数理解析研究所講究録
227巻 1975年 54-57

局所解の存在に関する注意

都立大 理 数学

大内 忠

§1. H. Lewy の有名な例以来、解のない方程式についていろいろ研究されてきた。解のない方程式の例をいくつかあげてみよう。

$$(1.1)\quad \frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}x^{2k+1}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$(1.2)\quad x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$(1.3)\quad \frac{\partial}{\partial x}+x^{2k+1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$(1.4)\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\ell}{i}\frac{\partial}{\partial y}\qquad (\ell:\text{奇数})$$

(1.1) の型の方程式は、その後 Hörmander, Nirenberg–Treves Егоров 等により研究された、解のない単純特性根の場合の簡単な良い例である。解がないことは、たとえば、

$$(1.5)\quad \lambda^{\ell}e^{i\lambda S}\left(f_0+\frac{f_1}{\lambda}+\qquad+\frac{f_k}{\lambda^k}+\cdots\right)$$

という型の漸近的零解を adjoint 方程式に対して構成することと、その漸近的零解が、$\lambda\to\infty$ の時 ある種の不等式を不

成立にすることで示される。(Hörmander. Linear Partial diff. op. を参照).

(1.5) の型の漸近解を構成する方法は一般には (1.2), (1.3) に対してはそのまま使えない。しかしながら (1.1) ~ (1.4) の方程式が非可解であることを示すには、adjoint の方程式に対して、漸近的な singular null solutions を作ればよいことがわかる。すなわち孤立した singularity をもちその特異度がいくらでも大きくできる null solutions である。これは (1.5) の型の漸近解をもとめる技法と singular solutions を作る技法が形式的には同じであることに注意すれば、(1.1) の方程式の非可解性を示す方法の拡張となっていることが容易にわかる。

(1.1) において adjoint な方程式は

$$-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}x^{2k+1}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{で} \quad \left(\frac{1}{2k+2}x^{2k+2}+iy\right)^{-N} \quad \text{は}$$

singular null solutions ($N=1.2.3\cdots$) であり

(1.2) においては $-x\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial x}$ が adjoint 方程式となり

$(x^2+y^2)^{-N}$ ($N=1.2.3\cdots$) が singular null solutions.

(1.3) においては $-\frac{\partial}{\partial x}+x^{2k+1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ が adjoint であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^N e^{iy\cdot\xi - \frac{x^{2k+2}}{2k+2}|\xi|^2} d\xi \qquad (N=1,2,\cdots)$$

が singuler null solutions である。これらの考察により、特異点の孤立性と特異性は bicharacteristic curve に沿って伝わるということから予想される次の結果が得られる。

定理 $$L = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

とする。もし $A = (a_{ij})$ の固有値の中に少くとも一つ実部が零でないものがあれば、L は $x=0$ において可解である。

これは、A が上の条件を満たせば、常微分方程式より定まる characteristic curve が $x=0$ のまわりで閉軌道を作りえないという事実に基づく。

§2. (1.4) の型の方程式が解けないことも §1 で述べた方法で示せる。$l = 2k+1$ の時 Hermite polynomial を用いて singuler null solutions で特異度の大きいものが作れるからである。(Grushin. Mat. Sb. 1971)。(1.4) の型の方程式の主要部は $P\bar{P}$ $(P = \xi + i x^l \eta)$ という型であり、退化の度合がきわめて高いもの(幾何学的にとりあつかいやすい)となっているためより詳しい議論ができる。

この方程式に摂動の項がある場合の可解性，正則性の問題は，(1.5)の型の漸近解の構成の立場から見直すことができる。摂動項のない場合，すなわち(1.4)，$l=2k+1$ の時，解けないことは amplitude を求める transport equation が正則な範囲で解けるための条件である。また(※)ある種の摂動に対しては，漸近展開式(1.5)において $f_0, f_1, \cdots, f_k, \cdots$ が次々に求まることが解をもつため，あるいは hypoelliptic であるための必要十分条件であることがわかる。

(※)
例えば
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} + h(x)\frac{\partial}{\partial y}$$
. $h(x)\equiv 0$ の時は解けないが、$h(x)\not\equiv 0$ $(h(0)=0)$ の時の可解性の条件は $h(x)$ の条件で書き下せる。