数理解析研究所講究録
226巻 1975年 86-95

カタストロフと偏微分方程式

京大 数理研　宇敷重広

非線型偏微分方程式は、その最も簡単な場合においても、滑らかな初期条件に対して、大域的な滑らかな解を持つとは限らない。その場合、超関数解を考えるのは自然である。この時、単なる関数として解を作るには、不連続面や特異点の出現のために困難が生じるのであった。ここでは、立場を変えて、典型的な不連続面の出現の様子を、微分解析(differential analysis)的方法によって把える試みについて述べる。用いる手法は、R.Thomのカタストロフ理論のうちの、static modelと呼ばれるものである。

n個の空間変数に関する、単独の quasi-linear conservation law の Cauchy 問題

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0$$

$$(2) \qquad u(x, 0) = \phi(x)$$

を考えよう。 u は未知関数 $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u=u(x,t)$ $x=(x_1, \cdots, x_n)$ であり, f_i は与えられた関数 $f_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(i=1, \cdots, n)$ で, C^∞ かつ $\frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} \geqq \varepsilon > 0$, また, 初期条件 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ は Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に入っているものとする。

$n=1$ の場合は D. Schaeffer [5] によって, その解の generic な shock の型は分類されている。

この方程式の distribution の意味での解の存在と一意性は, Conway & Smoller [2] に示されている。 我々は ここでは, distribution の意味での weak solution とは, 必ずしも一致しないが, 定性的には同じような大域的振舞いをする (と考えられる) 解について考える。$n=1$ の場合, 両者は一致する。

可測関数 $u=u(x_1, \cdots, x_n, t)$ で, 次の条件 i), ii), iii) を満たすものを, 我々の意味での解と呼ぶことにする。

i) $H=\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ とする。$\Gamma \subset H$ で, Γ は有限個の n 次元正則部分多様体の和集合となっているものが存在して,

$H-\Gamma$ において, u は classical な意味で方程式 (1) をみたす。

ii) u は $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ の近傍で滑らかで, $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 上で, 初期条件 (2) をみたす。

iii) $\forall p \in \Gamma$ に対して、p の Γ の両側からの u の極限がそれぞれ存在して C^∞ であり、かつ、Γ の p における接空間は、ベクトル $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n, \Psi)$ に直交する。ここで

$$\psi_i = \int_{u_1}^{u_2} t \Big(\sum_j a_j'(v) \Big) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x - a(v)t)\, dv,$$

$$\Psi = \int_{u_1}^{u_2} t \Big(\sum_j a_j'(v) \Big) \Big(\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x - a(v)t)\, a_k(v) \Big) dv$$

ここで、$a_j(u) = f_j'(u)$, $a(u) = (a_1(u), \cdots, a_n(u))$

u_1, u_2 は p におけるそれぞれの側の極限を表わす。

$n=1$ のとき、この条件は、よく知られた shock condition

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

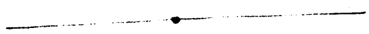
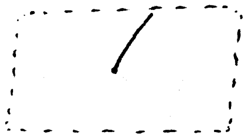
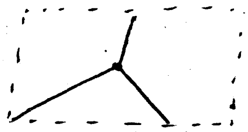
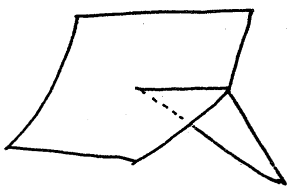
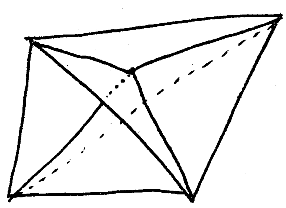
に帰着する。ただし $\gamma : t \longmapsto (\gamma(t), t)$ は shock curve である。したがって、前に述べたように、我々の意味の解は shock の数が有限であることを除いて、distribution の意味の解と一致する。

<u>Theorem</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の部分集合 Ω で次のようなものが存在する。

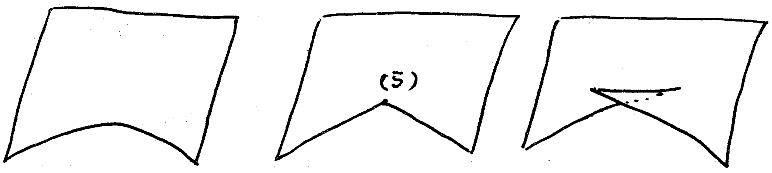
i) Ω は第一類集合である。

ii) 任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) - \Omega$ に対して，ϕ を初期条件とする (1) の我々の意味の解が存在して，その不連続点の集合の閉包 $\overline{\Gamma}$ は層化集合となり，$\overline{\Gamma}$ の各点における構造は次にあげる list のうちのどれかを suspend したものに一致する。

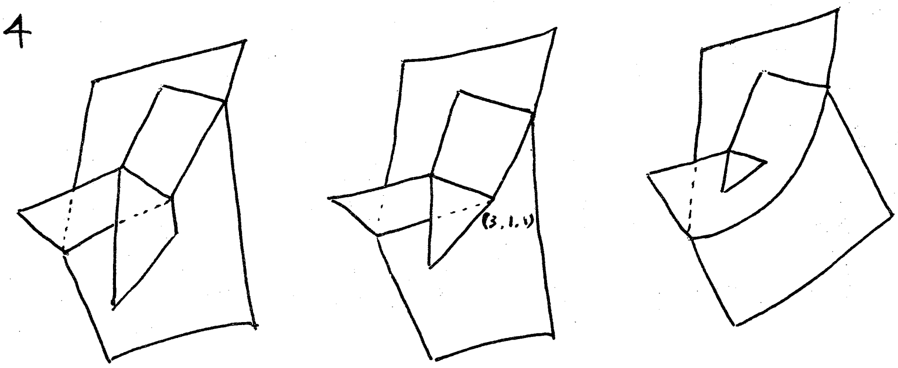
Shock の list （ここでは $n \leq 3$ の場合に出現するもののみを掲げる。$n > 3$ の場合も分類は同じ方法でできる）

type	codimension	transversal model
(1, 1)	1	
(3)	2	
(1, 1, 1)	2	
(3, 1)	3	
(1, 1, 1, 1)	3	

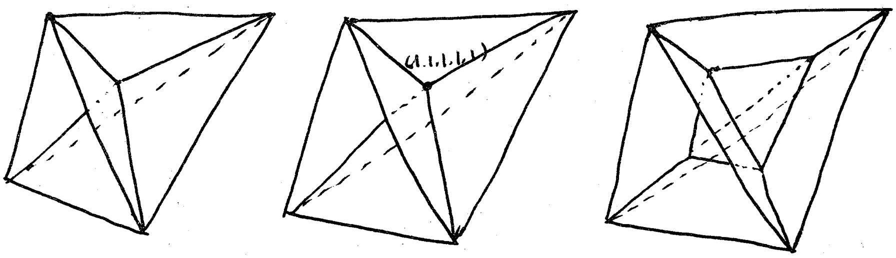
(5)　4



(3, 1, 1)　4



(1, 1, 1, 1, 1) 4.



まず R. Thom のカタストロフ理論を思い出そう。
static model とは、台空間 W から C^∞ 写像の空間への可微分写像 F のことである。

$$F : W \longrightarrow C^\infty(N, M)$$

$C^\infty(N, M)$ はつの C^∞ 多様体 N, M の可微分写像 $f: N \to M$ 全体のなす空間で、C^∞ トポロジーを入れておく。この

空間は，自然にFréchet 多様体の構造をもつ。

$C^\infty(N, M) \ni f, g$ を2つの可微分写像とするとき，微分同相 $h: N \to N$ と $k: M \to M$ が存在して，図式

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ N & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

が可換となるとき，f と g は同じ（微分）位相型をもつと言い $f \sim g$ と書く。これは同値関係となる。

$C^\infty(N, M)$ をこの同値関係で分類することを考える。$M = \mathbb{R}$ のとき，$C^\infty(N, \mathbb{R})$ は，この分類で，それぞれの類をなす部分集合に分割したとき，それらは（無限次元）多様体となり，そのうち codimension のあまり高くないものは，Cerf [1] の意味で，層化構造をもっており，しかも，それらの層のくっつき方が universal unfolding によって記述できるのであった。

初期条件 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，static field (= static model) を次のように定義する。$H = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$，$C_+^\infty(\mathbb{R})$ は C^∞ 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，$u \to \pm\infty$ のとき $f(u) \to +\infty$ となるもののなす $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分集合とする。static field $F: H \longrightarrow C_+^\infty(\mathbb{R})$ は $(x, t) \in H$ に対して，

$$F(x,t)(u) = F(x,t,u)$$
$$= -\int_0^u t\left(\sum_i a_i'(v)\right)\phi(x - a(v)t)\,dv + t\sum_i g_i(u)$$

ここで，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$a(u) = (a_1(u),\cdots,a_n(u))$，

$$a_i(u) = f_i'(u),\quad g_i(u) = u\cdot a_i(u) - f_i(u)$$

である。

(x,t)をとめたとき，関数$F(x,t,\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$は$u\longrightarrow\pm\infty$のとき$f_i$の convexity から$F(x,t,u)\longrightarrow+\infty$となり，$C^\infty$であるから，必ず最小値をもつ。また最小値を与える$u$に対して$\frac{\partial F}{\partial u}(x,t,u) = 0$となる。

$S\subset H\times\mathbb{R}$を

$$S = \{(x,t,u)\in H\times\mathbb{R} \mid \frac{\partial F}{\partial u}(x,t,u) = 0\}$$

と定義すると，Sは$H\times\mathbb{R}$の中の$n+1$次元正則部分多様体となる。

ほとんですべての初期条件$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$に対して

$u(x,t) = F(x,t,\cdot)$を minimize するuの値

としたときuはH上ほとんど到るところ定義され，直接計算することによって，我々の意味での解となることが確かめられる。この解のグラフはSの部分集合となる。

次に Jet の概念を導入して，Hの点を，その解の特異性によって分類することを考える。

kを正の整数とする。uに関するjet写像

$$j_k F : H \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

を

$$j_k F(x,t,u) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x,t,u), \cdots\cdots, \frac{\partial^k F}{\partial u^k}(x,t,u)\right)$$

によって定義する。

$\alpha = (k_1, \cdots, k_m)$ をmulti-indexとしたとき

$$J_\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m-1} \times \prod_{l=1}^{m} \mathbb{R}^{k_l}$$ とおき

$$j_\alpha F : H \times \mathbb{R}^m \longrightarrow J_\alpha(\mathbb{R})$$

を

$$j_\alpha F(x,t,u_1,\cdots\cdots,u_m)$$
$$= (F_1 - F_2, \cdots\cdots, F_{m-1} - F_m, j_{k_1}F_1, \cdots\cdots, j_{k_m}F_m)$$

として定義する。ただし $F_i = F(x,t,u_i)$。 $\dim J_\alpha(\mathbb{R}) = N_\alpha = m-1+|\alpha|$ である。方程式 $j_\alpha F = 0$ はN_α個の方程式系をまとめて書いたものである。

この定義したとき $F(x,t)$ の属する $C_+^\infty(\mathbb{R})$ の層化構造のstrataと，$(x,t,u_1,\cdots,u_m)$ において $j_\alpha F = 0$ となるようなmulti-index α との間に密接な関係があることがわかる。$C_+^\infty(\mathbb{R})$ 層化構造は，ここでは特に，minimizing pointsに関係しているbifurcation strataのみを扱うことにし，$j_\alpha F = 0$ の根としては，$u_1,\cdots,u_m$ の全て異なっており，しかも，$u_1 \cdots, u_m$ は全てminimizing pointになっているもののみを考える，また $j_\alpha F = 0$ と言うとき，常に，長さがαより大なるmultiindex β に対しては，$j_\beta F = 0$ は (x,t) において根をも

たないとする。αに対応する関数，即ち $j_\alpha F=0$ が，根をもつ（上で述べた意味で）関数の $C_+^\infty(\mathbb{R})$ における，（上に述べた意味での）strate の codimension は $|\alpha|-1$ である。ほとんどすべての初期条件 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し，static field F は $C_+^\infty(\mathbb{R})$ の codimension $>n+1$ の strate とは交わらないことが，次の transversality theorem によって保障される。

Theorem　$|\alpha|>n+2$ となる任意の multi-index α が与えられたとき，第一類集合 $\Omega'\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ が存在して，任意の $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)-\Omega$ に対して，$j_\alpha F=0$ となる，$u_1,\cdots,u_m$ がすべて異なる解は存在しない。

次に，これらの static field Fが，ほとんどすべての初期条件 ϕ に対して $C_+^\infty(\mathbb{R})$ の bifurcation strate に transversal に交わることが示せて，$C_+^\infty(\mathbb{R})$ の universal unfolding から，前記の結果を得る。また，これらの shock を出現させるような example を作ることは $n=1$ の場合の解の family を構成することによって簡単にできる。

REFERENCES

[1] J.Cerf, La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudoisotopie, Publ. Math. I.H.E.S. 39 (1970).

[2] E.Conway and J.Smoller, Global solutions of the Cauchy Problem for Quasi-Linear First-Order Equations in Several Space Variables, Communication on Pure and Applied Math. vol XIX, 95-105 (1966).

[3] P.D.Lax, Hyperbolic Systems of Conservation laws II, Communication on Pure and Applied Math. vol X, 537-566 (1957).

[4] J.Mather, Right Equivalence, Warwick Univ. (1973).

[5] D.Schaeffer, A regularity theorem for conservation laws, to appear.

[6] M.Shiota, Transformations of Germs of Differentiable Functions through Changes of Local Coordinates, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ. vol 9, No.1, (1973).

[7] R.Thom, Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin (1972).

[8] R.Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, BAMS (1969)