

常微分方程式における岡村の定理の
確率微分方程式への応用

名工大 清水昭信

名大 岡部靖憲

§1 確率微分方程式

$\sigma_j^i(t, x), \varrho^i(t, x)$ ($t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^n$) を有界な
Borel 可測函数とする。 $(1 \leq i, j \leq n)$ 確率微分方程式とは
次の方程式のことであり;

$$(1) \quad dX_t^i(\omega) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^i(t, X_t(\omega)) d B_t^j(\omega) + \varrho^i(t, X_t(\omega)) dt$$

($1 \leq i \leq n$)

ここで $(B_t^1(\omega), \dots, B_t^n(\omega))$ は n 次元ブラウレ運動であり、
 $X_t(\omega) = (X_t^1(\omega), \dots, X_t^n(\omega))$ が (1) の解である。

我々が考える問題は一意性でありそれは次の
様に述べられる:

問題 $X_t(\omega), Y_t(\omega)$ を (1) の解で、 $X_0(\omega) = Y_0(\omega)$

ならば、 $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$

が成り立つ条件を求めよ。

§2 常微分方程式における岡村の定理

(1) において, $\sigma_j^i = 0$ のとき、即ち、次の常微分方程式

$$(2) \quad dx_t^i = f^i(t, x_t) dt \quad (1 \leq i \leq n)$$

に対して、解の一意的のための条件は、岡村博士は、 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ の中の任意の開集合 D に対して、 $W = \{(t, x, y) : (t, x) \in D, (t, y) \in D\}$ において定義された C^1 クラスの函数 $V(t, x, y)$ が次の条件を満たすことであることはよく知られている：

$$(3) \quad V(t, x, y) \geq 0, \quad V(t, x, x) = 0, \quad V(t, x, y) > 0 \quad x \neq y$$

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f^i(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} f^i(t, y) \leq 0$$

$$(t, x, y) \in W$$

この様な V の存在が十分であることは、初期値が等しい解 x_t, y_t に対して、 $V(t, x_t, y_t)$ を微分すれば (4) より $V(t, x_t, y_t) \downarrow_t$ が従い、(3) より $x_t = y_t$ が成り立つの如く仕掛けは簡単である。我々は、(1) に対して、(3) を満たす函数 V が (4) に代わる条件を採ることを目的とするのであるが、(2) と異なり、(1) の解は一般には t に関して微分不可能 (⊙ ブラウン運動が t について微分不可能) のため、 $V(t, x_t(\omega), y_t(\omega))$ を微分することはできない。しかし、これは合成函数の微分の公式にあたり、

伊藤の公式 という強力なものがある。以下におもしろ
 林に、(2)の解が一意的でなくとも、(1)の解が一意的であること
 があることを注意しておく。

§3. 伊藤の公式

(1)よりもやや一般な次の確率微分方程式 (5)

$$(5) \quad dX_t^i = \sum_{j=1}^r \sigma_j^i(t, X_t) dB_t^j(\omega) + b^i(t, X_t) dt$$

($1 \leq i \leq n$)

を考えた。 r は n より大きいてもよいが、 (B_t^1, \dots, B_t^r) は r -次元
 ブラウン運動である。このとき、伊藤の公式とは、

任意の $C_{t,x}^{1,2}$ -クラスの函数 $f(t, x)$ に対して、

$$df(t, X_t) \left(= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{c=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_c}(t, X_t) dX_c(t) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_i(t) dX_j(t) \right) \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{c=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_c} b^c + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} a^{ij} \right) dt$$

$$+ \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_j^i dB_t^j$$

$$\text{そこで } a^{ij}(t, x) = \sum_{k=1}^r \sigma_k^i(t, x) \sigma_k^j(t, x)$$

上の計算において、symbolicな計算 “ $dB_t^i dt = 0$,

$dB_t^i \cdot dB_t^j = \delta_{ij} dt$, $dt \cdot dt = 0$ ” を使った。この正当性を
 与えることは確率論において重要な大切なことである。

§4 結果

定理 任意の $T > 0, r > 0$ に対して、次の条件をみたす 関数列 $V_{T,r}^m(t, x, y)$ ($m \in \mathbb{N}$) が存在すれば、(1) の解は 唯一とつである ;

(6) $V_{T,r}^m$ は $[0, T] \times \{x; |x| \leq r\} \times \{y; |y| \leq r\}$ 上で定義され、 $t \mapsto V_{T,r}^m$ は C^1 , $x, y \mapsto V_{T,r}^m$ は C^2 かつ、

$$V_{T,r}^m \geq 0, \quad V_{T,r}^m(t, x, x) = 0$$

(7) $\lim_{m \rightarrow \infty} V_{T,r}^m(t, x, y) = V_{T,r}(t, x, y)$ が存在して、

$$V_{T,r}(t, x, y) \neq 0 \quad x \neq y$$

(8) $\lim_{m \rightarrow \infty} L V_{T,r}^m(t, x, y) \leq 0$, $L V_{T,r}^m$ は有界

ここで、 L は次の微分作用素である

$$\begin{aligned} L = & \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y_i} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t, y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \right. \\ & \left. + 2 \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^i(t, x) \sigma_k^j(t, y) \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \right\} \end{aligned}$$

この定理の証明は、(1) の解を X_t, Y_t とすると、 $2n$ -次元の (X_t, Y_t) が満たす、確率微分方程式 に対して、伊藤の公式を $V_{T,r}^m$ に対して使うと、

$$E(V_{T,r}^m(t_n z_r, X_{t_n z_r}, Y_{t_n z_r})) \\ = E\left[\int_0^{t_n z_r} L V_{T,r}^m(s, X_s, Y_s) ds\right]$$

$\tau \leq \tau$. $\tau_r = \inf\{t > 0; |X_t| = r, |Y_t| = r\}$

あるいは、Fatou's lemma を用いることもできる。

§5 例1

§4の定理によつて cover できた (1) の例に与えられた。

例1 $\sigma_y^z(t, x)$, $\ell^u(t, x)$: $x=0$ 局所的に $\sigma_y^z > 0$ ($t=0$ 除外)

例2 $\sigma_y^u(t, x)$: $x=0$ 局所的に $\sigma_y^u > 0$ ($t=0$ 除外)

$$\ell^u(t, x) : (x-y, b(t, x) - b(t, y)) \leq 0$$

例3 $n=1$ $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho_{T,r}(|x-y|)$

$$0 \leq \rho_{T,r}(\cdot) \uparrow, \quad \int_0^+ \frac{1}{\rho_{T,r}(t)^2} dt = \infty$$

$$\frac{\ell(t, x) - \ell(t, y)}{x-y} \leq C_{T,r}$$

例4 $n=1$ $\sigma(x) \neq 0$ ($\forall x$)

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho_r(|x-y|)$$

$$0 \leq \rho_r \uparrow, \quad \int_0^+ \frac{1}{\rho_r^2(t) + t^2} dt = \infty$$

$\ell(x)$ 任意

例 5

$\sigma_j^i(t, x) : x \mapsto x^2$ 局所的に Lipschitz,
($t \mapsto x^2$ は一般の)

$(\sigma_j^i(t, x))_{i,j}$ は一般に楕円型

$b^i(t, x) : \text{Dir} - \text{連続}$

上の例に於いて、定理を適用する際の $V_{T,R}^m, V_{T,R}$ は次の通りである:

例 1.2 $V_{T,R}^m(t, x, y) = V_{T,R}(t, x, y) = e^{-kt} |x-y|^2$

例 3 $V_{T,R}^m(t, x, y) = e^{-kt} g_m(x-y),$

$$g_m(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi \varphi_m(\eta) d\eta$$

$$\left(\begin{array}{l} \varphi_m \geq 0, \text{ symmetric, continuous, } \varphi_m(0) = 0, \\ \text{supp } \varphi_m \subset \{x; |x| < \frac{1}{m}\}, \int_0^{\frac{1}{m}} \varphi_m dx = 1, \\ |\varphi_m(x)| \rho_{T,R}(x)^2 \leq C_{T,R}. \end{array} \right)$$

$$V_{T,R}(t, x, y) = e^{-kt} |x-y|$$

例 4

$$V_{T,R}^m(x, y) = g_m\left(\int_y^x e^{f_m(z)} dz\right),$$

g_m は例 3 と $\rho_{T,R}(t) + t = \text{定数}$ の場合

$$f_m(x) = -2 \int_0^x \frac{b_m(y)}{\sigma^2(y)} dy, \quad b_m(y) = m \int_y^{\frac{1}{m}} f(z) dz.$$

$$V(x, y) = \left| \int_y^x e^{f(z)} dz \right|$$

$$f(z) = -2 \int_0^z \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} dx$$

例15

次の性質をみたす“調和座標系”を構成せよ。

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 |x-y| \leq |U_{T,r}(t,x) - U_{T,r}(t,y)| \leq C_2 |x-y| \\ U_{T,r} = (U_{T,r}^1, \dots, U_{T,r}^n) \quad U_{T,r}^l \in W_p^{1,2}([0, T] \times \{|x| \leq r\}) \\ \quad (\forall p > 1) \\ \frac{\partial U_{T,r}^l}{\partial x_i} \quad x = x_2 \text{ 局所的に } \nabla^0 \geq \gamma \\ \frac{\partial U_{T,r}^l}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_{T,r}^l}{\partial x_i} b^i(t,x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t,x) \frac{\partial^2 U_{T,r}^l}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \end{array} \right.$$

このとき、

$$\varphi_m^l \in C^{1,2} \text{ 且 } \varphi_m^l \xrightarrow{m \rightarrow \infty} U_{T,r}^l \text{ in } W_p^{1,2}$$

の形をとり、

(p > 2)

$$V_{T,r}^m(t, x, y) = e^{-kt} \left(\sum_{l=1}^n (\varphi_m^l(t, x) - \varphi_m^l(t, y))^2 \right)$$

$$V_{T,r}(t, x, y) = e^{-kt} \sum_{l=1}^n (U^l(t, x) - U^l(t, y))^2$$

この調和座標系の存在は、A.K. Zvonkii によります。この例15
 はおなじく、実は、定理はこのままでは適用できず、(8)を
 より一般に次の(8)' を check します。

$$(8)' \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E \left[\int_0^{t \wedge \tau} L V_{T,r}^m(s, x_s, y_s) ds \right] \leq 0.$$

