数理解析研究所講究録
228巻 1975年 112-129

ヒルベルト空間の連続場とそれのフォン・ノイマン環のテンソル積への応用

東北大 教養 武元英夫

1. 序論。本講演では、hyperstonean space 上のヒルベルト空間の連続場を考える。特に、$\{H(\omega) : \omega\in\Omega\}$ で $H(\omega)=K$ for $^{\forall}\omega\in\Omega$ になものを考えていく。[14] で、AW^*-module の特殊化として表現されるヒルベルト空間の連続場を与えているが、ここで考えることは constant field について考える。[14] のものは $C(\Omega)$ に値をとる内積が考えられているが、ここでは、その様な性質が挙がらないが、同じ様な性質が言えることがわかる。

本講演では次の様な記号、概念を通して使っていく。

Ω ; hyperstonean space, K ; Hilbert space,

$C(\Omega, K)=F$; Ω 上 K-valued continuous function 全体からなる Banach space.

そのとき、我々は、F に関する weakly continuous constant field of K over $H=W_F(\Omega, K)$ が定義される。ここで、H は $C(\Omega)$-moduled Banach space となる。今、$B(H)$ を H 上の

bounded $C(\Omega)$-module homomorphism 全体の集合とすると、$B(H)$ は type I の von Neumann algebra になることがわかる(定理 B)。

応用として、$\mathcal{A} = C(\Omega)$ とおくと、$\mathcal{A}$ は von Neumann algebra である。今、$\mathfrak{A}$ を K 上に act している von Neumann algebra とすると、$\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A} = W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ となる。ここで、$\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$ は $\mathfrak{A}$ と $\mathcal{A}$ の W^*-tensor product であり、$W(\Omega, K, \mathfrak{A}) = \{A \in B(H) : A(\omega) \in \mathfrak{A} \text{ for } ^\forall\omega \in \Omega\}$ を表わしている。

上の事は、今 $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega_0, \mu)$ として表現しておき、$\mathfrak{A}$ が separable Hilbert space に act しているとき、$\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A} = L^\infty(\Omega_0, \mu, \mathfrak{A})$ という Sakai [10; Theorem 1.22.13] の結果を $\mathfrak{A}$ の separability の条件なしで、表現が出来ることを言っている。

本講演での主な考えは Kaplansky's paper [5] と講演者の結果 [14], [15] によるところが多い。ここで、一つ一つの結果について証明をつけるには紙面が少なすぎるので、主な結果について概略をつけるにとどめる。

2。ヒルベルト空間の Constant field.

最初に、次の定義を導入する。

<u>定義 1.</u> $H(\omega) = K$ for $^\forall\omega \in \Omega$, $\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod H(\omega)$ が F に関して weakly continuous vector field であるとは次の二つの性質を満すときである、

(1) the function : $\omega \to \|\xi(\omega)\|$ が Ω 上で有界である。

(2) $\forall \eta \in F$ に対して、$\omega \to (\xi(\omega)|\eta(\omega))$ が Ω 上で連続である。

F に関して weakly continuous vector fields 全体の集合を $W_F(\Omega, K)$ (又は単に $W(\Omega, K)$) とおき、これを K の weakly continuous な constant field over Ω と呼ぶことにする。

上の定義で、$\xi \in H = W(\Omega, K)$ に対して、$\|\xi\| = \sup\{\|\xi(\omega)\| : \omega \in \Omega\}$ とおくと、norm $\|\cdot\|$ でもって H が $C(\Omega)$-moduled Banach space になることは、簡単な計算でわかる。

次の概念を入れておく。$\forall \xi, \eta \in H$ に対して、

$(\xi, \eta) : \omega \to (\xi(\omega)|\eta(\omega))$, $\quad |\xi| : \omega \to \|\xi(\omega)\|$.

すると、一般には (ξ, η), $|\xi|$ は $C(\Omega)$ の元とはならない。しかし、$\xi \in F$ ならば (ξ, η), $|\xi| \in C(\Omega)$ となっている。

逆に、$\xi \in H$ であって、$|\xi| \in C(\Omega)$ ならば、$\xi \in F$ になることは簡単な計算で示される。

すると、我々は次の簡単であるが、有用である結果を示される。

<u>補題2.</u> $\xi \in H = W(\Omega, K)$ に対して、$C(\Omega)$ の元からなる mutually orthogonal projections の maximal family $\{e_\iota\}$ が存在して、$e_\iota \xi \in F$ for $\forall \iota$ となる。

証明、$\{\bar{\eta}_\alpha\}$ を K での一つの c.n.o.s. とする。すると、各 ω に対して、$\xi(\omega) = \sum f_\alpha(\omega)\bar{\eta}_\alpha$，$\|\xi(\omega)\|^2 = \sum|f_\alpha(\omega)|^2$ となる。ここで、H の定義より、$\forall\eta\in F$ に対して，$\omega \to (\xi(\omega)|\eta(\omega))$ が連続であることを考えると、各 f_α は $C(\Omega)$ の元となる。更に、$\omega \to \|\xi(\omega)\|$ は下に半連続である。そのとき、hyperstonean space の性質を考えることによって、$C(\Omega)$ での mutually orthogonal projections の maximal family $\{e_\iota\}$ が存在して、$\omega\to \|(e_\iota\xi)(\omega)\|$ が continuous となる。すると、$e_\iota\xi\in H$ でもあるから、$e_\iota\xi\in F$ for all ι が成立する。

補題2の形を考えて次の様な性質が簡単にわかる。即ち、

$\xi\in H$，$\{e_\iota\}\subset C(\Omega)$: orthogonal projections，$\sum e_\iota = I$

$$\Rightarrow \quad \|\xi\| = \sup_\iota \|e_\iota\xi\|.$$

補題2の系として、我々は次の結果をもつ。

系3。 $\xi\in F = C(\Omega, K)$；$\{\bar{\eta}_\alpha\}_{\alpha\in A}$: K での一つの c.n.o.s.

$$\Rightarrow \exists\{f_n\}\subset C(\Omega),\ \exists\{\bar{\eta}_n\}\subset\{\bar{\eta}_\alpha\}_{\alpha\in A} :\ \xi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\eta_n$$

ここで $\eta_n\in F$ は $\bar{\eta}_n$ による constant field である。即ち、$\eta_n(\omega) = \bar{\eta}_n$ for $\forall\omega\in\Omega$ ということである。

以上のことを考えると、我々は次の結果をもつ。即ち．
$A, B \in B(H)$ であって $A|F = B|F$ ならば $A = B$ である。

更に，ヒルベルト空間上で成立している Riesz's theorem に似た結果を示すことが出来る。この証明は [14 ; Theorem 3.6] と同様に示される。

<u>補題4.</u> ϕ ; $H = W(\Omega, K) \to C(\Omega)$, bounded $C(\Omega)$-module, homomorphism
$\Rightarrow$ $\exists \xi_0 \in H$; $\phi(\xi) = (\xi, \xi_0)$ for $\forall \xi \in F$, $\|\phi\| = \|\xi_0\|$.

上の結果で．$\xi \in H$ で $\{e_\iota\} \subset C(\Omega)_p$ を $\sum e_\iota = I$, $e_\iota \xi \in F$ としておくと．$\phi(\xi) = \sum e_\iota (e_\iota \xi, \xi_0)$ となる。更に，$\|\phi\| = \|\phi|F\|$ でもあると同じく．$A \in B(H)$ に対して．$\|A\| = \|A|F\|$ でもある。補題4から，我々は．AW*-module に関する主なる性質であった次の結果を示すことが出来る。

<u>命題5.</u> $\{\xi_\alpha\} \subset H = W(\Omega, K)$: bounded set. $\{e_\alpha\} \subset C(\Omega)$: mutually orthogonal projections a family, $\sum e_\alpha = I$
$\Rightarrow$ $\exists_1 \xi \in H$: $e_\alpha \xi = e_\alpha \xi_\alpha$ for all α.

上の ξ を $\xi = \sum e_\alpha \xi_\alpha$ とかくことにする。すると．補題4と命題5を考えて．$A \in B(H)$ に対して．Adjoint operator が

定義できることがわかる。まず、補題4から、$A \in B(H)$ に対して、$\exists A^{\#}: F \to H$, bounded $C(\Omega)$-module homomorphism,

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A^{\#}\eta) \quad \text{for } {}^{\forall}\xi, \eta \in F.$$

更に、 命題5を考えると、$A^{\#}$ は $B(H)$ の元として一意に拡張される。これを A^{*} とかいて、A の adjoint operator と呼ぶことにする。すると、我々は、簡単な計算で、$\|A\| = \|A^{*}\|$, $\|A\|^{2} = \|A^{*}A\|$ を示すことが出来る。これから、まず、$B(H)$ が C^{*}-algebra になるということがわかった。後で、$B(H)$ は type I の von Neumann algebra になることを示す。

上の事を考えるために、我々は次のような事柄を考える。

$\mathfrak{M}$ を $H = W(\Omega, K)$ の closed submodule とする。そのとき、[15; Proposition 1.3] と同じ方法で、各 $\omega \in \Omega$ に対して $(\mathfrak{M} \cap F)(\omega)$ が K の closed subspace になることが示される。これから、我々は次の概念を導入する。

<u>定義6.</u> $\mathfrak{M}$: H の closed submodule. $\mathfrak{M}_{0} = \mathfrak{M} \cap F$.

$\mathfrak{M}$ が H の continuous submodule であるとは、次の性質(*)が満足されることである。

(*) $\xi \in \prod \mathfrak{M}_{0}(\omega) \ni \omega \to \|\xi(\omega)\|$: 有界, ${}^{\forall}\eta \in \mathfrak{M}_{0}$ に対して $\omega \to (\xi(\omega) \mid \eta(\omega))$ が連続 $\Rightarrow \xi \in \mathfrak{M}$

定義6によって定まるcontinuous submoduleとprojectionとの間の関係について述べておこう。

<u>補題7.</u> $A \in B(H)$に対して、K上の有界作用素からなる場$\{A(\omega)\}$が存在して、次の性質が満される。$\{(A\xi)(\omega)\} = \{A(\omega)\xi(\omega)\} \in H$ for $^\forall \xi \in F$ and $\omega \in \Omega$。逆に、$\{A(\omega)\}$を上の性質を満す場とする(これをweakly continuous fieldと呼ぶ)と、$A \in B(H)$が存在して$(A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega)$ for $^\forall \xi \in F$, $\omega \in \Omega$が成立する。

上の事から、次の事柄が簡単な計算で示される。
$A, B \in B(H)$, $\xi \in F$に対して、次の性質を満すようにnowhere dense setが存在する。$(AB)(\omega)\xi(\omega) = A(\omega)B(\omega)\xi(\omega)$ for $^\forall \omega \in \Omega \setminus N$。
更に、$A(\omega)^* = A^*(\omega)$ for $^\forall \omega \in \Omega$が示される。

以上より、次が示される。
<u>補題8.</u> $\mathfrak{M}$: continuous submodule, $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \wedge F$,
$P(\omega)$: $K \to \mathfrak{M}_0(\omega)$, projection.
$\Rightarrow$ $P = \{P(\omega)\}$; weakly continuous, $PH = \mathfrak{M}$.

<u>補題9.</u> $\mathfrak{M}$: continuous submodule, $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \wedge F$
$\Rightarrow$ 次の性質が挙がる。

(1) $\{\xi_\alpha\}$: bounded set in $\mathfrak{M}$, $\{e_\alpha\}$: maximal family of orthogonal projections in $C(\Omega)$, その時, $\xi = \sum e_\alpha \xi_\alpha$ は $\mathfrak{M}$ の元である。

(2) $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \cap F$ とすると，すべての $\omega \in \Omega$ に対して，$\mathfrak{M}(\omega) = \mathfrak{M}_0(\omega)$ が成立する。

補題 8, 9 から，$\mathfrak{M}$ が continuous submodule ならば $H \to \mathfrak{M}$ への projection と，次の性質(**) をもつことがわかった。

(**) $\mathfrak{M}$ が H の closed submodule であって，次の性質を満す．$\{\xi_\alpha\}$ を $\mathfrak{M}$ の bounded subset とし，$\{e_\alpha\}$ を $C(\Omega)$ の maximal family of orthogonal projections とした時，$\xi = \sum e_\alpha \xi_\alpha$ は $\mathfrak{M}$ の元となる。

$\mathfrak{M}$ が continuous submodule の時，(**) を満していることは，補題 9 でわかっている。更に，$P \in B(H)$ が projection ならば，$\mathfrak{M} = PH$ も (**) を満すことが簡単な計算でわかる。逆に，closed submodule $\mathfrak{M}$ が (**) を満すならば，projection P が存在して，$PH = \mathfrak{M}$ になることが次の補題で示される．これの証明には紙面を多く必要とするので証明は除く。

補題10. $\mathfrak{M}$: closed submodule of H, その時，次は同値．

(1) $\mathfrak{M}$ が (**) を満す．

(2) projection P が存在して，$PH = \mathfrak{M}$ となる。

次に，補題9の逆を示そう。

補題11. $\mathfrak{M}$: closed submodule, $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \cap F$.

$\mathfrak{M}$は(**)を満し，$\mathfrak{M}(\omega) = \mathfrak{M}_0(\omega)$ for $\forall\omega \in \Omega$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$ は continuous submodule である。

証明.

$\xi = \{\xi(\omega)\} \in \prod \mathfrak{M}_0(\omega)$ を次の性質を満すものとする.

◦ $\omega \to \|\xi(\omega)\|$: bounded, ◦ $\forall\eta \in \mathfrak{M}_0$ に対して，$\omega \to (\xi(\omega)|\eta(\omega))$ が continuous である.

その時，$\xi \in \mathfrak{M}$ になることを示せばよい。

$\xi(\omega) \in \mathfrak{M}_0(\omega)$ for $\forall\omega\in\Omega$ であって，$\forall\eta \in \mathfrak{M}_0$ に対して，$\omega \to (\xi(\omega)|\eta(\omega))$ が continuous であるから，$\omega \to \|\xi(\omega)\|$ は下に半連続となる. 従って，$C(\Omega)$ の projections からなる $\sum e_\alpha = I$ の family $\{e_\alpha\}$ が存在して次の性質を満す，即ち，$\omega \to \|(e_\alpha\xi)(\omega)\|$ は連続である。すると，$e_\alpha\xi \in \mathfrak{M}_0$ となり，$\mathfrak{M}$ が(**)を満すことより，$\xi' = \sum e_\alpha \xi_\alpha$ は $\mathfrak{M}$ の元となる。そこで，仮定から，$\mathfrak{M}(\omega) = \mathfrak{M}_0(\omega)$ for $\forall\omega\in\Omega$ であることと，$\xi(\omega) = \xi'(\omega)$ for $\forall\omega \in \cup G_\alpha$ である。ここで，G_α は e_α に対応する Ω での clopen set である。そこで，$\cup G_\alpha$ が dense であることと，$\forall\eta \in \mathfrak{M}_0$ に対して，$\omega \to (\xi(\omega) - \xi'(\omega)|\eta(\omega))$ が連続であることより，$\xi(\omega) = \xi'(\omega)$ for $\forall\omega\in\Omega$ となる。従って，$\xi = \xi'$ となって，$\xi \in \mathfrak{M}$ となる。従って，$\mathfrak{M}$ は continuous submodule となる。

以上をまとめて，次の定理を得る。

<u>定理 A.</u> $\mathfrak{M}$: closed submodule， $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \wedge F$.

(1) 次は同値.

(α) $\mathfrak{M}$ が $(**)$ を満す。 (β) $\exists P$: projection of H onto $\mathfrak{M}$.

(2) 次は同値

(α') $\mathfrak{M}$ が continuous submodule である.

(β') $\mathfrak{M}$ は $(**)$ を満し，$\mathfrak{M}(\omega) = \mathfrak{M}_0(\omega)$ for $^\forall \omega \in \Omega$ が成立する。

次に，$B(H)$ が center を $C(\Omega)$ とする type I von Neumann algebra になることを示したい。これには，次の abelian projection を決定する補題を必要とする。

<u>補題 12.</u> $\eta \in H$ を次の性質を満す元とする.

$\exists \{e_\alpha\} \subset C(\Omega)$: orthogonal projections, $\sum e_\alpha = e$, $e_\alpha |\eta| = e_\alpha$, $(I-e)|\eta| = 0$

すると，$P\xi = (\xi, \eta)\eta$ for $^\forall \xi \in F$ によって定まる operator P は abelian projection となる。逆に，すべての abelian projection は上の形で決定される。

<u>定理 B.</u> $B(H)$ は center を $C(\Omega)$ とする type I von Neumann algebra となる。

証明. $B(H)$ の center が $C(\Omega)$ になることは明らかである。更に，補題12を考えると，$B(H)$ が abelian projectiojection を充分沢山もっていることがわかる。そこで，$B(H)$ が AW^*-algebra になることが示されると，$B(H)$ は center が von Neumann algebra である type I AW^*-algebra であるから，Kaplansky [4; Theorem 2] によって，$B(H)$ が type I von Neumann algebra であることがわかる。そこで，$B(H)$ が AW^*-algebra になることを示そう。それには，[5], [7] からわかるように，次のことを示せばよい．

$\mathfrak{S} \subset B(H)$: any subset, $\mathfrak{L}(\mathfrak{S})$: $\mathfrak{S}$ の left anihilator

$\Rightarrow$ $\exists P \in B(H)$: projection, $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}) = B(H)P$.

上のことを示せばよい。$B \in B(H)$ に対して，$\mathcal{R}(B)$ を B の range とすると，$\mathfrak{L}(\mathfrak{S}) = \{A \in B(H) : A\mathfrak{N} = \{0\}\}$ である。ここで，$\mathfrak{N} = \bigcup\{\mathcal{R}(B) : B \in \mathfrak{S}\}$ である。今，closed submodule $\mathfrak{M}$ を次の様に定める．

$\mathfrak{M}$ = the norm closure of $\{\sum e_\alpha \xi_\alpha : \{\xi_\alpha\} \subset \mathfrak{N}$: bounded, $\{e_\alpha\} \subset C(\Omega)$: orth.$\}$

すると，[15] で示されていることより，$\mathfrak{M}$ は定理 A で述べられている性質 (**) を満足している。従って，定理 A より，$\mathfrak{M}$ 上への projection Q が存在する。$\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{M}$ の性質より，明らかに，$\mathfrak{L}(\mathfrak{S}) = \{A \in B(H) : A\mathfrak{M} = \{0\}\}$ であるから，$P = I - Q$ とおくと $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}) = B(H)P$ となる。故に，$B(H)$ は type I von Neumann algebra で，その center は $C(\Omega)$ となる。

3. The weakly continuous constant field of von Neumann algebra.　ここでは，序論で述べた第二の問題について考える。前の section で $A \in B(H)$ に対して，K 上の bounded operators からなる field $\{A(\omega)\}$ が存在して，for ${}^\forall \xi \in F$, $\omega \in \Omega$ に対して，$(A\xi)(\omega) = A(\omega)\xi(\omega)$ になることを示した。そこで，π_ω を $B(H)$ から $B(K)$ の map で $\pi_\omega(A) = A(\omega)$ とすると，π_ω は positive linear mapping となる。しかし，[12], [13] からわかるように π_ω は $*$-homomorphism にはならない。

<u>定義 13.</u> $H = W(\Omega, K)$: weakly continuous constant field of K.

$\mathfrak{A}$: K 上に act している von Neumann algebra

そのとき，$W(\Omega, K, \mathfrak{A}) = \{A \in B(H) : A(\omega) \in \mathfrak{A} \text{ for } {}^\forall \omega \in \Omega\}$ とおき，これを von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ の constant field とよぶ。

まず，$W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ が von Neumann algebra になることを示さなければならない。それには，まず，$W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ が $B(H)$ の C^*-subalgebra になることと，$B(H)$ での double commutant $W(\Omega, K, \mathfrak{A})''$ が $W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ と一致することを示せばよい。しかし，今，π_ω が multiplicative でないから，$W(\Omega, K, \mathfrak{A}) \ni A, B$ に対して，AB が $W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ の元となることを示さなければならない。それには，補題 7 の後で注意したことを考えることによって，示

することができる。これが、示されると、π_ω は positive linear mapping であるから、$W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ は C^*-subalgebra of $B(H)$ になることが簡単にわかる。次に、$W(\Omega, K, \mathfrak{A})'' = W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ になることは、$\mathfrak{A}$ の元からなる constant field が $W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ の元になることと、$W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ の定義より示される。以上より、我々は次の定理を得る。

<u>定理 C.</u> $W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ は von Neumann algebra である。

$\mathfrak{A}$ を K 上に act している von Neumann algebra, $\mathcal{A} = C(\Omega)$ とした とき、$\mathfrak{A}$ と $\mathcal{A}$ の W^*-tensor product $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$ が $W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ と $*$-isomorphism になることを示そう。その前に、W^*-tensor について の解説をしておく。(see [6], [10], [11], [16] and [18])

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ を von Neumann algebra とし、$\mathfrak{A}_*$, $\mathfrak{B}_*$ をそれぞれ、$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の predual space とする。α_0 を $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ の algebraic tensor product) 上の least C^*-cross norm とし、α_0^* を α_0 の dual norm とする。そのとき、$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の W^*-tensor product を $(\mathfrak{A}_* \otimes_{\alpha_0^*} \mathfrak{B}_*)^*$ でもって定義する。今、$\mathfrak{B}$ が commutative von Neumann algebra $\mathcal{A}$ であるとき、$\alpha_0 = \lambda$, $\lambda^* = \gamma$ となる。ここで、λ-norm, γ-norm は次の様に定義される。

ここで、λ, γ- norm は一般の Banach space の algebraic tensor product 上で定義されるのであるが、一つ一つ述べて行くと、記号が多くなるので、$\mathfrak{A} \odot \mathcal{A}$, $\mathfrak{A}_* \odot \mathcal{A}_*$ でそれぞれの定義を述べていくことにする。($\mathfrak{A}_* \odot \mathcal{A}_* \subset \mathfrak{A}^* \odot \mathcal{A}^*$ として考える)

$\tilde{A} = \sum_{j=1}^{n} \bar{A}_j \otimes z_j \in \mathfrak{A} \odot \mathcal{A}$, $\Phi \in \mathfrak{A}^* \odot \mathcal{A}^*$ に対して、

$$\lambda(\tilde{A}) = \sup\{ | \sum_{j=1}^{n} \langle \bar{A}_j , \varphi \rangle \langle z_j , \psi \rangle | : \varphi \in \mathfrak{A}_*, \psi \in \mathcal{A}_*, \|\varphi\| = \|\psi\| = 1 \}$$

$$\lambda^*(\Phi) = \sup\{ | \langle \tilde{A} , \Phi \rangle | : \lambda(\tilde{A}) \leqq 1 \}$$

$$\gamma(\Phi) = \inf\{ \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\| \cdot \|\psi_i\| : \Phi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes \psi_i \}$$

以上から $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$ と $W(\Omega . K . \mathfrak{A})$ の $*$-isomorphic になることを示す。それには次のような Tomiyama [17 : Theorem 1] を必要とする。ここで、一般の von Neumann algebra $\mathcal{B}$ をとって来ても言えているがここでは、$\mathcal{A}$ に対して記しておこう。

$\varphi \in \mathfrak{A}_*$ に対して、次の性質を満す $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ への σ-weakly continuous linear mapping R_φ が存在する。

(1) $R_\varphi (\sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i \otimes z_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{A}_i , \varphi \rangle z_i$

(2) $R_\varphi ((I \otimes z_1) \tilde{X} (I \otimes z_2)) = z_1 R_\varphi (\tilde{X}) z_2$, $\tilde{X} \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$

(3) $\langle \tilde{X} , \varphi \otimes \psi \rangle = \langle R_\varphi (\tilde{X}) , \psi \rangle$, $\tilde{X} \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$, $\psi \in \mathcal{A}_*$.

以上から、次の定理を得る。

定理D. $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{B}$ と $W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ は *-同型である。

証明(略証). $W(\Omega, K, \mathfrak{A})\ni A=\{A(\omega)\}$ に対して、$\mathfrak{A}_*\otimes_{\lambda^*}\mathcal{B}_*$ 上の linear functional $\hat{A}$ を定義しよう。$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\otimes\psi_i\in\mathfrak{A}_*\odot\mathcal{B}_*$ に対し、

$$\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\otimes\psi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(\langle A,\varphi_i\rangle)$$

ここで、$\langle A,\varphi\rangle$ は連続関数 $\omega\to\langle A(\omega),\varphi\rangle$ を意味している。そこで、$\hat{A}$ が well-defined になることは、$(\mathfrak{A}_*)^*=\mathfrak{A}$ であることと、[11; Lemma 1.2] からわかる。その時、

$$|\hat{A}(\Phi)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\psi_i(\langle A,\varphi_i\rangle)\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|\varphi_i\|\cdot\|\psi_i\|\right)\|A\|$$

となる。従って、$|\hat{A}(\Phi)|\leq\gamma(\Phi)\|A\|$ である。今、$\lambda^*=\gamma$ であるから、$\hat{A}\in(\mathfrak{A}_*\otimes_{\lambda^*}\mathcal{B}_*)^*=\mathfrak{A}\otimes\mathcal{B}$ と考えられる。

逆に、$\hat{A}$ を $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{B}$ の任意の元とすると、$\xi,\eta\in K$ に対して、

$\exists R_{\xi,\eta}$: $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ σ-weakly continuous linear mapping.

そこで、$R_{\xi,\eta}(\hat{A})$ は $C(\Omega)$ の元であるから、for $\omega\in\Omega$ に対して次の様な K 上の bounded bilinear form を考える。

$$\langle\xi|\eta\rangle = R_{\xi,\eta}(\hat{A})(\omega)$$

すると、$\exists\{A(\omega)\}$: $(A(\omega)\xi|\eta)=R_{\xi,\eta}(\hat{A})(\omega)$ for $\forall\xi,\eta\in K$, $\omega\in\Omega$

そのとき、補題2の系より、$A=\{A(\omega)\}\in B(H)$ であることがわかる。更に、$\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}')'$ という性質から、$A(\omega)\in\mathfrak{A}$ for $\forall\omega\in\Omega$.

従って、$A\in W(\Omega, K, \mathfrak{A})$ になることがわかる。更に、上の対応で証明から簡単にわかることだが、$\|A\|=\|\hat{A}\|$ となっている。

$$\pi : W(\Omega, K, \mathfrak{A}) \ni A \longrightarrow \hat{A} \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$$

such that, for $\forall \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes \psi_i \in \mathfrak{A}_* \odot \mathcal{A}_*$

$$\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes \psi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\langle A, \tilde{\varphi}_i \rangle)$$

とおると、π が上への isometric, $*$-preserving linear mapping であることは簡単な計算でわかる。そこで、π が multiplicative になることを示そう。それには、$A, B \in W(\Omega, K, \mathfrak{A})$, $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in K$ に対して、$R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\widehat{AB}) = R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\hat{A}\hat{B})$ になることを示せばよい。

まず、$\hat{A} \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$, $\hat{B} \in \mathfrak{A} \odot \mathcal{A}$ に対して、次の事実が示される。

$$(B(\omega) A(\omega) \bar{\xi} \mid \bar{\eta}) = ((BA)(\omega) \bar{\xi} \mid \bar{\eta}) \qquad \text{for } \forall \omega \in \Omega,\ \bar{\xi}, \bar{\eta} \in K$$

$$(A(\omega) B(\omega) \bar{\xi} \mid \bar{\eta}) = ((AB)(\omega) \bar{\xi} \mid \bar{\eta})$$

特に、$R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\widehat{AB}) = R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\hat{A}\hat{B})$, $R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\widehat{BA}) = R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\hat{B}\hat{A})$ for $\forall \bar{\xi}, \bar{\eta} \in K$ である。更に、$B(\omega)A(\omega) = (BA)(\omega)$, $A(\omega)B(\omega) = (AB)(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$ をも示されていることになる。

$\tilde{A}, \hat{B} \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{A}$, $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in K$ に対して、Sakai [10] であるように s^*-topology を考えると、

$$\exists \{\hat{A}_\alpha\} \subset \mathfrak{A} \odot \mathcal{A} : \quad \hat{A}_\alpha \to \tilde{A} \quad (s^*\text{-topology})$$

すると、$(A_\alpha \xi, \eta) \to (A\xi, \eta)$, $R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\hat{B}\hat{A}_\alpha) \to R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\hat{B}\hat{A})$ (σ-weak topology) である。ここで $\xi(\omega) = \bar{\xi}$, $\eta(\omega) = \bar{\eta}$ である。前に述べたことを考えると、

$$R_{\bar{\xi},\bar{\eta}}(\hat{B}\hat{A}_\alpha)(\omega) = (A_\alpha \xi, B^* \eta)(\omega) \quad \text{for } \forall \omega \in \Omega,\ \alpha \text{ である.}$$

今，$B^*\eta = \sum e_\iota \eta_\iota$（補題2）と表わし，$G_\iota$ と e_ι に対応する Ω での clopen set とする。そのとき，

$$e_\iota(A_\alpha\xi, B^*\eta) = (A_\alpha\xi, \eta_\iota) \to e_\iota(A\xi, \eta_\iota) \quad (\sigma\text{-weak})$$

$$e_\iota R_{\xi,\bar\eta}(\hat B \hat A_\alpha) \Longrightarrow e_\iota R_{\xi,\bar\eta}(\hat B \hat A) \quad (\sigma\text{-weak})$$

$\therefore$ $e_\iota R_{\xi,\bar\eta}(\hat B \hat A) = e_\iota(A\xi, B^*\eta)$ である。すると，$\omega \in \cup G_\iota$ に対し，

$$R_{\xi,\bar\eta}(\hat B \hat A)(\omega) = (A\xi, \eta_\iota)(\omega) = (A\xi, B^*\eta)(\omega)$$

今，$\xi, \eta \in F$ であるから，$(A\xi, B^*\eta)(\omega) = ((A\xi)(\omega) | (B^*\eta)(\omega)) = (A(\omega)\bar\xi | B(\omega)^*\bar\eta) = (B(\omega)A(\omega)\bar\xi | \bar\eta)$ for $\forall\omega\in\Omega$ である。更に，

$\exists N$: nowhere dense set, $((BA)(\omega)\bar\xi|\bar\eta) = (B(\omega)A(\omega)\bar\xi|\bar\eta)$ for $\forall\omega\notin N$.

そこで，$(\cup G_\iota)\cap(\Omega\setminus N)$ が Ω で dense であることと，$R_{\xi,\bar\eta}(\hat B\hat A)$ が $C(\Omega)$ の元，$\omega \to ((BA)(\omega)\bar\xi|\bar\eta)$ が continuous function であることより，$R_{\xi,\bar\eta}(\hat B \hat A)(\omega) = ((BA)(\omega)\bar\xi|\bar\eta)$ for $\forall\omega\in\Omega$.

従って，$R_{\xi,\bar\eta}(\hat B \hat A) = R_{\xi,\bar\eta}(\widehat{BA})$ である。

以上から，π が multiplicative であることがわかった。

故に，π は $*$-isomorphism である。

定理Dでは nowhere dense set というものを成功的に扱っている。測度論（i.e. 積分表現）的に考えると nowhere dense set は null-set に対応して考えられるものである。ここでは，それを連続関数という考えの下で解消をしているわけである。

講究内容に必要な主たる文献

1. J. Dixmier; Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
2. __________; Summa Brasil Math., 2(1951), 151 - 182.
3. N. Dunford and B. Pettis; Trans. Amer. Math. Soc., 47(1940), 323 - 392.
4. I. Kaplansky; Ann. of the Math., 56(1952), 460 - 472.
5. ____________; Amer. Journ. Math., 75(1953), 839 - 859.
6. Y. Misonou; Tohoku Math. Journ., 6(1954), 189 - 204.
7. C. Rickart; Ann. of the Math., 47(1946), 528 - 550.
8. K. Saito; Tohoku Math. Journ., 19(1967), 332 - 340.
9. S. Sakai; Bull. Amer. Math. Soc., 70(1964), 393 - 398.
10. S. Sakai; C*-algebras and W*-algebras, Springer-Verlag, 1971.
11. R. Schatten; Theory of cross-space, Princeton, 1950.
12. H. Takemoto; Tohoku Math. Journ., 21(1969), 152 - 157.
13. ___________; Tohoku Math. Journ., 22(1970), 210 - 211.
14. ___________; Michigan Math. Journ., 20(1973), 115 - 127.
15. ___________; Decomposable operators in continuous fields of Hilbert spaces, to appear in Tohoku Math. Journ., 27 (1975),
16. M. Takesaki; Tohoku Math. Journ., 16(1964), 111 - 122.
17. J. Tomiyama; Pacific Journ. of Math., 30(1969), 263 - 270.
18. T. Turumaru; Tohoku Math. Journ., 6(1954), 208 - 211.