n-k} \hookrightarrow \hat{Y}$

なる点においては

involutory mfd は

$$\hat{V}^{2n-k} = \{ (x, \eta) \in \hat{Y} \ ; \ \eta_1 = \cdots = \eta_k = 0 \} \qquad 0 \leq k < n$$

$$\parallel$$

$$\{ (x, \eta) \ ; \ x_1 = 0, \ , \cdots x_k = 0 \}$$

（接触変換により この形なら k=n でも よい）

と (micro-local に) かける.

i.e. $\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{O}} \eta_1 + \cdots + \hat{\mathcal{O}} \cdot \eta_k$

isotropic のときは

$$\hat{V}^k = \{ (x, \eta) \in \hat{Y} \ ; \ \overset{x_1 = \cdots = x_n = 0}{\eta_{k+1} = \cdots = \eta_n = 0} \}$$

k=n (Lagrangean)

$$\hat{V} = \{ (x, \eta) \ ; \ x_1 = 0, \cdots, x_n = 0 \}$$

$\eta_1 = \cdots = \eta_k = 0, \ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0 \quad (0 \leq k < n)$

のようにしても勿論よい.

$\omega|_V(x_0) = 0$ なる点を degenerate pt という.

これは isotropic になる。(従って次元が小さい)

degenerate が ちょうど n次元 (従って Lagrangean) のとき（maximally degenerate）

V の中では 多様体としては non-singular で

あることが知られている (大島).

$\hat{\mathcal{O}} = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}^{(m)}$ $\mathcal{O}^{(m)}$ は η について 斉m次 である 正則函数.

skew manifold.

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{O}} & \hat{Y}^{2n} \arrow[d] \\ \mathcal{O}^{(0)} & Y^{2n-1} \end{tikzcd}$$

$\{\ \}$, $\hat{\omega}$ などが def されている.

$\mathcal{P} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}^{(m)}$ filtration をもつ 非可換な ring の sheaf.

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{(j)} \cdot \mathcal{P}^{(k)} \subset \mathcal{P}^{(j+k)} \\ [\mathcal{P}^{(j)}, \mathcal{P}^{(k)}] \subset \mathcal{P}^{(j+k-1)} \end{cases}$$

とくに $\mathcal{P}^{(0)}$: subring , $\mathcal{P}^{(-1)}$ biideal

$\mathcal{P}^{(0)}/\mathcal{P}^{(-1)}$: commutative

$$\begin{matrix} \mathcal{P}^{(0)}/\mathcal{P}^{(-1)} \\ \wr\wr \\ \mathcal{O}^{(0)} \end{matrix}$$

$\mathcal{P}^{(m)}/\mathcal{P}^{(m-1)} \simeq \mathcal{O}^{(m)}$

$\mathcal{O}^{(j)} \cdot \mathcal{O}^{(k)} \subset \mathcal{O}^{(j+k)}$

この 乗法と compatible であるような canonical な同型.

$$0 \to \mathcal{P}^{(m-1)} \to \mathcal{P}^{(m)} \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{O}^{(m)} \to 0$$

$\mathcal{P}^{(0)}$- homomorphism.

$P \in \mathcal{P}^{(j)}$, $Q \in \mathcal{P}^{(k)}$

$[P, Q] = PQ - QP \in \mathcal{P}^{(j+k-1)}$

このとき

$$\sigma_{j+k-1}(PQ - QP) = \{\sigma_j(P), \sigma_k(Q)\}$$

を仮定する.

更に $\mathcal{O}^{(m)}$ $(x_0, \eta_0 \infty) \in Y^{2n-1}$

$\Downarrow$

$\sigma_m(P)(x_0, \eta_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \exists Q \in \mathcal{P}^{(-m)}, \qquad PQ = QP = 1$$

(i.e. P^{-1} 逆元が存在)

を仮定する　(completion にあたる)
localization

$\mathcal{P}$ が与えられてしかるべき条件をみたせば そこから contact structure が導かれる.

考えたいのは commutation relation

$[D_j, x_k] = \delta_{jk}$

$[x_i, x_j] = [D_i, D_j] = 0$

をみたすように非可換環を拡大したものであるが その際 operator の階数というものをちゃんと定めてやることが重要 (filtration)。

$\mathcal{P}^{(1)} \ni P_1, \cdots, P_n$
$\mathcal{P}^{(0)} \ni Q_1, \cdots Q_n$　なる generator が存在し

$[P_j, P_k] = [Q_j, Q_k] = 0$

$[P_j, Q_k] = \delta_{jk}$

更に $\mathcal{P}^{(m)} \ni \forall F = \Sigma F^{(j)}(Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n)$

とある意味で 函数 とかける。

階数を保つ変換.

（cf. Fourier 変換 $x_j \longmapsto D_j$
$D_j \longmapsto -x_j$
交換関係は保存されるが階数は保存されぬ. non-local）

Legendre tr.

$x_1, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_n$

$$x_1 \longleftrightarrow \frac{x_1\eta_1+\cdots+x_n\eta_n}{\eta_1}$$

$$\vdots$$

$$x_j \longleftrightarrow \eta_j/\eta_1$$

$$\eta_1 \longleftrightarrow \eta_1$$

$$\eta_j \longleftrightarrow -x_j\eta_1$$

これを非可換化した（or 量子化した）もの.

$$x_1 \longleftrightarrow \underbrace{(x_1D_1+\cdots+x_nD_n)D_1^{-1}}_{0階} + \underbrace{\cdots}_{-1階以下} \qquad \eta_1 \neq 0$$

$$x_j \longleftrightarrow \underbrace{D_jD_1^{-1}}_{0階} + \cdots$$

$$D_1 \longleftrightarrow D_1 + \cdots$$

$$D_j \longleftrightarrow -x_jD_1 + \cdots$$

σ をとればもとの可換な部分が出てくる.

skew manifold としての変換をあたえる.

（上では低階の項をつけなくてもちゃんと交換関係が成立つ）

structure theorem for systems of ΨDEq.

$$P_j(x, D)u = 0 \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{J} = \mathcal{P} P_1 + \cdots + \mathcal{P}_0 P_N \\ \sigma \downarrow & \\ & \hat{\mathcal{J}} \subset \hat{\mathcal{O}} \qquad\qquad \hat{V} \subset T^*X \end{array}$$

$\hat{V}$ の 既約成分 $\hat{V}_{1}{}^{2n-k}{}_{\ni (x_0, \eta_0)}$ $\underline{0 \leq k < n.}$

1) non-degenerate pt. である

2) ~~simple~~ $\hat{\mathcal{J}}$ が reduced ideal
（従って $\hat{V}_1$ の定義 ideal）

このとき (x_0, η_0) で 方程式 が simple であるという.

① $\hat{V}_1 = \{(x, \eta)\,;\, \eta_1 = 0, \ldots, \eta_k = 0\}$

② $D_1 u = 0, \ldots, D_k u = 0$. partial de Rham system.
（operator の方 の 変換 だけでよい）

$k = n$ のときは少々違う. （1) が破れる）

即ち

$$P_j(x, D)u = 0, \quad (j = 1, \cdots N)$$

が maximally overdetermined system であるとき.

<u>構造定理</u>

<u>仮定</u> $\mathcal{J}$, $\hat{V}_1 = \hat{\Lambda}_1$

$\hat{\mathcal{J}}_1$ は (x_0, η_0) で reduced.

①（接触幾何の部分）

適当な正準座標系をとれば, micro-local に

$\tilde{\Lambda}_1 = \{ \eta_2 = 0, \cdots, \eta_n = 0, \ x_1 = 0 \}$ …ここでは $\eta_1 \neq 0$ であることに注意.

$\quad \text{or} = \{ x_1 = 0, \cdots, x_n = 0 \}$ とかける。

② (解析の部分)

$$D_2 u = 0, \cdots, D_n u = 0, \quad (\overset{0階}{x_1} - c \cdot D_1^{-1}) u = 0$$

($(x_1 D_1 - \alpha)$ $u = 0$ とかいても同じ)

or

$$(x_1 D_1 - \beta) u = 0, \quad x_2 u = 0, \cdots, x_n u = 0.$$

に変換される。

(第1の書き方 は $u = c \cdot x_1^{\alpha}$ 等に対応する.)

$D_1^{-\alpha} Y(x)$ のようなもの.

$D_1^{-\alpha - \frac{1}{2}} x_1^{-\frac{1}{2}}$

この α は u を fix する限り absolute invariant である ことが示される.

定義. $\cdot -\alpha - \frac{1}{2} = \text{ord}_{\hat{\Lambda}_1} u.$

(第2の形では $-\beta - \frac{n}{2}$)

定理. simple の仮定のもとに,

方程式が同型 $\Longleftrightarrow$ order が一致.

注意

x_1^{α} は $x=0$ のところだけに興味がある.

 $e^{2\pi i \alpha}$ $\quad e^{2\pi i \alpha}$ 自でなく α 自身 invariant.

主定理 1 （S-K-K p.420 Theorem 4.2.2
・p 423 examples ）

$\mathcal{J}$ ： 単一な極大過剰決定系

$\hat{\Lambda}$ Lagrangean.

(1) 次のような $P \in \mathcal{J}^{(1)}$ が存在する:

$$d(\sigma_1(P)) = \omega \quad \text{on } \hat{\Lambda}$$

$$\text{i.e.} \equiv \omega \mod \hat{J}.$$

$\sigma_1(P)$ は $\mod \hat{J}^2$ で unique である。

(2) その P を $P = P^{(1)} + P^{(0)} + \cdots$ とかくとき

$$\mathrm{ord}_{\hat{\Lambda}} u = \left[+ P^{(0)}(x,\eta) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_j \partial \eta_j}(x,\eta) \right] \Big|_{\hat{\Lambda}}$$

が成立する。

$D_2 u = 0, \cdots, D_n u = 0,\ (x_1 D_1 - \alpha) u = 0$ の場合

$P(x.D) = x_1 D_1 - \alpha$ ととればよい。

$\sigma_1(P) = x_1 \eta_1, \qquad d(\sigma_1(P)) = x_1 d\eta_1 + \eta_1 dx_1$

$\hat{J} = \mathrm{ideal}\,(\eta_2, \cdots, \eta_n, x_1)$

(η_1 invertible)

$\hat{\Lambda} = \{(x,\eta)\,;\ \eta_2 = \cdots = \eta_n = 0,\ x_1 = 0\}$

$= \{(0, x_2, \cdots, x_n, \eta_1, 0, \cdots, 0)\}$

$\therefore \quad d(\sigma_1(P)) \equiv \eta_1 dx_1$

$\omega = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 + \cdots \equiv \eta_1 dx_1$

だから $\quad d(\sigma_1(P)) \equiv \omega.$

このとき

$$\text{order}_{\Lambda} u = \left[-\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial \eta_1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial \eta_n}\right) x_1 \eta_1\right]$$

$$= -\alpha - \frac{1}{2}.$$

才2の形のときにはどうなるか check せよ。

$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ $\quad$ $n \geq 3$ としよう。

$f(x)^s = u$

$$\begin{cases} (x_1D_1 + \cdots + x_nD_n - 2s)u = 0 \\ (x_iD_j - x_jD_i)u = 0 \end{cases}$$

$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$

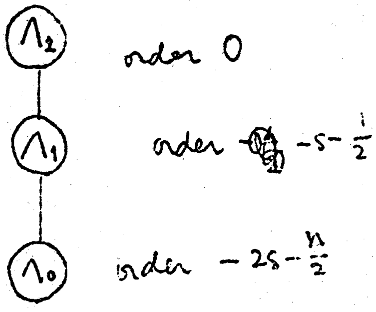
$\Lambda_0 = \{(0, \cdots, 0, \eta_1, \cdots, \eta_n)\}$

$\Lambda_2 = \{(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)\}$

$\Lambda_1 = \{(x, \eta) ; f(x) = f(\eta) = 0, \; x \parallel \eta\}$

$\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = \{0\}$ 次元は無視可能
（codim 1 の交わりのみが問題）

$\Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \{(0, \eta) ; f(\eta) = 0\}$
$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{(x, 0) ; f(x) = 0\}$
$\Big\}$ codim 1.



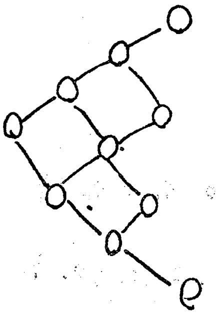
$f(x) = 0$ の singularity の invariant がこれから計算できる。
b-関数

$x = \left(\qquad \right)$ 長方行列

のようなとき $\det {}^t x \cdot x = f(x)$ として $f(x)^s$ の Fourier 変換?

このような Fourier 変換は Zeta 函数などと関係して重要であるが今迄複雑すぎて手につかなかった.

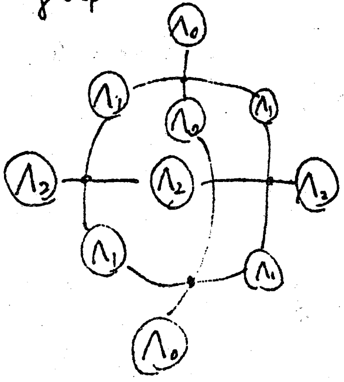
$n=3,\ m \geq 6$

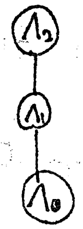


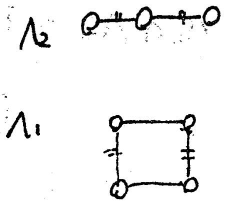
グラフと order を計算することでできてしまう.
(real のときは real locus のつながり具合を調べるので少し複雑になる.)

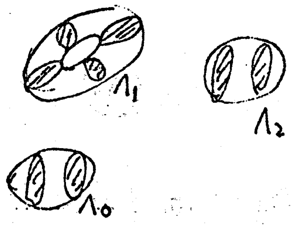
$f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 (- \cdots - x_n^2)\ n \geq 3$
の real graph はどうなるか?

はじめの例の real の図形.







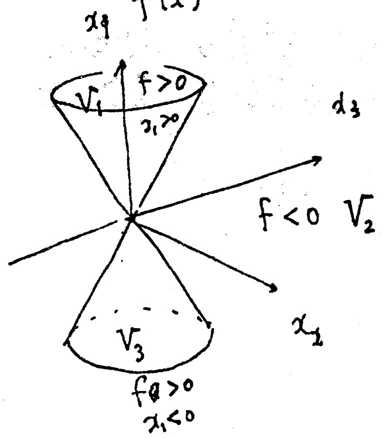


5月29日(水)　談話会 "新古典解析学へのお誘い"

微積分の理念に立ち返って 具体的な 計算問題 のできる 解析学をやりたい.

$f(x) = x_1^2 - \cdots - x_n^2$ 　　$n \geq 3$

$f(x)^s$



光錐

$$F_s^{(j)}(x) = \begin{cases} f(x)^s & x \in V_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathrm{Re}\, s > 0$ で連続. V_j で analytic

殆んどすべての $s \in \mathbb{C}$ について 緩増加な hyperfunction として well defined.

$\Rightarrow$ Fourier 変換がある.

(具体的に計算できる)

$O(1, n-1)$ で不変な多項式

Epstein や Siegel の Zeta 基本解 } などを調べるのに基本的.

積分や評価によって 函数空間的な 定理を証明するのが目的ではなくて 計算ができるようにしたい

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ & \vdots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{-1 \quad \ddots}^{m} & \\ & & -1 \end{pmatrix} = J$$

$$f(X) = \det {}^tX J X$$ nm 変数 2n 次多項式.

大きな不変性をもつ. $SL(m)$, $O(1, n-1)$.

この程度になるともう今迄の方針では計算ができない.

これから述べる方法によってもっと複雑な場合にも統一的なやり方で計算できる.

個々の問題に工夫をこらす必要はなくなる.

(cf. 微積分の基本定理
Cauchy の積分定理)

micro-local analysis

各点と co-direction とを specialize

$$u = c_1 F_s^{(1)} + c_2 F_s^{(2)} + c_3 F_s^{(3)}$$

$$\begin{cases} (x_1 D_1 + \cdots + x_n D_n - 2s) u = 0 & \\ (x_i D_j - x_j D_i) u = 0 & i, j > 1 \\ (x_1 D_j + x_j D_1) u = 0 & j > 1 \end{cases}$$

方程式自身は F の符号や real coeff. であることは必要ないので complex domain で大雑把にやって real にうつって細かい分岐状態を調べる.

特性多様体

$$P_j(x, D) u = 0 \qquad\qquad P_1^{(m_1)}(x, \eta) = 0$$

主表象

$$\begin{cases} x_1\eta_1+\cdots+x_n\eta_n=0 \\ x_i\eta_j-x_j\eta_i=0 \\ x_1\eta_j-x_j\eta_1=0 \end{cases}$$

閉体で考えて符号の区別はやめることにする.

$$\begin{cases} x_1\eta_1+\cdots+x_n\eta_n=0 \\ x_i\eta_j-x_j\eta_i=0 \end{cases}$$

$T^*X \supset \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$

Lagrangean ~~manifold~~ variety

というものになっている.

simple.

$\Lambda_0 = \{(0,\eta)\}$

$\Lambda_1 = \{(x,\eta)\,;\, f(x)=\overset{*}{f}(\eta)=0,\ x \,/\!/\, \eta\} = T_S^*X$ conormal bdle.

$\Lambda_2 = \{(x,0)\}$ = zero section

$T_S^*X = \{x\in S,\ \eta \,/\!/\, \mathrm{grad}\, f(x)\}$

($x=0$ は注意を要する. $x\neq 0$ のときの Zariski closure)

極大過剰決定系

(特性多様体が純 n 次元)

束縛条件が最もきびしい方程式であって

偏微分方程式であるにもかかわらず任意函数を含んでいない.

stratum に分ける:

$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_0$

stratification

$X_1 = X - S$

$X_2 = S - \{0\}$

$X_0 = \{0\}$

各々の conormal bundle.

(の closure)

Λ のつながり具合が問題.　　codim 1_Λ のところが問題 （Λ の交わり）

$\Lambda_0 \cap \Lambda_1$,　$\Lambda_1 \cap \Lambda_2$　　$(n-1)$ 次元.

$\text{order}_{\Lambda_2} u =$

$\text{order}_{\Lambda_1} u = -s-\frac{1}{2}$

$\text{order}_{\Lambda_0} u =$

order なる不変量が定義される.

micro-local には maximally overdetermined system は

$$(*)\begin{cases}(x_1 D_1 - \alpha)u = 0\\ D_2 u = 0\\ \vdots\\ D_n u = 0\end{cases}$$

と言換エれる。

$(x_1=0,\ \eta_2=0, \ldots, \eta_n=0$ で考える$)$

$\text{ord}_\Lambda u \underset{\text{Df.}}{=} -\alpha - \frac{1}{2}$　とする。

Λ_0 において　$P(x, D) = x_1 D_1 + \cdots + x_n D_n - 2s$

$$P(x, D) = P_1 + P_0 + \cdots$$

$$\sigma_1(P) = x_1\eta_1 + \cdots + x_n\eta_n$$

$$d\,\sigma_1(P) = x_1 d\eta_1 + \cdots + \eta_1 dx_1 + \cdots$$

Λ_0 上で考えると　$\equiv \eta_1 dx_1 + \cdots$　　mod $(x_1, \ldots x_n)$ ideal

$$\underline{d\,\sigma_1(P)\big|_{\Lambda_0}} = \omega\big|_{\Lambda_0} \text{ canonical 1-form}$$

Th.　$\text{ord}_\Lambda u = \left[P_0(x,\eta) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \eta_j} P_1(x,\eta)\right]\Big|_\Lambda$

(*) のとき.

$\Lambda = \{(x, \eta)\ ;\ x_1=0, \eta_2=0, \cdots \eta_n=0\} = T^*_{\{x_1=0\}}X$　conormal bdl

$= \{(0, x_2, \cdots x_n, \eta_1, 0, \cdots 0)\}$　　のときには　たしかに

$-\alpha - \frac{1}{2}$ が ord になっている.

$$\mathrm{ord}_{\Lambda_0} u = -2s - \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \eta_j}(x_1\eta_1 + \cdots + x_n\eta_n)$$

$$= -2s - \frac{n}{2}.$$

Λ_2 上では $P=0$ ととればよい.

Λ_1 上

$f(x)=0$ e.g. $x=(1, i, 0 \cdots 0)$

$\mathrm{grad} f \neq 0$

$\frac{f(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} D_1 + \cdots$ なる operator をとればよい.

$$d\left(\frac{f}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\eta_1\right) = \eta_1 dx_1 + \sum_{j\geq 2}^{n} \eta_1 \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} dx_j + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\frac{f}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}} d\left(\frac{\eta}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\right)$$

$\eta \propto \mathrm{grad} f$ だから $\eta_j = \frac{\eta_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \frac{\partial f}{\partial x_j}$

よって

$$= \eta_1 dx_1 + \sum \eta_j dx_j = \omega.$$

$(x_1D_1 + \cdots + x_nD_n - 2s)$ と $(x_1D_j - x_jD_1)$ たちから
この形の operator をもってくればよい.

$\frac{x_j}{x_1}$ をかけて ひくと

$$(x_1D_1 + \cdots + x_nD_n - 2s) - \sum_{j\geq 2} \frac{x_j}{x_1}(x_1D_j - x_jD_1)$$

$$= \left(x_1 + \frac{x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1} D_1 - 2s\right)$$

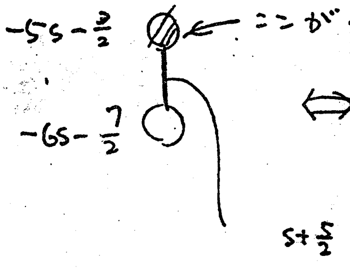
$$\left(\frac{f(x)}{2x_1} D_1 - s\right) u = 0.$$

よって $\mathrm{ord}_{\Lambda_1} u = -s - \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \eta_j}\left(\frac{f(x)}{2x_1}\eta\right)\Big|_{\Lambda_1} = -s - \frac{1}{2}$

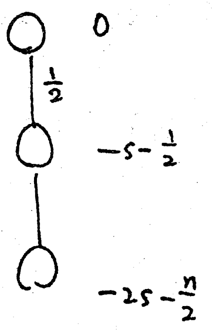
一般には ΨDOp が必要で $D_1^{-1}x_1D_2+\cdots$ などのような物を計算する。
但し Leibniz rule で 掛算と微分を入れかえる。

$$D_1^{-1}x_1 = x_1D_1^{-1} - D_1^{-2} \qquad (\eta_1 \neq 0)$$

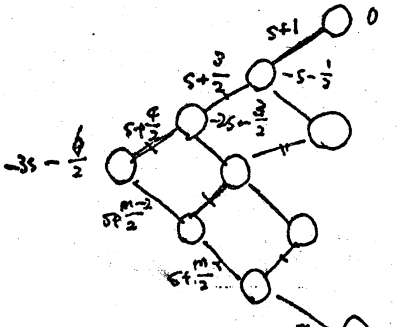
特別なsの値に対しては $\mathfrak{p} \supsetneqq \mathfrak{g}' \supsetneqq \mathfrak{g}$ なる $\mathfrak{g}'$ が生じることがある。 $\mathfrak{p}/\mathfrak{g} \to \mathfrak{p}/\mathfrak{g}' \to 0.$



⇔ orderの差が $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \cdots$ となることが必要十分.



$f(X) = \det {}^tXX$ のときの graph $m \geq 2n$

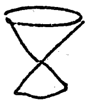


$n=3,\ m \geq 8$

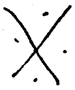
上から下までたどるとき — にもでてくる $s+\cdots$ を全部掛けると $b(s)$ になる.

$$b(s) = (s+1)(s+\tfrac{3}{2})(s+\tfrac{4}{2}) \times \cdots$$

Fourier 変換.



連結成分



~~$n\geq3$~~ .   1, $n-1$ $(n\geq3)$ 3 $(n=2)$ ··· 4.

2   $n-2$ 2

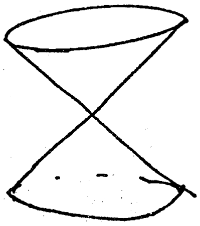
対称行列 の det. $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元.

$(n, 0)$ $(n-1, 1)$, ··· $(0, n)$

$(n+1)$ こ の 連結成分

$f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

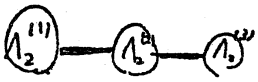
real locus   ?



Λ_2 = zero section

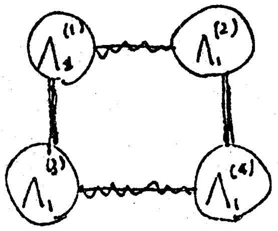
$= \Lambda_2^{(1)} \cup \Lambda_2^{(2)} \cup \Lambda_2^{(3)}$

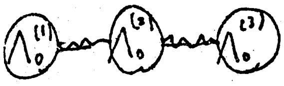
原点でのみつながるので 無視する.



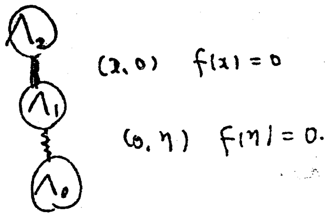
$\Lambda_1 = \{(x, \eta), \cdots \}$

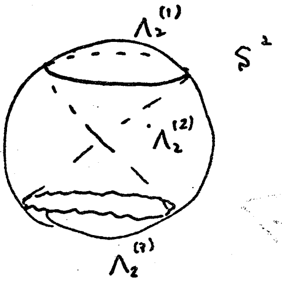
$= \Lambda_1^{(1)} \cup \Lambda_4^{(2)} \cup \Lambda_1^{(3)} \cup \Lambda_1^{(4)}$

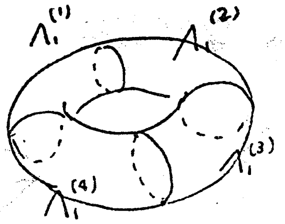


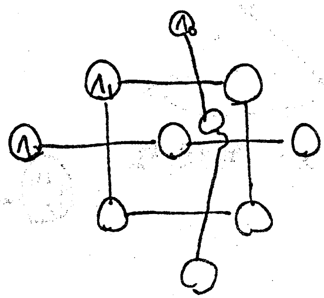


次に $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ を結ぶ — を考える.









この図で $\hat{f}(x)$ の Fourier 変換が決まる.

$$(\hat{F}_s^{(1)}\ \hat{F}_s^{(2)}\ \hat{F}_s^{(3)})$$

$$-(F_s^{(1)}\ F_s^{(2)}\ F_s^{(3)})\begin{pmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix}$$

Unitary 表現

素粒子論　S行列

Landau の singularity

などのことも この立場で できるらしい.

5月30日（木）

主定理 1

Λ 上単一な 極大過剰決定系 $\mathcal{J}$ に対し

1) $\exists P \in \mathcal{J}^{(1)}$

$$d\sigma_1(P) \equiv \omega \quad \mathrm{mod}\ J$$

2) そのような P に対して $P = P_1 + P_0 + \cdots$

$$\mathrm{ord}_\Lambda u = P_0(x,\eta) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j \partial \eta_j}(x,\eta) \Big|_\Lambda$$

contact tr. によって 右辺 が Λ上 不変な表現で あることが 計算によって証明できる。
それが示されれば 構造定理 によって 標準形にしてしまえば 2) が成立つことはすでに check した。

1) で言っていることは

$\exists \zeta \in J^{(1)}$ s.t. $d\zeta = \omega \ \mathrm{mod}\ J$ & $\zeta\ \mathrm{mod}\ J^2$ unique

と同じである。（幾何学の部分）

証明を sketch するが，formal に簡単にできる。

$\hat{\Lambda} = \{x_1 = 0, \cdots, x_n = 0\}$ $\quad \omega = \eta_1 dx_1 + \cdots + \eta_n dx_n$

$\zeta = \eta_1 x_1 + \cdots + \eta_n x_n \in J^{(1)}$

$\therefore d\zeta = \eta_1 dx_1 + \cdots \quad + x_1 d\eta_1 + \cdots$

$\equiv \omega \quad \mathrm{mod}\ J.$

ζ_1, ζ_2 が この条件をみたすと，$\zeta_1 - \zeta_2 \Rightarrow \zeta' \in J^{(1)}$，$d\zeta' \equiv 0\ \mathrm{mod}\ J$

~~$\zeta' = \sum_{j=1}^{n} a_j(\ )dx_j$~~

$J \ni \zeta' = \sum_{j=1}^{n} a_j(x,\eta)\cdot x_j$ とかけるが

$$d\zeta' = \sum a_j dx_j + \sum_{j,k} x_j\Big(\frac{\partial a_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial a_j}{\partial \eta_k} d\eta_k\Big)$$

$$\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ J$$

$\Rightarrow a_j \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ J \quad \Rightarrow \quad \zeta' \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ J^2$

$S^{n-k} \subset X^n$ submfd. この conormal bdle は
$\hat{\Lambda} = T^*_S X$ Lagrangean mfd になる。

$S = \{x_1 = 0, \cdots, x_k = 0\}$ なる local coord. をとる。

$$\Lambda = \{(x, \eta) \in T^*X ;\ x_1 = 0, \cdots, x_k = 0,\ \eta_{k+1} = 0, \cdots \eta_n = 0\}$$

$$= \{(0, \cdots, 0, x_{k+1}, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_k, 0, \cdots, 0) \in T^*X\}$$

この場合には $\zeta = \eta_1 x_1 + \cdots + \eta_k x_k$ ととればよいことが分る。

$$d\zeta = \eta_1 dx_1 + \cdots + \eta_k dx_k + x_1 d\eta_1 + \cdots + x_k d\eta_k$$

$$\equiv \eta_1 dx_1 + \cdots + \eta_k dx_k$$

$$\equiv \omega \qquad \text{mod } J$$

S がこう書けていないときにも使えるように書き直しておこう。

$\hat{\Lambda} = T^*_S X$, codim $S = k$

S の定義 ideal の (local) basis を $f_1(x), \cdots f_k(x)$ とする。

このとき

$$\Phi = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{k}\right\} n$$

($df_1, \cdots df_k$ 独立)

rank $\Phi = k$

$^\exists A$ $(k \times n)$ - 行列. $A\Phi = 1_k$.

$^\exists B$ $B\Phi = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{A} \\ \boxed{B} \end{pmatrix}}_{\uparrow\ \text{non-degenerate}} \begin{pmatrix} \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1_k} \\ 0 \end{pmatrix}$$

B は $(\psi_1, \cdots, \psi_n)\Phi = 0$ の解 vector を並べたもの (独立).

i.e. $B'\Phi = 0 \Rightarrow B' = C \cancel{\Phi} B \ {}^\exists C$.

これより

$$(\Phi A - 1_n)\Phi = 0.$$

$$\therefore \Phi A - 1_n = {}^\exists C \cdot B$$

$$\zeta = \sum_{i,\nu} a_{i\nu}(x) f_i(x) \eta_\nu \qquad A = (a_{i\nu})$$

ととればよい。

$\because$ $d\zeta \equiv \sum a_{i\nu} \eta_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} dx_\mu \quad \mathrm{mod}\ \hat{J}_A$

$\hat{J}$ $f_1(x)=0, \dots, f_k(x)=0,$

$$\hat{\Lambda} = \{(x,\eta) \in T^*X \ ; \quad x \in S \ \& \ \eta \equiv c_1 df_1 + \cdots + c_k df_k\}$$

$$= \sum_{i,\mu} c_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} dx_\mu$$

i.e. $\eta_\nu = \sum_i c_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}$

$\Longleftrightarrow \sum b_{j\nu}(x) \eta_\nu = 0$

$\underline{\hat{J} \ni f_1, \dots, f_k, \ \sum b_{j\nu}(x) \eta_\nu}$

$d\zeta \equiv \omega$ を示したい。

$$\sum_{i,\nu} a_{i\nu}(x) \eta_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \equiv \eta_\mu \quad \mathrm{mod}\ \hat{J}$$

をいえばよい。

i.e. $\sum_\nu \sum_i (a_{i\nu} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} - \delta_{\nu\mu}) \eta_\nu \equiv 0$

ところがこれは $(\Phi A - 1) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = 0$ とかけて、

$\Phi A - 1 = CB$, $B \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = 0$ だったから OK. !

$\mathcal{J} \ni P(x, D) = P_1 + P_0 + \cdots$

$P_1(x,\eta) = \sum_{i,\nu} a_{i\nu}(x) f_i(x) \eta_\nu \quad , \quad \sum \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial \eta_\nu} P_1(x,\eta) = \sum_{i,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (a_{i\nu} f_i)$

$$\equiv \sum a_{i\nu}(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} \quad \mathrm{mod} J.$$

$P(x, D) = \sum_{i,\nu} a_{i\nu}(x) f_i(x) D_\nu + P_0(x, D) + \cdots$

$$\therefore \boxed{\mathrm{ord}_\Lambda u = \quad P_0(x,\eta) - \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, A\Phi \ .}$$

例. $f(x)=x_1^3+x_2^2$, $u=(f(x))^s$ weighted homogeneous poly.

$\mathcal{J}=\{P\in\mathcal{P}\ ;\ Pu=0\}$ a base

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}x_1D_1+\frac{1}{2}x_2D_2-s\right)u=0 & \cdots\ (\text{Euler id.})\\ \left(\frac{1}{2}x_1^2D_2-\frac{1}{3}x_2D_1\right)u=0 & \cdots\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}D_j-\frac{\partial f}{\partial x_j}D_i\right)u=0\end{cases}$$

Λ の 定義方程式 は

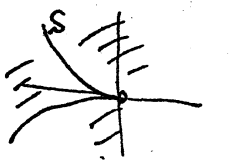
$$\frac{1}{3}x_1\eta_1+\frac{1}{2}x_2\eta_2=0$$

$$\frac{1}{2}x_1^2\eta_2-\frac{1}{3}x_2\eta_1=0$$

$\boxed{\Lambda_2}=X\times\{0\}=T_X^*X$

$\boxed{\Lambda_1}=T_S^*X$

$\boxed{\Lambda_0}=T_{\{0\}}^*X=\{0\}\times\mathbb{C}^2$



stratify

$\Lambda=\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\Lambda_2.$

これ Λ_0, $\Lambda_2\subset\Lambda$ は明らか.

$T_S^*X=\{(x_1,x_2,\eta_1,\eta_2)\ ;\ x_1^3+x_2^2=0$

$\eta\parallel df(x)\ \}$

$\eta_1:\eta_2=\frac{\partial f}{\partial x_1}:\frac{\partial f}{\partial x_2}$

$=3x_1^2:2x_2.$

$\eta_1=s\cdot 3x_1^2$

$\eta_2=s\cdot 2x_2$

$$x_1\left(\frac{1}{2}\eta_2\right)^2+\left(\frac{1}{3}\eta_1\right)^2=0.$$

Λ_j は simple なこともすぐ分る.

$\Lambda_2\cap\Lambda_0=\{0\}$

$\Lambda_1\cap\Lambda_2=\{(x_1,x_2,0,0)\ ;\ f(x)=0\}$

$\Lambda_1\cap\Lambda_0=\{(0,0,\eta_1,\eta_2)\}$

} どちらも 1次元 (codim 1.)

次に order の計算.

$$\begin{tikzcd}
0 & \Lambda_2 \arrow[d, dash, "{\{(x_1,x_2,0,0);\ x_1^3+x_2^2=0\}}"] & \cdots\ \text{zero section.} \\
-s-\frac{1}{2} & \Lambda_1 \arrow[d, dash, "{=\{(x,0,0,\eta_2)\}}"] & \cdots\ T_S^*X \\
-3s-\frac{3}{2} & \Lambda_0 &
\end{tikzcd}$$

いつでも $-s-\frac{1}{2}$.

(non-singular な所で考えるので $f(x)^s$ は x_1^s と思ってよい)

$$\zeta_1 = \frac{f(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\eta_1$$

Λ_0 の計算.

$$P(x,D) = 3\times\left(\frac{1}{3}x_1D_1+\frac{1}{2}x_2D_2-s\right) \qquad D_1^{-1}\ \text{invertible}$$

$$+\ \frac{3}{2}D_1^{-1}D_2\left(\frac{1}{2}x_1^2D_2-\frac{1}{3}x_2D_1\right) \qquad \in \mathcal{J}^{(1)}$$

$$P_1(x,\eta) = 3\left(\frac{1}{3}x_1\eta_1+\frac{1}{2}x_2\eta_2\right)+\frac{3}{2}\eta_1^{-1}\eta_2\left(\frac{1}{2}x_1^2\eta_2-\frac{1}{3}x_2\eta_1\right)$$

$$= x_1\eta_1+\frac{3}{2}x_2\eta_2+\frac{3}{4}x_1^2\eta_1^{-1}\eta_2^2-\frac{1}{2}x_2\eta_2$$

$$= \underbrace{x_1\eta_1+x_2\eta_2}_{} + \underset{\underset{J^2}{\cap}}{\frac{3}{4}x_1^2\eta_2^2\eta_1^{-1}}$$

原点の fibre では

$\zeta = x_1\eta_1+x_2\eta_2$ ととればよかったから たしかに

これでよい。

P_0 を計算する。

$$P = x_1D_1+x_2D_2+\frac{3}{4}\underset{\underset{x_1^2D_1^{-1}+\frac{2x_1}{1!}(-D_1^{-2})\cancel{+}-2D_1^{-3}}{\parallel}}{D_1^{-1}x_1^2}D_2^2-\frac{1}{2}-3s$$

(Leibnitz)

$$= \overbrace{x_1 D_1 + x_2 D_2 + \frac{3}{4} x_1^2 D_1^{-1} D_2^2}^{P_1}$$

$$- \underbrace{\frac{1}{2} - 3s - \frac{3}{4} 2 x_1}_{P_0} D_1^{-2} D_2^2 - \underbrace{\frac{3}{4} \cdot 2 D_1^{-3} D_2^2}_{P_{-1}}.$$

$$\therefore P_0 = -3s - \frac{1}{2}$$

$$F,2 \quad \mathrm{ord}_{\Lambda_0} u = \left\{ -3s - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial \eta_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial \eta_2} \right) (x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + \overset{J^2}{\overset{\downarrow}{\widetilde{\cdots}}}) \right\}$$

$$= -3s - \frac{3}{2}$$

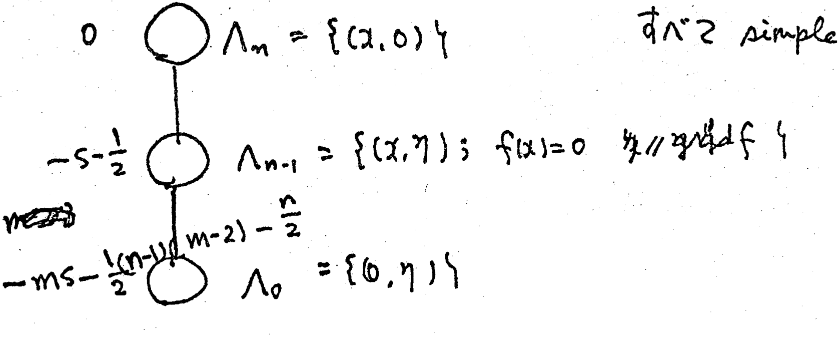
例.

$$f(x) = x_1^m + x_2^2 + \cdots + x_n^2 , \quad m \geq 2, \quad n \geq 3.$$

$\mathfrak{g}$ の basis
$$\begin{cases} X_0 = \frac{1}{m} x_1 D_1 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{n} x_\nu D_\nu - s \\ X_{1\nu} = \frac{1}{2} x_1^{m-1} D_\nu - \frac{1}{m} x_\nu D_1 & \nu = 2, \ldots, n \\ X_{\mu\nu} = x_\mu D_\nu - x_\nu D_\mu & \mu, \nu = 2, \ldots n. \end{cases}$$

$$P(x, D) = m X_0 + \frac{1}{2} m(m-2) D_1^{-1} (D_2 X_{12} + \cdots + D_n X_{1n})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu D_\nu + \frac{1}{4} m(m-2) D_1^{-1} x_1^{m-1} \sum_{\nu=2}^{n} D_\nu^2 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - ms$$



order

0 $\Lambda_n = \{(x, 0)\}$

$-s - \frac{1}{2}$ $\Lambda_{n-1} = \{(x, \eta) ;\ f(x) = 0 \ \ \eta /\!/ \mathrm{grad} f \}$

$-ms - \frac{1}{2}(n-1)(m-2) - \frac{n}{2}$ $\Lambda_0 = \{(0, \eta)\}$

すべて simple になる.

$m \geq 3$ のとき

$\Lambda_{n-1} \cap \Lambda_0 = \{(0, \eta) ; \eta_1 = 0\}$

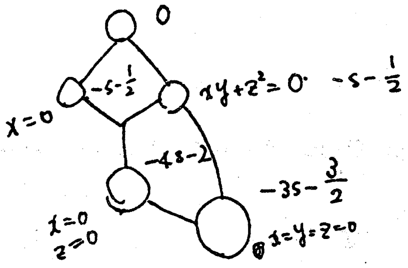
$n = 2$:

$\Lambda_{n-1} \cap \Lambda_0 = \{(0, \eta) ; \eta_1^2 + \eta_2^2 = 0\}$

generic なものほど graph は簡単で multiplicity がふえてくる.
特殊なものは graph は複雑になるが simple になる.

multiple のときはまだあまり研究していない.

$$f(x,y,z) = x^2y + xz^2 = x(xy+z^2)$$

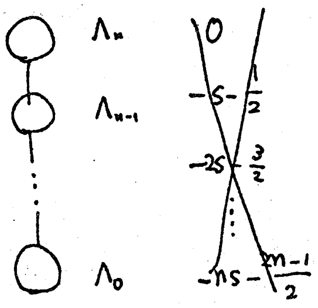


(Yano)

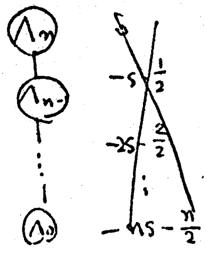
例. $f(x) = \det\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ n^2変数 n次多項式

$$V^{n^2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rank } n \text{ の matrix}}}{V_n} \sqcup V_{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \underset{\substack{\shortparallel \\ \{0\}}}{V_0}$$

$u = Cf(x)^s$

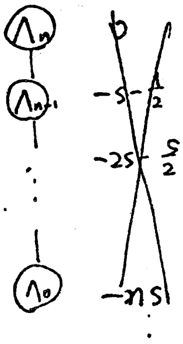


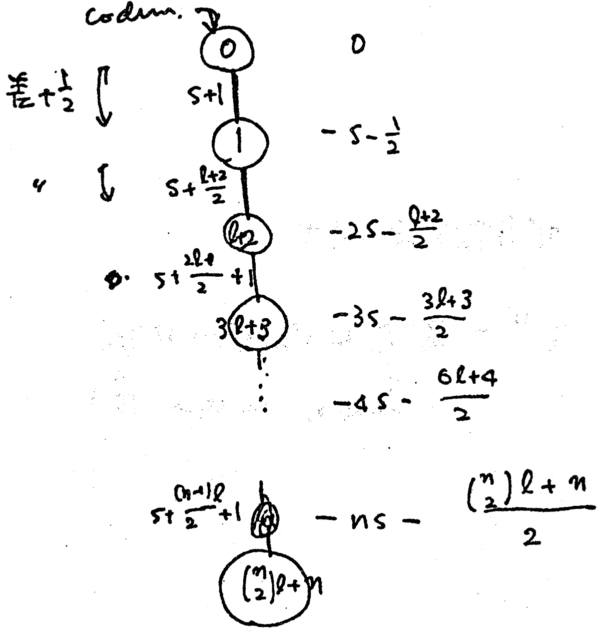
例. $f(x) = \det(n \times n$ 対称行列$)$ $\frac{n(n+1)}{2}$変数 n次式



$\mathrm{Pf}(2n\times 2n$ 歪対称行列$) = f(s) = (\det \quad)^{1/2}$

$n(2n+1)$ 変数　n 次多項式





この type のものの example.

$l=1$ … n 次対称行列

$l=2$ … 正方行列

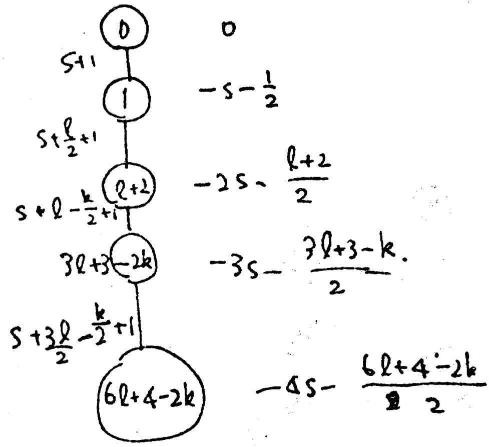
$l=4$ … $2n$ 次歪対称行列の Pf.

$l=8$, $n\leq 3$ … Cayley alg.上の Hermite 行列

このとき　$b(s) = \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(s+\frac{\nu l}{2}+1\right)$　として

"b関数" が計算できる。

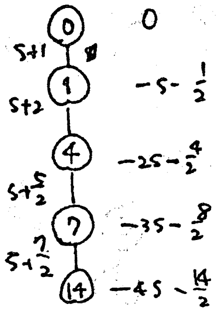
例. codim



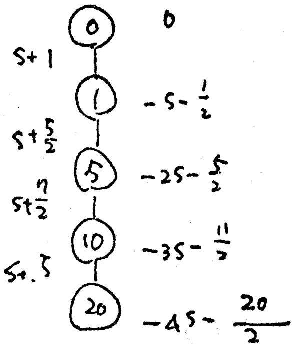
可能なorderは限られてしまう.
(例えばはじめの2つはいつでも
決まってしまうのであった)

$k \neq 0$ の example.

$k = 1$, $l-1=1$ … $Sp(6) \times GL(1)$
の14次元表現.
14次元4次式
の $f(x)$.



$k=1$, $l-1=2$ … $GL(6)$ $\Lambda^3(V(6))$ 20次元
日
4次式 $f(x)$.

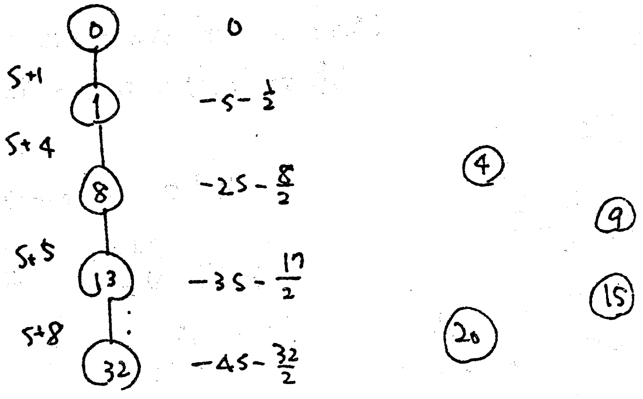


$k=1$, $l-1=4$ $Spin(12) \times GL(1)$ 32次元 4次式
半スピン表現

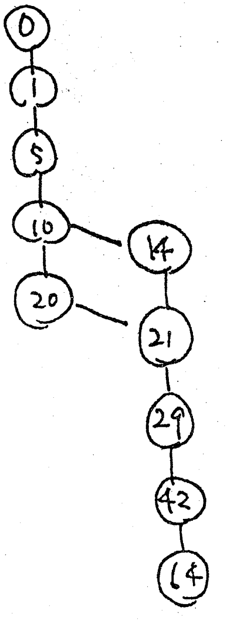
$k=1$, $l-1=8$ $E_7 \times GL(1)$ 56次元表現
56変数 4次式

$k=4$, $l=6$ $Spin(10) \times GL(2)$
32次元 4次式

このときは 孤立した Lagrangean mfd がでてくる.

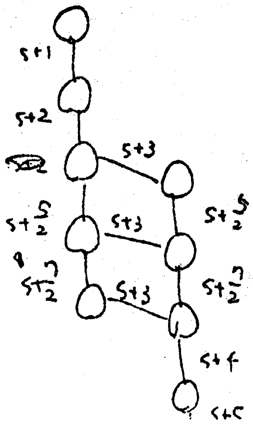


例　Spin(14)　　64次元　8次式



GL(7)

35変数7次式



5月31日(金)

(Fourier 変換のことはまだきちんとやり終えていないので今回は省略)

multiplicity のある場合には order の差を考えるだけでは足りなくなる.

さしあたってはこういう方法論でどこまでできるかという方が重要と思う.

unitary 表現論, 素粒子論: その他まだまだ応用の途があるのではないか.

具体的な函数を支配するのが極大過剰決定系であり方程式を調べれば<u>よい</u> という program の具体化

order にでてくる $\frac{1}{2}$ の説明.

$u = c x_1^{\alpha}$ $\quad (x_1 D_1 - \alpha) u = 0$

$$\Lambda = \{(0, x_2, \cdots, x_n, \eta_1, 0, \cdots, 0)\}$$

$$\mathrm{ord}_{\Lambda} u = -\alpha - \frac{1}{2}$$

$c = \frac{1}{\alpha!}$ ととれば $\quad u_\alpha = \frac{1}{\alpha!} x^{\alpha}$

$u_\alpha = D^{-\nu} u_{\alpha-\nu}$ とかける。

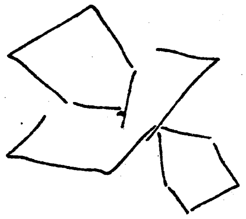
そこで強引に $\nu = \frac{1}{2} + \alpha$ とすると $\quad u_\alpha = D^{-\alpha-\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}}$

Stirling の公式を思い出す. $\quad \frac{1}{\alpha!} \sim \alpha^{-\alpha-\frac{1}{2}} e^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{O}{\alpha} + \frac{O}{\alpha^2} + \cdots\right)$

$\frac{O}{\alpha^n}$ の係数は $\sim n!$

operator としてはこの程度でも収束し, $(1 + \cdots \quad)$ は invertible operator.

codim 1 : の交わりが重要である理由.



dim が小さいとき.

$$\mathcal{P}u = \mathcal{P}/\mathcal{J}, \quad u = 1 \bmod \mathcal{J}$$

$$P_j u = 0$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2, \quad \mathcal{P}/\mathcal{J} = \mathcal{P}/\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{P}/\mathcal{J}_2$$

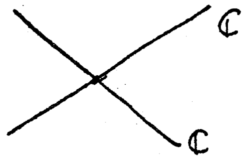
となることが言えている。

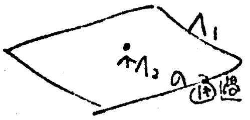
つまり 方程式 としては 別々のものを 並べたにすぎない。

codim 1 のときには 交わり からくる 構造をもつ。

直観的にもむもであって,

$$X = \mathbb{C}, \quad T^*X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \supset \Lambda = \mathbb{C}$$





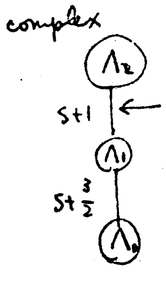
$\pi_1(\mathbb{C} - pt.) \neq 0$

しかし $\mathbb{C}^2 - pt.$
には影響がない.

実は Λ_1 と Λ_2 が 交わるといっても そこでは
$\mathcal{J}$ が あまり小さく ならないことを 確認しなければ
いけない...

グラフと Fourier 変換の関係.

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

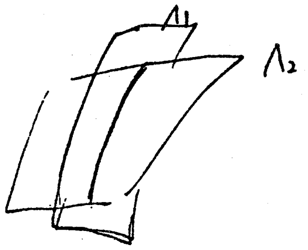


0 $\{(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 0)\}$

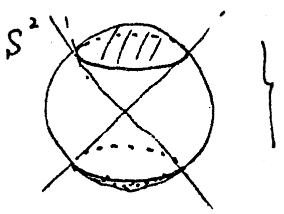
← $\{(x_1 x_2 x_3; 0, 0.0) ; f(x) = 0\}$

$-s-\frac{1}{2}$ $\{(x_1, x_2, x_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3) ; x /\!/ \eta, \; f(x) = 0, \; f(\eta) = 0\}$

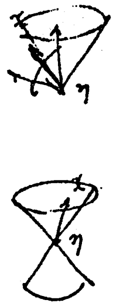
$-2s-\frac{3}{2}$ $\{(0, 0, 0; \xi_1, \xi_2 \xi_3)\}$

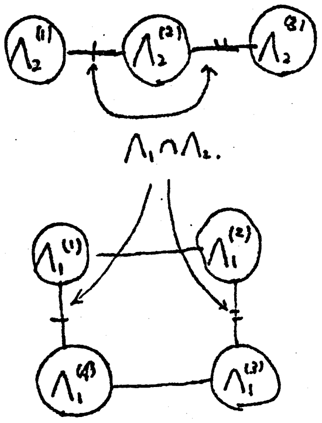


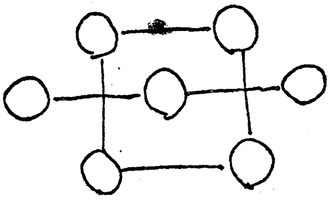
$\Lambda_2 - \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ は complex なら connected.
しかし real だったら codim 1 のものをひくと
components が一般にふえてくる.

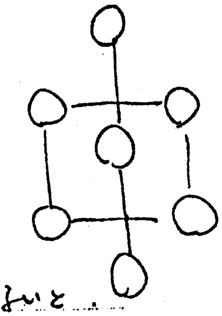


3つの成分









実は"向きづけ"をはっきりさせないと
1の4乗根の ambiguity がでてくる. Maslov index

$$\begin{cases} (x_1 D_1 + x_2 D_2 + x_3 D_3 - 2s)u = 0 \\ (x_1 D_2 + x_2 D_1)u = 0 \\ (x_1 D_3 + x_3 D_1)u = 0 \\ (x_2 D_3 - x_3 D_2)u = 0 \end{cases}$$

real な解を考える. ($\mathcal{P}$ でなく) ⟹ hyperfn とみるのが natural

$F_s^{(1)}$, $F_s^{(2)}$, $F_s^{(3)}$ 緩増加 hyperfn.

$s \neq$ negative integer なら well defined hyperfn.
Fourier 変換を考えたい.

$$F^{(1)}_{-s-\frac{3}{2}}(y), \cdots$$

の一次結合になる. その const. の決定が, 複雑な多項式だと今迄出来なかった.

Fourier 変換して未来方向に support があるとは?

$$SSu \subset \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$

$F^{(j)}_s$ の特徴 … $\underline{SSu \cap \Lambda_2 \subset \Lambda_2^{(j)}}$ なる sol.

このとき const. はあいまいであるが, maximally overdetermined system においては const. も込めて normalize する方法がある.

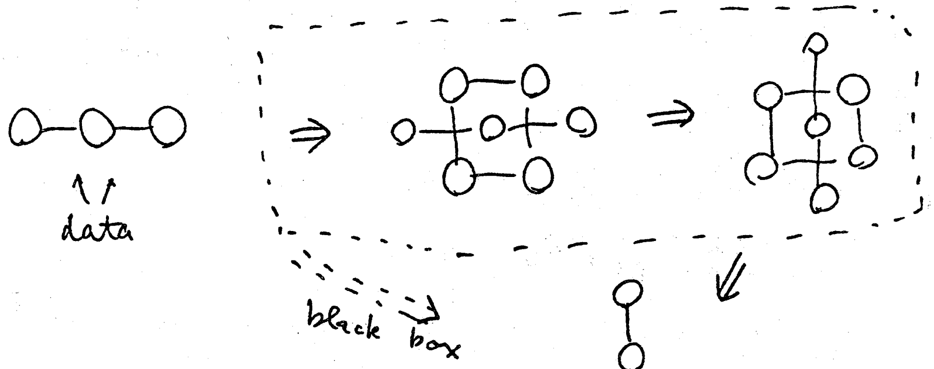
Fourier 変換した方は

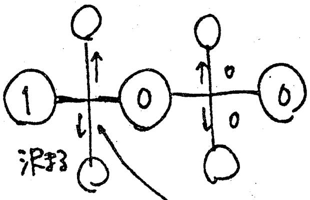
$F^{(j)}_{-s-\frac{3}{2}}$ … $\underline{SSu \cap \Lambda_0 \subset \Lambda_0^{(j)}}$

solution の空間 $\mathcal{S}$ は 3次元 vector space.

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathbb{C}u^{(1)} \oplus \mathbb{C}u^{(2)} \oplus \mathbb{C}u^{(3)} \\ &= \mathbb{C}v^{(1)} \oplus \mathbb{C}v^{(2)} \oplus \mathbb{C}v^{(3)}\end{aligned}$$

basis の決め方は singular spectrum と, もう一つの normalization によって basis の変換の matrix がきっちり決まる.





(generic pt. では 1次元)

交わりの点では sol. の次元は 2次元.

この matrix は

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & \vdots \\ \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

とかける

order の差がでてくる.

一種の波の伝播のようなものである.
Lagrangean mfd の codim 1 の交わりにおける
伝播現象として black box の構造が分る.

途中にでてくるのは microfn.

prehomogeneous vector space の話.

G: 連結複素線型代数群

G V に線型変換として作用. $\supset S$ proper alg. set

$V-S$ が G による homog. space.

G 1) 完全可約表現 とする.

$V \ni x_0$ $G \cdot x_0$: Zariski open dense subset

G_{x_0} : isotropy grp. $G \cdot x_0 = G/G_{x_0} = V - S$

2) G_{x_0} の表現も又 完全可約 とする。

このとき 松島の Th. を使うと $G \cdot x_0$ が affine になる.
いいかえると S は purely 1-codimensional になる.

$$\begin{array}{ccccc} S = & S_1 & \cup \cdots \cup & S_{\ell} \\ & | & & | \\ & f_1 = 0 & & f_{\ell} = 0 \end{array}$$

$f_i(gx) = \chi_i(g) f_i(x)$ となることが分る.

χ_i : 一次指標

$\chi_1, \cdots, \chi_\ell$ が 一次(乗法的)独立 であることが分る。
$f_1, \cdots, f_\ell$ が 代数独立 になることも分る.

また $(\det_V g)^2 = \chi_1(g)^{\varepsilon_1} \cdots \chi_\ell(g)^{\varepsilon_\ell}$ と unique にかける。 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\ell$ は integer > 0.

<u>例</u> $GL(1) \times SO(n) \overset{\text{action}}{\curvearrowright} V(n)$ isotropy $SO(n-1)$.

このとき　$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$　となる。

real form では

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 \qquad . q = n - p$$

$$GL^+(1, \mathbb{R}) \times SO(p, q) \curvearrowright V(n, \mathbb{R})$$

$(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^s$ など.　これに対応するのが Siegel の indefinite な form の Zeta fn.

例4.　$G = GL(n)$.　$\square\square$　$S^2(V(n)) = V(\frac{1}{2}n(n+1))$

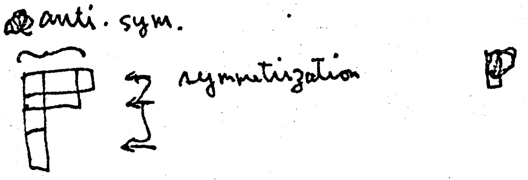
n次対称行列 としての作用.

$$\rho(g)x = g \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} {}^t g$$

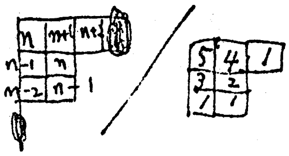
Young diagram については

H. Weyl　第3.4章 & p. 201 ~ 294.

□	$V(n)$	n	□	$V(n)$	n
□□	$S^2(V(n))$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$	$\Lambda^2(V(n))$	$\frac{n(n-1)}{2}$
□□□	$S^3(V(n))$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$	$\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$	$\Lambda^3(V(n))$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$
	⋮			⋮	

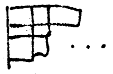
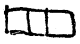
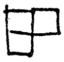


次元.



$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ (n-1)n\ (n-2)(n-1)}{5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \quad 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1.}$$

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+r)}{r \cdot (r-1) \cdots 1} = \frac{n(n+1)\cdots(n+r)}{r!}$$

		multiplicity	$n!$ 
1^2		1	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$
$+$ 2^2		2	$\frac{n(n+1)(n-1)}{3!}$
$+$ 1^2		1	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$
$\parallel$ $3!$			

} 掛けて足すと $= n^3$.

character の公式.

$g \in GL(n)$　　$\mathrm{tr}\, g = \sum a_{ii}$ $\begin{cases} = \sum(\text{固有値}) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n \\ = \det(1-\lambda g) \text{ の } -\lambda \text{ の係数} \end{cases}$

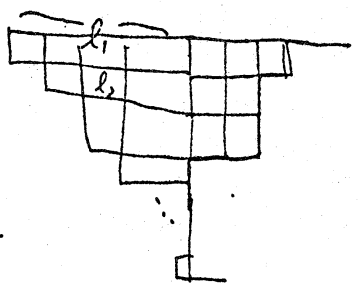
2つの見方.　$\overset{\parallel}{1} - p_1\lambda + \cdots\cdots$

$\chi_{\square}(g) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n$
$= p_1$

このとき

χ  $(g) = \dfrac{\begin{vmatrix} \epsilon_1^{3+n-1} & \epsilon_2^{3+n-1} & \cdots & \epsilon_n^{3+n-1} \\ \epsilon_1^{2+n-1} & \epsilon_2^{2+n-1} & \cdots & \epsilon_n^{2+n-1} \\ & \cdots & & \\ \epsilon_1^{0} & \epsilon_2^{0} & \cdots & \epsilon_n^{0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_n^{n-1} \\ \epsilon_1^{n-2} & \epsilon_2^{n-2} & \cdots & \epsilon_n^{n-1} \\ & \cdots & & \\ \epsilon_1^{0} & \epsilon_2^{0} & \cdots & \epsilon_n^{0} \end{vmatrix}}$

$=$
（第1の見方）



$3+n-1$
$2+n-2$
$2+n-3$
$n-4$
$\vdots$
3
2
1
0

（分子は $= \prod_{i<j}(\epsilon_i - \epsilon_j)$ で、
χ は対称式になる.）

訂正. 左右入れかえ.

$$\chi = \overset{\longleftrightarrow}{\begin{vmatrix} p_{\ell_1} & p_{\ell_1-1} & \cdots & p_{\ell_1-n+1} \\ p_{\ell_2} & & \cdots & p_{\ell_2-n+1} \\ \vdots & & & \\ p_{\ell_n} & & \cdots & p_{\ell_n-n+1} \end{vmatrix}}$$

（オ2の見方）

ただし $p_{-1} = p_{-2} = \cdots = 0$

$p_0 = 1$ と約束する。

$$\chi_{\square} = \overset{\longleftrightarrow}{\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & & p_1 \\ p_{n-2} & \cdot & & 1 & 0 \\ \cdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 & \end{vmatrix}}$$

$n = \ell_1$
$n-2 = \ell_2$
$\vdots$
2
1
0

$= p_1.$

計算に役に立つ公式だから覚えておくとよい。

$G = GL(n)$ $\square$

$V = S^2(V(n))$ $=$ {n次対称行列全体}

$S \underset{\text{def.}}{=} \{ x \in V \ ; \ f(x) \underset{\text{def.}}{=} \det x = 0 \}$

$S_\nu = \{ x \in V \ ; \ \operatorname{rank} x = \nu \}$

$$\underset{\text{Zariski closure}}{\overline{S_\nu}} = \bigsqcup_{\mu=0}^{\nu} S_\mu$$

$$V = \underset{V-S}{\overset{\shortparallel}{S_n}} \sqcup \underbrace{S_{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \underset{\{0\}}{\overset{\shortparallel}{S_0}}}_{S}$$

Gは S_nばかりでなく 各 S_μにも作用して homog. に
なっている. つまり G-orbit decomposition になっている。
G-inv. stratification

Λ_ν …… S_ν の conormal bdle.
(non-singular なところ で つくって
Zariski closure をとる)
closure をとると ふくらんで 皆平等に n次元にな.

$T^*V \fallingdotseq V \times V^*$

$$\mathrm{codim}\, S_\nu = \frac{1}{2}n(n+1) - \dim S_\nu = \frac{1}{2}(n-\nu)(n-\nu+1)$$

∵) $\nu = 1$ のときにやってみよう.

$$\mathrm{rank}\, x = 1 \iff x \simeq \left(a\right)({}^t a)$$

$^\exists a \neq 0$ vector
$O(1)$ だけの ambiguity で
aは unique.

$\dim S_1 = n - 0 = n.$

一般にも $\dim S_\nu = n\nu - \dim O(\nu)$
$= n\nu - \frac{1}{2}\nu(\nu-1)$

isotropy の計算.

$$S_\nu \ni x^{(\nu)} = \begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g \in G_{x^{(\nu)}} \iff g \cdot x^{(\nu)} \cdot {}^t g = x^{(\nu)}$$

$$A \in \mathfrak{g}_{x^{(\nu)}} \iff (1+\epsilon A)\, x^{(\nu)} (1+\epsilon\, {}^t A) - x^{(\nu)} = 0 \mod \epsilon^2$$

$g = 1 + \epsilon A \mod \epsilon^2$ $\qquad$ ∴ $A x^{(\nu)} + x^{(2)}\, {}^t A = 0$

$\iff A x^{(\nu)}$ が skew-symmetric

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$$

が 反対称

$$\Longleftrightarrow \quad {}^tA_1 = -A_1 \quad \& \quad A_3 = 0.$$

$$\therefore \quad \mathfrak{g}_{x^{(\nu)}} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \overset{n-\nu}{\overbrace{A_2}} \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}\}\nu \ ; \ {}^tA_1 = -A_1 \right\}$$

($\dim S_\nu$ の計算もこれでやればよく,

$$\begin{aligned} \dim S_\nu &= \dim G/G_{x^{(\nu)}} \\ &= n^2 - \dim \mathfrak{g}_{x^{(\nu)}} \\ &= n^2 - \left((n-\nu)n + \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) \right) \end{aligned}$$

)

(G, ρ, V) $\quad f$: rel. inv.

$$S_\nu \ni x^{(\nu)} \qquad T_{x^{(\nu)}}S_\nu \hookrightarrow T_{x^{(\nu)}}V \ (= V)$$

$$\Vert \qquad\qquad \overset{\mathfrak{g}\cdot x^{(\nu)}}{\Vert}$$

$$G x^{(\nu)} \qquad V_{x^{(\nu)}} = T_{x^{(\nu)}}V \big/ T_{x^{(\nu)}}S_\nu$$

を normal vector sp. という.

$V^*_{x^{(\nu)}}$ を conormal sp. という.

$$\Vert$$

$$\{ y \in V^* ; \ y \perp \mathfrak{g}\cdot x^{(\nu)} \}$$

$$\Vert$$

$$(\mathfrak{g}x^{(\nu)})^\perp \text{ in } V^*$$

$$\begin{tikzcd}
 & & V^* \\
V\times V^* \supset & \Lambda_\nu \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\supset"] & V^*_{x(\nu)} \arrow[d] \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
V \supset & S_\nu \arrow[r, phantom, "\ni"] & x(\nu)
\end{tikzcd}$$

(fibre が $V^*_{x(\nu)}$)

$G_{x(\nu)}$ は $V^*_{x(\nu)}$ に作用している.
これがまた prehom. と仮定する。
（殆んどの場合に成立つが）

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\chi"] & GL(1) \\
G_{x(\nu)} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ru, bend right] &
\end{tikzcd}$$

$^{\exists} f^*_{x(\nu)}(y)$ rel. inv. $(\longleftrightarrow \chi|_{G_{x(\nu)}})$

$^{\exists} \tilde{f}^*_{x(\nu)}(y) \longleftrightarrow (\det_{V^*_{x(\nu)}})^2$

このとき Λ_ν が simple であることが
証明できて，$(u = f^s$ にすまし$)$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\Lambda_\nu} u &= -(\deg f^*_{x(\nu)})\cdot s - \tfrac{1}{2}(\deg \tilde{f}^*_{x(\nu)} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{codim}\, S_\nu \\ &\qquad \left(\overset{\shortparallel}{\dim V^*_{x(\nu)}}\right)\end{aligned}}$$

とくに $\mathrm{ord} = -(\text{integer})\,s - \dfrac{(\text{integer})}{2}$

であることが分る。

<u>Prove</u>

$\deg f^*_{x(\nu)} = (n-\nu)$

（ $\mathfrak{g}x^{(\nu)} = \left\{\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & 0\end{array}\right)\right\}$ をまず示す.

$\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(x\cdot y)$;

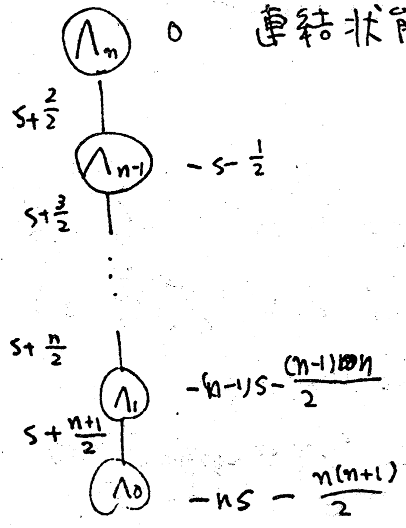
$V^*_{x(\nu)} = (\mathfrak{g}x^{(\nu)})^\perp = \left\{\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & y_{n-\nu}\end{array}\right)\right\}$ ↖ 対称.

$f^*_{x(\nu)} = \det y_{n-\nu}$ となる.）

また. $\deg \tilde{f}^{*} \quad = 2 \times \frac{1}{2}(n-\nu)(n-\nu+1)$

結論として

$$\mathrm{ord}_{\Lambda_\nu} u \doteq -(n-\nu)s - \frac{(n-\nu)(n-\nu+1)}{2}$$



連結状態は左図になって

$$b(s+1) = (s+1)(s+\tfrac{3}{2}) \cdots (s+\tfrac{n+1}{2})$$