数理解析研究所講究録
227巻 1975年 86-96



# Kähler geometry のまわりの 2つの話題

名大 理 森川寿

Vector bundle の理論に応用出来ないかと考えた2つの話題について話す。

(その1) a certain algebra associated to a polarized algebraic variety.

(予想) polarized algebraic variety $V$ 上の ample divisors の $\mathbb{Q}$-係数の homology 類の全体は convex cone をなすが、この cone は、divisors の $\mathbb{Q}$-係数の homology 類全体に Jordan algebra (semi-simple) の構造が入り、その positive な元のなす convex cone と一致するであろう。

この話は、上の予想に対する部分的解答である。

（記号）

$\mathbb{V}$ : polarized algebraic variety, $n = \dim \mathbb{V}$, defined over $\mathbb{C}$

$\omega$ : fundamental form $\in H^{(1,1)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q})$,

$H^{(p,q)}(\mathbb{V}, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{harmonic forms of type } (p,q) \\ \text{with respect to } \omega \end{array} \right\}$,

$\mathfrak{h}^{(l,l)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q}) = H^{(l,l)}(\mathbb{V}, \mathbb{C}) \cap H^{2l}(\mathbb{V}, \mathbb{Q})$,

$\mathfrak{h}(\mathbb{V}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{l=0}^{n} \mathfrak{h}^{(l,l)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q})$,

$\xi \cdot \eta = \xi \wedge \eta$ と cohomologous な harmonic form,

$L\varphi = \omega \cdot \varphi$, $\Lambda = * L *$ （$L$ の adjoint）

新しい non-associative composition $\circ$ を $\mathfrak{h}^{(1,1)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q})$ の上に次のように定義する，

$$\boxed{\varphi \circ \psi = \frac{1}{2}\{\Lambda\varphi \cdot \psi + \Lambda\psi \cdot \varphi - \Lambda(\varphi \cdot \psi)\}}$$

（予想）$(\mathfrak{h}^{(1,1)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q}), \circ)$ は semi-simple な Jordan algebra であろう。

Jordan algebra になる例.

1) $\dim \mathbb{V} = 2$ のとき,

2) $\mathbb{V}$ が polarized abelian variety のとき

このときは、$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{V})$ に polarization より, involution $*$ が入り, その symmetric elements のつくる Jordan algebra と canonically に isomorphic になる.

加藤芳文は一般に次の定理を証明した.

(定理) $\mathbb{V}$ を $\mathbb{C}$ 上定義された, nonsingular polarized algebraic variety としたとき, bilinear form on $\mathfrak{H}^{(1,1)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q})$ を

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \Lambda(\varphi \circ \psi)$$

で定義すると

(i) $\langle \varphi \circ \psi, \phi \rangle = \langle \varphi, \psi \circ \phi \rangle$,

(ii) $\langle \varphi, \varphi \rangle > 0 \quad (\varphi \neq 0)$.

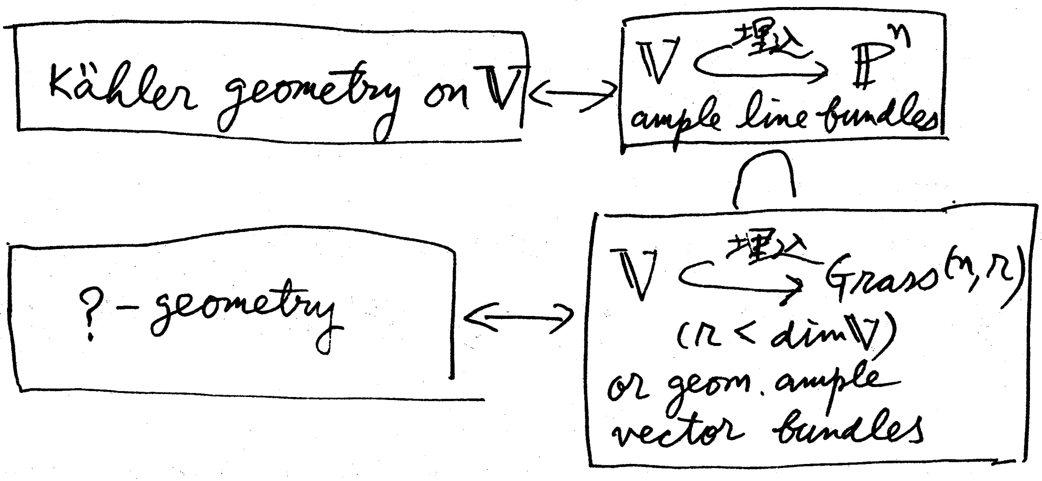
従って $(\mathfrak{H}^{(1,1)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q}), \circ)$ は semi-simple である.

この定理は、一般の polarized variety でも, abelian variety のときのように, isogeny 分解の可能性を

示している。

(その2) Canonical $sl(2r+2)$ Lie algebra bundle over Grass$(n, r)$.

次の図を考察しよう




Kähler geometry の公式, 定義, 定理の analogy? 例へば, Lefschetz 分解の拡張とか, 種々の vanishing theorem が、この立場から得られないであろうか? この論はそのための極く最初の部分の試みである。

$\omega_{\mathbb{V}}$ : $\mathbb{V}$ 上の fundamental form $\in H^{(1,1)}(\mathbb{V}, \mathbb{Q})$,

$L_{\mathbb{V}} = \sqrt{-1}\, e(\omega_{\mathbb{V}})$, $\Lambda_{\mathbb{V}} = -\sqrt{-1}\, i(\omega_{\mathbb{V}})$ ($L_{\mathbb{V}}$ の adjoint)

$H_{\mathbb{V}} = \sum (p+q-\dim \mathbb{V})\, \pi^{p,q}$

$E(\mathbb{V})$ = exterior algebra bundle

$\Lambda^{\bullet}(T^*\mathbb{V} \oplus \bar{T}^*\mathbb{V})$

とすれば

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to L_{\mathbb{V}}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \Lambda_{\mathbb{V}}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to H_{\mathbb{V}}$$

なる対応で Lie algebra $sl(2)$ は vector bundle $E(\mathbb{V})$ に作用する. Lefschetz 分解は

$$E(\mathbb{V}) = \bigoplus_{l=0}^{\dim \mathbb{V}} L_{\mathbb{V}}^{l} E_{prim}(\mathbb{V}),$$

$$E_{prim}(\mathbb{V}) = \operatorname{Ker} \Lambda_{\mathbb{V}}$$

と考えてよい. この分解は $sl(2)$ の $E(\mathbb{P}^n)$ への canonically な作用から, 埋込み $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ によって得られる.

$r > 0$ のとき, この $sl(2)$ に対応するものが, これからつくる $Grass(n, r)$ 上の $sl(2r+2)$ Lie algebra bundle $\mathcal{L}(n, r)$ で $E(Grass(n, r))$ に canonically に作用する non-trivial な bundle である.

(記号)

$$
\begin{tikzcd}
U(n+1) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dd, bend right, "\tilde{\pi}"'] & \text{unitary group} \\
U(r+1, n+1) = U(n-r)\backslash U(n+1) \arrow[d, "\pi"] & \\
\mathrm{Grass}(n,r) = U(r+1)\backslash U(r+1,n+1) &
\end{tikzcd}
\quad \Bigg\} \ \text{principal } U(r+1)\text{-bundle}
$$

$$U(r+1, n+1) = \{ w \mid (r+1)\times(n+1)\text{-matrices},\ w\,{}^t\bar{w} = I \}$$

$x$を十分小さくして

$$S = \left\{ \exp\begin{pmatrix} 0 & B \\ -{}^t\bar{B} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \left.\overbrace{B}^{n-r}\right\}{r+1},\ \|B\| < x \right\} \subset U(n+1)$$

の像

$$\sigma(W) = \lambda(S) \quad \subset \quad U(r+1, n+1)$$

$$W \;\; = \tilde{\pi}(S) \quad \subset \quad \mathrm{Grass}(n,r)$$

の間にbijectionを与えるようにする

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\lambda"] & \sigma(W) \arrow[r, shift left, "\pi"] & W \arrow[l, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd}
$$

$U(n+1)$ の元 $\alpha$ でずらせて

$$W_\alpha = \tilde{\pi}(S\alpha) = W\alpha \ ,$$

$$\sigma_\alpha(W_\alpha) = \lambda(S\alpha) = \sigma(W)\alpha \ ,$$

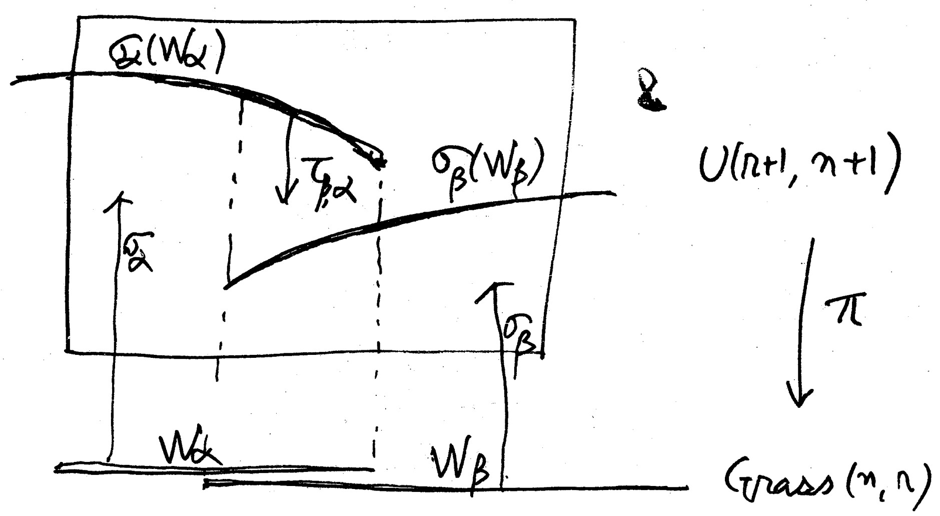
$$\sigma_\alpha(W_\alpha) \underset{\sigma_\alpha}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} W_\alpha$$

とする. $\sigma_\alpha(W_\alpha)$ と $\sigma_\beta(W_\beta)$ とは

$$\tau_{\beta,\alpha} : W_\alpha \cap W_\beta \longrightarrow U(n+1)$$ なる変換で

$$\boxed{\sigma_\beta = \tau_{\beta,\alpha} \circ \sigma_\alpha}$$

となり, $Grass(n,r) = \bigcup_\alpha W_\alpha$ のはり合せで $Grass(n,r)$ の chart をつくる.



$U(r+1, n+1)$ の座標 $w = (\overbrace{w^{(1)}}^{r+1}, \overbrace{w^{(2)}}^{n-r}) \}\, r+1$, $w\,{}^t\bar{w} = I$
を用いて, $U(n+1)$-right invariant connection form

$$\theta = w\, d\,{}^t\bar{w},$$

その curvature form

$$\omega = d\theta + \theta \wedge \theta$$

をつくり,

$$\boxed{\omega^{(\alpha)} = \omega_{|\sigma_\alpha(W_\alpha)}} \quad \text{restriction}$$

と定義すれば, 変換式

$$\boxed{\tau_{\beta,\alpha}^{*}(\omega^{(\beta)}) = \tau_{\beta,\alpha}\, \omega^{(\alpha)}\, \tau_{\beta,\alpha}^{-1} \quad (\text{行列として})}$$

を得る. 一方 $U(r+1, n+1)$ の標準点 $(I, 0)$ で見ると

$$\theta_{(I,0)} = -dw^{(1)} = d\,{}^t\bar{w}^{(2)},$$

$$\omega_{(I,0)} = dw^{(2)} \wedge d\,{}^t\bar{w}^{(2)} = \Big( \sum_{\ell=1}^{n-r} dw_{i\ell}^{(2)} \wedge d\bar{w}_{j\ell}^{(2)} \Big)_{1 \le i, j \le r+1}$$

となる.

Vector bundle

$$E(\sigma_\alpha(W_\alpha)) = \Lambda^{\bullet}\big(T^{*}\sigma_\alpha(W_\alpha) \oplus \bar{T}^{*}\sigma_\alpha(W_\alpha)\big)$$

に作用する, linear operators $L_{ij}^{(\alpha)}$, $\Lambda_{ij}^{(\alpha)}$ を

$$L_{ij}^{(\alpha)} = \sqrt{-1}\, e(\omega_{ij}^{(\alpha)}) \qquad \omega^{(\alpha)} = (\omega_{ij}^{(\alpha)})_{1\le i,j\le n+1}$$

$$\Lambda_{ij}^{(\alpha)} = -\sqrt{-1}\, i(\omega_{ij}^{(\alpha)}),$$

$$L^{(\alpha)} = (L_{ij}^{(\alpha)})_{1\le i,j\le n+1}, \quad \Lambda^{(\alpha)} = (\Lambda_{ij}^{(\alpha)})_{1\le i,j\le n+1}$$

で定義すれば

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{\beta,\alpha}^{*}(L^{(\beta)}) &= \tau_{\beta,\alpha} L^{(\alpha)} \tau_{\beta,\alpha}^{-1} \\ \tau_{\beta,\alpha}^{*}(\Lambda^{(\beta)}) &= {}^{t}\tau_{\beta,\alpha}^{-1} \Lambda^{(\alpha)}\, {}^{t}\tau_{\beta,\alpha} \end{aligned}},$$

一方 $sl(2n+2)$ の表現 $\rho^{(\alpha)}$ を

$$\boxed{\begin{aligned} \rho^{(\alpha)}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A & 0 \end{array}\right) &= \mathrm{tr}\,(A L^{(\alpha)}) \\ \rho^{(\beta)}\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) &= \mathrm{tr}\,({}^{t}B \Lambda^{(\alpha)}) \end{aligned}}$$

で定義することが出来る.

これより

$$\boxed{\tau_{\beta,\alpha}^{*}(\rho^{(\beta)}(X)\xi_{\beta}) = \rho^{(\alpha)}\left(\left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta,\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta,\alpha} \end{array}\right)^{-1} X \left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta,\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta,\alpha} \end{array}\right)\right) \tau_{\beta,\alpha}^{*}\xi_{\beta}}$$

なる変換式を得る.

従って

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{L}(n,r) = \bigcup_{\alpha} \sigma_{\alpha}(W_{\alpha}) \times sl(2r+2) \Big/ \sim \\ (z_{\alpha}, X_{\alpha}) \sim (z_{\beta}, X_{\beta})\end{array}}$$

を

$$\pi z_{\alpha} = \pi z_{\beta}, \quad X_{\beta} = \left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta,\alpha} \end{array}\right)^{-1} X_{\alpha} \left(\begin{array}{c|c} \tau_{\beta\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{\beta,\alpha} \end{array}\right)$$

で定義すれば

$$E(\mathrm{Grass}(n,r)) = \bigcup_{\alpha} E(\sigma_{\alpha}(W_{\alpha})) \Big/ \sim$$

$$\xi_{\alpha} \sim \xi_{\beta} \iff \xi_{\alpha} = \tau_{\beta\alpha}^{*} \xi_{\beta}$$

なる故, $\mathcal{L}(n,r)$ は $E(\mathrm{Grass}(n,r))$ に canonically に作用する.

文献

[1] Y. Kato, On the semisimplicity of the algebra associated to a polarized algebraic variety, Nagoya math. Jour. に出版予定

[2] H. Morikawa, On a certain algebra associated with a polarized algebraic variety,

Nagoya Math Jour. vol 53 (1974).

[3] H. Morikawa, A canonical $sl(2r+2)$ Lie algebra bundle over Grass$(n, r)$,
Nagoya Math. Jour. vol 54 (1974).