数理解析研究所講究録
227巻 1975年 12-22

コホモロジー的境界値に対する位相的考察

東大 教養 金子晃

§0. 序

前回のシンポジウムで報告した analytic parameter をもつ超函数の一意接続に関する結果 [1] の証明を詳しく書いてゆくうちに二，三の結果が得られたが，今回はそのうち興味のあるものを紹介したい。はじめに緩増加実解析函数を係数にもつ微分方程式 $p(x,D)u=0$ の Fourier 超函数解に対する佐藤の基本定理の類似を述べる。ここで導入した（無限遠における）S.S. の定義が適当かどうかはわからないが，係数の増大度が関係した結果となっている。次の§2は本稿の表題に関するもので先の講演 [1] において partial Laplacian $\Delta_{x'}+\partial^2/\partial\varepsilon^2$ に対し Komatsu-Kawai [3] の意味での cohomology 的境界値と，古典的な意味での境界値，あるいは位相的境界値などとが一致するかどうかが問題となったが，本稿§2の結果を用いれば厳密

な証明が可能となる。最後に§3において analytic parameter に関して興味深い例を一つ示す。その例は常識的に予想される多くの命題に対する反例となっていて，なかなかいやらしいものである。

§1. Fourier 超函数解に対する佐藤の基本定理

まず

補題1.1 $u(x)$ が $\mathbb{R}^n$ における C^m 級の函数でその $m-1$ 階以下の微係数がすべて緩増加とする。u が緩増加な実解析的係数をもつ m 階の方程式 $p(x,D)u=0$ を $\mathbb{R}^n$ において普通の意味で満たしていれば，u を自然に Fourier 超函数と思ったとき，上の等式は Fourier 超函数の空間においても成立つ。

注意 連続函数 $u(x)$ が緩増加とは $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0$, $|u(x)|\leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|}$ となることである。実解析函数 $f(x)$ が緩増加とはある一定の幅をもった帯状複素近傍があり $f(z)$ はそこで正則緩増加なことである。

この補題の証明は急減少実解析函数（帯状複素近傍において，ある $\varepsilon>0$ に対し $|f(z)|\leqq Ce^{-\varepsilon|z|}$ を満たすもの）との内積をとり Green の公式を用いれば容易にできる。$u(x)$ が緩増加連続函数という仮定だけでよいかどうかは不明。$p(x,D)$ を施すと無限遠だけに台が残る可能性があるからで，

この点 $\mathcal{S}'$ とは大きな違いがある。

定義. Fourier 超函数 $u(x)$ が無限遠点 $x\infty$ において x_n を real analytic parameter にもつとは，$u(x)$ がその点の近傍において実軸外で $\mathrm{Im}\, z_n = 0$ を超えて緩増加に接続できるような（Fourier 超函数としての）定義函数をもつことである。

Fourier 超函数 $u(x)$ が $\{x_n = 0\}$ の近傍の各点で x_n を real analytic parameter としてもてば，任意の $n-1$ 変数急減少実解析函数 $f(x')$ に対し $\langle u, f\rangle_{x'}$ は $x_n = 0$ の近傍で x_n の実解析函数となることが容易にわかる。

定理 1.2. $p(x, D)$ は緩増加な実解析係数をもつとし，さらに D_n につき Kowalewskian で，平面 $\{x_n = 0\}$ のある帯状複素近傍において $p(x, D)$ の主部の他の係数は有界，また低階の係数はそこで "infra-linear" な増大度（$\forall \varepsilon > 0,\ {}^{\exists} C_\varepsilon > 0,\ |a(z)| \leq \varepsilon |z| + C_\varepsilon$）をもつとする。このとき $p(x, D)u = 0$ の任意の Fourier 超函数解は $x_n = 0$ において x_n を real analytic parameter にもつ。

この証明は Leray による Cauchy-Kowalewsky の定理の精密化 [4] を評価付きで見直した次の補題が用いられる。

補題 1.3 $p(x, D)$ を正則な係数をもつ m 階の方程式とし，

$p_m(0,N)=1$ $(N=(0,\cdots,0,1))$ とする。$v(z)$ を polydisk $\{|z_j|\leq R\ ;\ j=1,\cdots,n\}$ 上の正則函数，$u_k(z')$, $k=0,\cdots,m-1$ を超平面 $\{z_n=0\}$ 内の polydisk $\{|z_j|\leq r\ ;\ j=1,\cdots,n-1\}$ 上の正則函数とする$(r\leq R)$。このとき Cauchy problem

$$\begin{cases} p(z,D)u(z)=v(z) \\ D_n^k u(z',0)=u_k(z'),\quad k=0,\cdots,m-1 \end{cases}$$

は球

$$|z|\leq R_0=\frac{1}{24mn}\,q\,\min\{qR,r\}$$

内に unique な解 $u(z)$ をもちそれは

$$\sup_{|z|\leq R_0}|u(z)|\leq Ce^{M\|p\|}\Big\{\sup_{|z_j|\leq R}|v(z)|+\sum_{j=0}^{m-1}\sup_{|z_j|\leq r}|u_k(z')|\Big\}$$

を満たす。ここに

$$q=1/\sup\{|p_m(z,\zeta)|\ ;\ z\in\mathbb{C}^n,\ |z_j|\leq R,\ \zeta\in\mathbb{C}^n,\ |\zeta_j|=1\}$$

$\|p\|=|z_j|\leq R$ における p の係数の最大値.

この補題をくり返し適用することにより次の補題を得る。

<u>補題 1.4</u>　$f(z)$ を領域

$$W=\{z\in\mathbb{D}^n\times i\mathbb{R}^n\ ;\ a_j\leq x_j\leq b_j,\ c_j\leq y_j\leq d_j,\ j=1,\cdots,n-1,\ |x_n|\leq\delta,\ 0\leq y_n\leq 2\delta\}$$

における緩増加正則函数の section とする$(z_j=x_j+iy_j)$。$u_j(z')$, $j=0,\cdots,m-1$ を領域

$\omega = \{z' \in \mathbb{D}^{n-1} \times i\mathbb{R}^{n-1};\ a_j \leq x_j \leq b_j,\ c_j \leq y_j \leq d_j,\ j=1,\cdots,n-1\}$

における $n-1$ 変数の緩増加正則函数の sections とする。

Cauchy problem

$$\begin{cases} p(z,D)u(z) = f(z) \\ D_n^j u(z)\big|_{z_n = i\delta} = u_j(z'),\ j=0,\cdots,m-1. \end{cases}$$

は p に対する定理1.2と同様の仮定の下に

$$\begin{aligned} W' = \{ z \in \mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n;\ & a_j + \frac{1-\gamma}{\gamma}\delta \leq x_j \leq b_j - \frac{1-\gamma}{\gamma}\delta, \\ & c_j + \frac{1-\gamma}{\gamma}\delta \leq y_j \leq d_j - \frac{1-\gamma}{\gamma}\delta,\ j=1,\cdots,n-1, \\ & |x_n| \leq \delta,\ 0 \leq y_n \leq 2\delta \ \} \end{aligned}$$

において緩増加な正則解をもつ。ここに $\gamma = g^2/24mn\sqrt{2n}$ であり

$$g = 1/\sup\{|p_m(z,\zeta)|;\ z \in W \cap \mathbb{C}^n,\ \zeta \in \mathbb{C}^n,\ |\zeta_j| = 1\}$$

<u>注意</u> b_j は $+\infty$ でもよい。そのときは $b_j - \frac{1-\gamma}{\gamma}\delta$ も $+\infty$ である。

定理1.2を証明するにはFourier超函数解 $p(x,D)u(x)=0$ を定義函数を用いて表わし($p(z,D)F(z)=G(z)$.) 補題1.4を用いて $G(z)$ のうちの $\mathrm{Im}\, z_n = 0$ を存在域の境界とするような成分をとり除く。そうして最後に補題1.3を用いれば定義函数が緩増加な範囲でのびることがわかる。最後の段階の方は初期値が最初に決まってしまうので議論は易しい。むずかしいのは $G(z)$ の悪い成分をとり除く段階であっ

て補題 1.4 を適用するためには，正則域がやや広い緩増加正則函数のいくつかの和（coboundary）になるように表わしておく必要がある（$\tilde{\mathcal{O}}$ の $n-1$ 次元コホモロジーの消滅を用いる）。

同じ補題を用いて次の定理が証明できる．

定理 1.5　$p(x, D)$ は定理 1.2 と同じ仮定を満たすとする。境界作用素 $C_j(x, D)$, $j=0, \cdots, m-1$ は D_n につき j 階 Kowalewskian で緩増加実解析函数を係数にもつとする。K を $\mathbb{D}^{n-1}$ のコンパクト集合とし，$f(x)$ を $K\times\{0\}$ の近傍で定義された急減少実解析函数，$u_j(x')$, $j=0, \cdots, m-1$ を K の近傍で定義された $n-1$ 変数の急減少実解析函数とすれば Cauchy 問題

$$\begin{cases} p(x, D)u(x) = f(x) \\ C_j(x, D)u(x)\big|_{x_n=0} = u_j(x'), \quad j=0, \cdots, m-1 \end{cases}$$

は $K\times\{0\}$ の近傍で急減少実解析解 $u(x)$ をもつ．

この節の最後に $p(x, D)$ の係数に対する条件を落としたときの反例をあげておこう．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - i x^2 u = 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

を考える。この解 $u(x, t) = e^{ix^2 t}$ は補題 1.1 により Fourier 超函数としても解であるが [1] の Lemma 1 を少

し修正した結果を用いると $f(x)=xe^{-\sqrt{x^2+1}}$ という急減少実解析的な test function に対し $\langle u, f\rangle_x$ は $t=0$ で実解析的とならないことがわかる。すなわち $u(x,t)$ はこの節での定義の意味において t を real analytic parameter として含まない。同じ方程式を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - ix^2 u = 0 \\ u(x,0) = e^{-\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

なる初期条件の下で考えるとこの解 $e^{ix^2t-\sqrt{x^2+1}}$ は急減少実解析函数となっていないこともわかる。(ここで $t=-\varepsilon i$ とすれば x につき急減少でないのである。)

§2. Fourier 超函数解の境界値

定理2.1　$p(x,D)$ は前節定理1.2と同じ仮定を満たすとする。u を $D^{n-1}\times\{0<x_n<\delta\}$ における $p(x,D)u=0$ の Fourier 超函数解とすれば Fourier 超函数の境界値 $u(x',+0)$ を定義することが出来て $n-1$ 変数 Fourier 超函数の空間の位相で $u(x',\varepsilon)\longrightarrow u(x',+0)$

証明の概略　まず $0<\varepsilon<\delta$ なる ε に対し $u(x',\varepsilon)$ という speciallization が可能で，それが再び $n-1$ 変数の Fourier 超函数となることは前節定理1.2 の結果である（定義函数を考えればよい）。境界値は［3］の論法において通常の Cauchy-Kowalevsky の定理を定理1.5におき

かえれば同様に定義できる。最後に収束の証明は急減少実解析的定義函数 $f(x')$ に対し Cauchy 問題

$$\begin{cases} {}^t p(x,D) F_\varepsilon(x) = 0 \\ C_j(x,D) F_\varepsilon(x) \big|_{x_n=\varepsilon} = 0, \quad j=0,\cdots,m-2 \\ C_{m-1}(x,D) F_\varepsilon(x) \big|_{x_n=\varepsilon} = f(x') \end{cases}$$

の急減少実解析的解 $F_\varepsilon(x)$ を用いて Green の公式により

$$\begin{aligned} &\langle u(x',+0),\ C_{m-1}(x,D)F_\varepsilon(x)\big|_{x_n=0}\rangle_{x'} \\ &\quad + \cdots + \langle D_n^{m-1} u(x',+0),\ C_0(x,D)F_\varepsilon(x)\big|_{x_n=0}\rangle_{x'} \\ &= \langle p(x,D)u(x),\ F_\varepsilon(x)\rangle \\ &= \langle Y(\varepsilon - x_n)u(x),\ {}^t p(x,D)F_\varepsilon(x)\rangle + \langle u(x',\varepsilon), f(x')\rangle_{x'} \\ &= \langle u(x',\varepsilon),\ f(x')\rangle_{x'} \end{aligned}$$

において $\varepsilon \to 0$ とすれば $F_\varepsilon(x',0) \to f(x')$, その他 $\to 0$ より $\langle u(x',\varepsilon), f(x')\rangle_{x'} \longrightarrow \langle u(x',+0), f(x')\rangle_{x'}$ 従って $u(x',\varepsilon) \longrightarrow u(x',+0)$ が得られる。

Fourier 超函数の位相は local ではないが境界値の対応は local なのでこの定理はいろいろ応用できるものと思われる。なお次のことは境界値の構成の仕方から容易にわかる。

<u>補題 2.2</u> $u(x)$ を $x_n > 0$ における $p(x,D)u = 0$ の classical solution で $x_n = 0$ を超えて C^m 級函数にのばせるものとすれば，[3] で定義した境界値は classical

な境界値に等しい。

uが単に連続で$x_n \downarrow 0$のとき一様収束する（または$\mathcal{D}'$で云々）ときその極限がcohomology的境界値と一致するかどうかはむずかしいのではなかろうか。

§3. 一つの病的な例

$\{\operatorname{Im} z > 0\} \times \{\tau \text{ 任意}\}$で正則な函数

$$f(z, \tau) = \exp\left\{-\frac{ie^{-\tau}}{\sqrt[4]{z}} - \frac{1}{\sqrt[8]{z}}\right\}$$

を考える。$\sqrt[4]{z}$等は正実軸で正実数値をとる分枝を表わす。従って以下$\sqrt[4]{x}$等の実軸上の函数が現われたときも$x<0$ではその意味に解する。

$$\frac{5}{4}\pi - \operatorname{Im}\tau \leq \arg\left(-\frac{ie^{-\tau}}{\sqrt[4]{z}}\right) \leq \frac{3}{2}\pi - \operatorname{Im}\tau$$

だから$\operatorname{Im}\tau \geqq 0$の側から$\operatorname{Im}\tau \downarrow 0$, $\operatorname{Im} z \downarrow 0$とすれば$f(z, \tau)$は$x, t$につき$C^\infty$位相で

$$f(x, t) = \exp\left\{-\frac{ie^{-t}}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right\}$$

というC^∞級函数に収束する。

一方$f(z, \tau)$はFourier超函数を境界値として定め，急減少実解析的test functionを用いてその境界値がC^∞級函数$f(x, t)$に等しいことが確かめられる。この函数につ

いて

1) $f(x,t)$ は t を complex holomorphic parameter とする C^∞ 級函数である。

2) $f(x,t)$ は x を止める毎に t の整函数に拡張できるが $C^\infty(\mathbb{R}_x)$-valued の整函数とはならない ($\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x)$-valued の整函数ともならない)。何となれば $\varphi(x) \in C_0^\infty[0,2]$ を $\varphi(x) = e^{\frac{1}{8\sqrt{x}}}\psi(x)$, $\psi(x)$ は $C_0^\infty[0,2]$ の非負値函数で $0 \leq x \leq 1$ において $\psi(x) \geq e^{-\frac{1}{8\sqrt{x}}}$ となるように選べば $\int f(x,t)\psi(x)\,dx$ が $t=0$ で正則とならないことが [1] Lemma 1 を少し修正した結果を用いて確かめられるのである。

3) 積 $f(x,t)\varphi(x)$ はもはや t を complex holomorphic parameter としない (real analytic parameter ですらない!) ことが 2) の議論で同時にわかる。

文献

[1] Kaneko, A., Generalized unique continuation property for hyperfunctions with real analytic parameters, 数理解析研究所講究録. 近刊

[2] Kaneko, A., Remarks on hyperfunctions with analytic parameters, in preparation.

[3] Komatsu, H., and Kawai, T., Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., <u>7</u>. (1971/72), 95-104.

[4] Leray, J., Problème de Cauchy I, Bull. Soc. Math. France, <u>85</u> (1957), 389-429.