数理解析研究所講究録
227巻 1975年 97-108

微分形式の特異点について

東大 理　　大島利雄

§1. 序

1-form の標準形については，古くから Pfaff の問題として知られているが，ここでは，1-form が特異点を持つ場合を扱う。さらに，その 1-form は接触多様体の中の如何なる部分多様体に canonical 1-form をひきもどした時に生じるかを調べて，部分多様体と 1-form との関連を考察したい。部分多様体が包合的である場合は，大島 [2] で扱かわれた。

すべて問題は局所的に考え，多様体 X は，複素解析的，実解析的，C^∞ のいずれかとし，$\mathcal{O}$ でそれぞれ，解析函数，実数値実解析函数，実数値 C^∞-函数の原点における germ を表わすことにする。 ω を X の原点の近傍で定義された 1-form とする．その時，次の公式が成立することに注意しよう。

公式 1.1. $(\nu \in \mathbb{N},\ \varphi \in \mathcal{O})$

(1) $$(d(e^{\varphi}\omega))^{\nu} = e^{\nu\varphi}\{(d\omega)^{\nu} + \nu\, d\varphi \wedge \omega \wedge (d\omega)^{\nu-1}\}$$

(2) $$e^{\varphi}\omega \wedge d(e^{\varphi}\omega)^{\nu} = e^{(\nu+1)\varphi}\, \omega \wedge (d\omega)^{\nu}$$

$\textcircled{H} = \mathcal{O}^{(1)} \wedge \omega + \mathcal{O}\, d\omega \subset \mathcal{O}^{(2)}$ とおくと

(3) $$\textcircled{H}^{\nu} = \mathcal{O}^{(1)} \wedge \omega \wedge (d\omega)^{\nu-1} + \mathcal{O}\,(d\omega)^{\nu}$$

(4) $$\textcircled{H}^{\nu}\omega = \mathcal{O}\omega \wedge (d\omega)^{\nu}$$

系 1.2.

(5) $\omega \wedge (d\omega)^{\nu-1} = 0 \Rightarrow \textcircled{H}^{\nu} = 0,\ (d(f\omega))^{\nu} = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}$

(6) $(d\omega)^{\nu-1} = 0 \Rightarrow f\omega \wedge (d(f\omega))^{\nu-1} = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}$

(7) $\omega \wedge (d\omega)^{\nu-1}(0) \neq 0$ かつ $\dim X \geqq 2\nu$

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}$ s.t. $(d(f\omega))^{\nu}(0) \neq 0$

(8) $\textcircled{H}^{\nu}(0) \neq 0$ の時

$\omega(0) = 0 \iff \omega \wedge (d\omega)^{\nu-1}(0) = 0$

定義 1.3. $(\theta, X),\ (\theta', X')$ を p-forms とする.
この時, $(\theta, X) \sim (\theta', X')$ (又は,単に $\theta \sim \theta'$) とは,

$$\left.\begin{array}{l} f : Y \to X \\ f' : Y \to X' \end{array}\right\}$$ という smooth maps (原点を原点に写

し，局所的に定義されたもの）が存在して，

$$\mathcal{O}_Y f^*\theta = \mathcal{O}_Y f'^*\theta' \subset \mathcal{O}_Y^{(1)}$$ となること．

定義 1.4. (θ, X) を p-form とする時，写像 θ による $\overset{p}{\otimes}TX$ の像の原点における germ を $I(\theta)$ と表わす．$I(\theta)$ は $\mathcal{O}$ の ideal となる．

定理 1.5.（generic point での 1-form の標準形 ― 古典的結果）

ω を X 上の原点の近傍で定義された 1-form とする時，

$$\begin{cases} I(\omega\wedge(d\omega)^n) = \mathcal{O} \\ I(\omega\wedge(d\omega)^{n+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \omega \sim dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

但し，dz, dp_i, dx_j 達は原点で 1 次独立．

系 1.6.（Frobenius の定理 ―― 単独の場合）

$I(\omega) = \mathcal{O}$ の時，

$$I(\omega\wedge d\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists f, g \in \mathcal{O} \quad s.t. \quad \omega = f\cdot dg$$

$$\Rightarrow \quad \exists V \subset X \text{ : 超曲面} \quad s.t. \quad \omega|_V = 0$$

ここで，$\omega|_V$ は $V \hookrightarrow X$ なる写像による ω のひきもどし．

注意 1.7. 定理 1.5 は次の事実を使って証明される．（cf. Carathéodory [1]）

$\omega = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n - H(p, x, t)\,dt$ とする．

微分方程式系

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dz}{dt} = -H + \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

の解 (p, x, z) で初期条件 $(p, x, z)\big|_{t=0} = (q, y, 0)$ を満たすものは，$\left|\frac{\partial(p, x)}{\partial(q, y)}(0)\right| \neq 0$ となるから，q, y が (p, x, t) の函数として表わせる．この時次式が成立する．

$$\omega = q_1 dy_1 + \cdots + q_n dy_n + dz$$

§2. closed 2-form の特異点

<u>定理2.1.</u> X の原点の近傍で定義された closed 2-form θ が

$$\begin{cases} I(\theta^{n-1}) = \mathcal{O} \\ I(\theta^n) = \mathcal{O}\Delta \qquad (\Delta \in \mathcal{O},\ \Delta(0) = 0,\ d\Delta(0) \neq 0) \\ I(\theta^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

を満たすとする．この時，

i) $I((\theta|_{\Delta=0})^{n-1}) = \mathcal{O} \iff \theta \sim dp_1^2 \wedge dx_1 + \sum_{j=2}^{n} dp_j \wedge dx_j$

ii) $I((\theta|_{\Delta=0})^{n-1}) = 0 \iff \theta \sim d(p_1 p_2) \wedge dx_1 + \sum_{j=2}^{n} dp_j \wedge dx_j$

ここで，dp_i, dx_j 達は原点で1次独立．

<u>証明</u> <u>i)の場合</u>．

定理1.5の証明と同様の方法（注意1.7）で，

$$\theta = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + \sum_{j=1}^{m} da_j(p, x, t) \wedge dt_j \quad , da_j(0) = 0$$

と表わすことができる．(p, x, t) は局所座標系である．

i)の仮定から，$\frac{\partial\Delta}{\partial t_j}(0) \neq 0$ を満たす j が存在することが

わかる．$j=m$ として一般性を失わない．注意1.7の方法により，新しく p_i, x_i, t_i, a_i 達を取り直して

$$\theta = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + \sum_{j=1}^{m-1} da_j(p,x,t,s) \wedge dt_j \quad , da_j(0)=0$$

と表わせることがわかる．

$\forall j$ に対し，$\dfrac{\partial^2 a_j}{\partial s^2}(0) = 0$ となると仮定しよう．

$I(\theta^n) = \mathcal{O} s$ より，

$$\frac{\partial a_j}{\partial s} = {}^{\exists}A_j s \quad , A_j \in \mathcal{O}, \ A_j(0) = 0$$

と表わせることがわかる．さらにまた

$$\frac{\partial a_j}{\partial t_i} - \frac{\partial a_i}{\partial t_j} = {}^{\exists}A_{ij} s \quad , A_{ij} \in \mathcal{O}$$

と表わせるが，

$$\begin{aligned} A_{ij}(0) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial a_j}{\partial t_i} - \frac{\partial a_i}{\partial t_j}\right)(0) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(A_j s) - \frac{\partial}{\partial t_j}(A_i s)\right)(0) \\ &\cancel{= A_j(0) + A_i(0)} = 0 \end{aligned}$$

これは，$I(\theta^n) = \mathcal{O} s$ に矛盾する．従って，$\dfrac{\partial^2 a_j}{\partial s^2}(0) \neq 0$ となる j が存在することがわかる．$j = m-1$ として一般性を失わない．ここで，次の補題を準備しよう．

<u>補題2.2.</u> $(t, x_1, \cdots, x_n)$ を X の局所座標系とする．$f \in \mathcal{O}_X$ が次式達

$$f(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0) = 1$$

を満たすならば，$u, \lambda \in \mathcal{O}_X$ が存在して

$$\begin{cases} f = u^2 + \lambda \\ u(0) = \lambda(0) = 0, \quad \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \end{cases}$$ となる．

<u>証明</u> Weierstraß (-Malgrange) の preparation theorem を３回作う：

$$\exists Q \cdot f = t^2 + a_1(x)t + a_2(x).$$

$$2t + a_1(x) - \frac{\partial Q}{\partial t}\cdot\lambda = {}^{\exists}R(t,x,\lambda)\cdot(t - {}^{\exists}g(x,\lambda))$$

$$g^2(x,\lambda) + a_1(x)g(x,\lambda) + a_2(x) - Q(t,x)\lambda$$
$$= {}^{\exists}S(t,x,\lambda)\cdot(\lambda - {}^{\exists}\lambda(x))$$

この時，$t^2 + a_1(x)t + a_2(x) - Q(t,x)\lambda(x)$
$$= {}^{\exists}T(t,x)\cdot(t - g(x,\lambda(x)))^2$$

従って，$u = (T/Q)^{1/2}\cdot(t - g(x,\lambda(x)))$ とすればよい．
q.e.d.

<u>定理 2.1 の証明の続き</u> 補題 2.2 を適用すれば，

$$\theta = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + \sum_{j=1}^{m-2} d(c_j u^2 + e_j(p,x,t)u + b_j(p,x,t)) \wedge dt_j$$
$$+ d(u^2 + b_{m-1}(p,x,t)) \wedge dt_{m-1}$$

と表わせる．$I(\theta^n) = \mathcal{O}s = \mathcal{O}u$ に注意すれば $e_j = 0$ $(1 \leq j \leq m-2)$ がわかる．

$\theta' = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + \sum_{j=1}^{m-1} db_j(p,x,t) \wedge dt_j$ とおけば，

$I(\theta'^{n-1}) = \mathcal{O}$，$I(\theta'^n) = 0$ となるので，

$\theta' = \sum_{i=1}^{n-1} dp'_i \wedge dx'_i$ と表わすことができる．

従って，最初から θ は次の形をしていると考えてよい．

$$\theta = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + du^2 \wedge dt_0 + \sum_{j=1}^{m-2} d(C_j(p,x,u,t)u^2) \wedge dt_j$$

$m \geqq 3$ ならば，次の常微分方程式系を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt_{m-2}} = -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(C_{m-2}u^2) , & \dfrac{dy_j}{dt_{m-2}} = -\dfrac{\partial}{\partial t_j}(C_{m-2}u^2) , \\ \dfrac{dx_i}{dt_{m-2}} = \dfrac{\partial}{\partial p_i}(C_{m-2}u^2) , & \dfrac{dt_j}{dt_{m-2}} = 0 , \qquad 1 \leqq j \leqq m-3 \\ \dfrac{du^2}{dt_{m-2}} \equiv 2u\dfrac{du}{dt_{m-2}} = -\dfrac{\partial}{\partial t_0}(C_{m-2}u^2) & \\ \dfrac{dt_0}{dt_{m-2}} = \dfrac{\partial(a_{m-2}u^2)}{\partial(u^2)} \equiv \dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial}{\partial u}(C_{m-2}u^2) & \end{cases}$$

初期条件： $(p,u,y,x,t)|_{t_{m-2}} = (p',u',y',x',t')$

従って，（cf. 注意 1.7）

$$\sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + du^2 \wedge dt_0 + \sum_{j=1}^{m-3} dy_j \wedge dt_j + d(C_{m-2}u^2) \wedge dt_{m-2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} dp_i' \wedge dx_i' + du'^2 \wedge dt_0' + \sum_{j=1}^{m-3} dy_j' \wedge dt_j'$$

よって，θ は次の形をしているとしてよい．

$$\theta = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + du^2 \wedge dt_0 + \sum_{j=1}^{m-3} d(C_j(p,x,u,t)u^2) \wedge dt_j$$

$I(\theta^{n+1}) = 0$ より，$\dfrac{\partial C_j}{\partial t_{m-2}} = 0$ がわかる．従って，m に関する induction により $\theta = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx_i + du^2 \wedge dt_0$ と表わせることがわかる。

ii) の場合　i) の場合と大体同じように証明されるので，省略しよう．

q.e.d.

§3. 1 - form の特異点

<u>定理3.1.</u> X の原点の近傍で定義された 1 - form ω が

$$\begin{cases} I(\omega\wedge(d\omega)^{n-1}) = \mathcal{O} \\ I(\omega\wedge(d\omega)^{n}) = \mathcal{O}s \qquad (s\in\mathcal{O},\ s(0)=0,\ ds(0)\neq 0) \\ I(\omega\wedge(d\omega)^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

を満たすとする. $Y=\{s=0\}$, $\omega'=\omega|_Y$ とおく時,

i) $I(\omega'\wedge(d\omega')^{n-1})=\mathcal{O}_Y \iff \omega \sim dz - p_1^2dx_1-\sum_{j=2}^{n}p_j dx_j$

ii) $I(\omega'\wedge(d\omega')^{n-1})=0$ かつ $I(\omega'\wedge(d\omega')^{n-2})=\mathcal{O}_Y$

$$\iff \omega \sim dz - p_1p_2dx_2-\sum_{j=2}^{n}p_j dx_j$$

iii) $I(\omega'\wedge(d\omega')^{n-1})=0$ かつ $\operatorname{codim}_Y\{x\in Y\,;\,\omega'(x)=0\}=n-1$

$$\iff \omega \sim dz - p_1z\,dx_2-\sum_{j=2}^{n}p_j dx_j$$

<u>証明</u> ii), iii) の証明は i) の証明と大体同じであるから, i) の場合のみ証明する.

$$f:\ X\times \underset{(\mathbb{R})}{\mathbb{C}} \ni (x,t) \longmapsto x\in X$$

とおき, X 上の ω の代わりに, $X\times\mathbb{C}$ 上の $e^tf^*\omega$ をあらためて ω と思うことにより, 次式が成立するとしてよい.

$$\begin{cases} I(\omega\wedge(d\omega)^n) = I((d\omega)^{n+1}) = \mathcal{O}s \\ I((d\omega|_{s=0})^n) = \mathcal{O}_Y, \qquad I((d\omega)^{n+2})=0 \end{cases}$$

定理2.1 の結果から, 次のように表わせることがわかる.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}p_idx_i + u^2dt_0 + dh(p,x,u,t)$$

- $I(\omega\wedge(d\omega)^{n+1})=0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t_j}=0,\quad \forall j\geq 1$
- $I(\omega\wedge(d\omega)^{n})=\mathcal{O}u \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial u}\in\mathcal{O}u,\ \frac{\partial h}{\partial t_0}\in\mathcal{O}u$
- $I(\omega'\wedge(d\omega')^{n-1})=\mathcal{O}_Y \Rightarrow \mathrm{grad}_{(p,x)}h\,(0)\neq 0$

従って，$h=h_1(p,x)+h_2(p,x,u,t_0)\,u^2$，$dh_1(0)\neq 0$ と表わせる。$\frac{\partial h_1}{\partial x_1}(0)\neq 0$ の時，（他の場合も同様），方程式

$$\begin{cases} 2u\sum_{j=1}^{n}\left(p_j+\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}-2u\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+\left(u^2+\frac{\partial h}{\partial t_0}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \qquad\qquad -\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}=\frac{2u}{n} \\ \varphi|_{p_1=0}=t_1 \end{cases}$$

の解 φ は $(n+1)d\varphi\wedge\omega\wedge(d\omega)^n=(d\omega)^{n+1}$ を満たすので $I(\,(d(e^{-\varphi}\omega))^{n+1})=0$ となる．また，$I((d(e^{-\varphi}\omega))^{n})=\mathcal{O}$ であることに注意すれば，次式の表現を得る．

$$\omega\sim\sum_{i=1}^{n}p_i\,dx_i+dh(p,x,u,v)$$

$I(\omega\wedge(d\omega)^n)=\mathcal{O}\frac{\partial h}{\partial u}+\mathcal{O}\frac{\partial h}{\partial v}$ の生成元は1個であるから，必要ならば u と v を逆にすることによって，

$$\frac{\partial h}{\partial v}=Q\frac{\partial h}{\partial u},\quad Q\in\mathcal{O}$$ と書ける。

方程式 $\begin{cases}\frac{du}{dv}+Q(p,x,u,v)=0\\ u|_{v=0}=t\end{cases}$ の解を $u(t,p,x,v)$ とすると，t は (p,x,u,v) の函数として表わせる。座標系 (p,x,t,v) を用いれば，$\frac{\partial h}{\partial v}=0$ となるので，

$$\omega\sim\sum_{i=1}^{n}p_i\,dx_i+dh(p,x,t)$$ となる。

$I(\omega)=\mathcal{O}$ より $\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + dh(p,x,0) \sim \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + dx_1$ を得る（定理1.5）ので，

$$\begin{cases} \omega \sim \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + d(x_1 + h(p,x,t)) \\ h(p,x,0)=0 \ , \ dh(0)=0 \end{cases}$$ とできる．

(イ) $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(0) \neq 0$ の場合　補題2.2より

$$\omega \sim \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + d(g(p,x)+t^2) \ , \ dg(0) \neq 0$$

とできる。$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + dg(p,x) \sim \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + dx_1$ であるから，$\omega \sim \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + d(x_1 + t^2)$ となる。

(ロ) $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(0) = 0$ の場合　$I(\omega' \wedge (d\omega')^{n-1}) = \mathcal{O}_Y$ より

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p_1 \partial t}(0) \neq 0$$ を得る。

$p_i \longmapsto c_i p_i$, $x_i \longmapsto \frac{1}{c_i} p_i$, $(c_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ という変換を考えることにより，

☆ $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial p_1 \partial t}(0)\right| = 1$, $\left|\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial t}(0)\right| \leq \frac{1}{n}$, $j \geq 2$

とすることができる。

$(1+t)p_i \longmapsto p_i$ という変換を考えれば，

$$\omega \sim \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + (1+t)d(x_1 + h'(p,x,t))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - (x_1+h')ds + d\{(1+t)(x_1+h')\}$$

となるが，h' に対しても同様に☆が成立している。

注意1.7にある様に，次の常微分方程式系の解を考えることにより，

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial h'}{\partial p_i}, \quad \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_1 + h'), \quad \dfrac{dz}{dt} = -(x_1 + h') + \sum p_i \dfrac{\partial h'}{\partial p_i} \\ (x, p, z)\big|_{t=0} = (y, q, 0) \end{cases}$$

$$\sum p_i dx_i - (x_1 + h')dt = \sum q_i dy_i + dz$$ を得る.

$$\therefore \quad \omega \sim \sum_{i=1}^{n} q_i dy_i + dH$$

ただし，$H = z + (1+t)(x_1 + h')$

一方，(y, q, t) を独立変数と考えれば，計算により

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(0) = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 h'}{\partial p_i \partial t}(0) - \frac{\partial^2 h'}{\partial p_1 \partial t}(0) \neq 0$$

を得るので，(イ) の場合に帰着される。従って，いずれの場合も $\omega \sim \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + d(x_1 + t^2)$ となり，証明が終わった。 q.e.d.

§4. 接触多様体との関連

(ω, X) を $(2k+1)$-次元の接触多様体とする.

$V \subset X$ が $V = \{f = g = 0\}$ と与えられ，

$[f, g](0) = 0$, $[f, [f, g]](0) \neq 0$, $[g, [f, g]](0) \neq 0$

を満たし，df, dg, $d[f, g]$ が原点で1次独立ならば，

$\omega|_V$ は 定理3.1 の i) の形をしている.

<u>(佐藤予想)</u> $V' = \{f' = g' = 0\}$ も同様な条件を満たしているとする. $V_1 = \{f = 0\}$, $V_2 = \{g = 0\}$, $V_1' = \{f' = 0\}$ $V_2' = \{g' = 0\}$ とする時，(V_1, V_2, X) と (V_1', V_2', X)

とは，接触多様体Xの部分多様体の組として同型になる。

(問題)　$V \subset X$, $V' \subset X$ 　(V, V' は同じ次元)

に対して，$\omega|_V \sim \omega|_{V'}$ ならば，V と V' とは同型になるか．V が特異点を持つ場合はどうか？．

V が包合的部分多様体の時は正しい（cf、大島［2］）

(定理3.1のある拡張として次が成立する)

$V = \{f_1 = \cdots = f_\ell = 0\}$ ：包合的多様体

$W = \{g = 0\}$ ：超曲面（特異点を持たない）

V と W が transversal に交わり，$\mathrm{rank}\,([f_i, [f_j, g]](0)) = \ell$ の場合，

$$\omega|_{V \cap W} \sim dz - \sum_{i=1}^{k-\ell} p_i\,dx_i - \sum_{j=1}^{\ell} \pm s_j^2\,dt$$

となる．

文献

[1] Carathéodory, C., Caluculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part I, Holden-Day, Amsterdam, 1965. Translated from the German original, 1935.

[2] 大島利雄；接触幾何学における第二種の特異点の構造と退化した擬微分方程式，数理解析研究所講究録，<u>192</u> (1973)，327－381．