

Tensor product と function algebra の
counter examples

茨城大 理 林 実樹広

関数環のテンソル積は, pathological example を作ること
や interpolation の話に応用されたりいたしますが, テンソル
積そのものが研究されたことは今のところあまりないよう
です。ここでは, §1 で, テンソル積の定義と基本的な性質に
ついて述べ, §2 では Sidney の example を紹介します。

§1. 関数環のテンソル積 A, B をそれぞれコンパクト空間 X, Y 上の関数環とする。 $f \in A$ と $g \in B$ に対して $X \times Y$ 上の連続関数 $f \otimes g$ を $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ により定義する。代数的なテンソル積 $A \otimes B$ は $\{f \otimes g: f \in A, g \in B\}$ の linear span と同一視されて, 関数環 A, B のテンソル積 $A \hat{\otimes} B$ は, $A \otimes B$ の $C(X \times Y)$ における uniform closure として定義される。このとき次の事柄が成立つ

1) $\Sigma_{A \hat{\otimes} B} = \Sigma_A \times \Sigma_B$; Σ_X は spectrum (maximal ideal space)

ともいう) をあらわす。

2) $\widehat{A \otimes B} \cong \widehat{A} \otimes \widehat{B}$; \widehat{A} , \widehat{B} , $\widehat{A \otimes B}$ はそれぞれのゲルファント変換をあらわす。とくに, 関数環のテンソル積は台になる空間 X , Y の定め方によらない。

3) $\mathcal{M}_{A \otimes B} = \mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$; $\mathcal{M}_{(\cdot)}$ は Shilov 境界をあらわす。

4) $c(A \otimes B) = c(A) \times c(B)$; $c(\cdot)$ は Choquet 境界 (strong boundaryともいう) をあらわす。

5) $A \otimes B$ の Gleason part は, P , Q をそれぞれ A , 及び B に関する Gleason part として, $P \times Q$ という形できっちりあらわされる。

証明は, 次の簡単な性質から容易にわかる。

[T1] $A \otimes B$ は $A \widehat{\otimes} B$ の中で dense である。

[T2] 任意の $f \in A \widehat{\otimes} B$ に対して, $f(\cdot, y) \in A$ for $\forall y \in Y$, $f(x, \cdot) \in B$ for $\forall x \in X$ 。

次のことも成立つ

6) $E \subseteq X$, $F \subseteq Y$ をそれぞれ A , B に関する peak set [interpolation set] とすると, $E \times F$ は $A \widehat{\otimes} B$ に関する peak [interpolation set] となる。

以上述べたことは関数環の任意の族 $\{A_s\}_{s \in S}$ のテンソル積 $\widehat{\bigotimes_{s \in S} A_s}$ に対しても同じように成立する。

Note interpolation set については, 次のような一般化が

なされている[3]: A を $C(X)$ の closed subspace, B を Banach space として, $A \otimes B$ を $C(X, B)$ [X から B への連続関数全体] の subspace として $A \hat{\otimes} B$ を定義する。 E を X の closed subset として, $(A \hat{\otimes} B)|_E = C(E, B)$ となるとき, E を A の B -interpolation set ということにすると, 次の事柄は同値である。

a) 任意の Banach space B に対して, E は A の B -interpolation set である。

b) E は A の l^1 -interpolation set である。

c) 定数 $M > 0$ があって, E の互いに交じわらない closed subset K_1, \dots, K_n 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $g_1, \dots, g_n \in A$ があって, $g_i|_{K_j} = \delta_{ij}$ かつ $\| \sum_{i=1}^n |g_i| \|_X \leq M + \varepsilon$.

A が関数環のときは, E が A の interpolation set ということと c) とは同値である [A が単に subspace というだけでは, 同値とならないそうである]。 (Note 終)

以上の基本的な性質を一步はずれると, 関数環のテンソル積でおかしくなることや, わからないことが沢山あります。

例 1.1 $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ として, Δ^n を polydisc とする。 $H^\infty(\Delta^n)$ を Δ^n 上の有界正則関数の全体, $A(\Delta^n)$ を Δ^n 上で連続で, Δ^n 上で正則な関数の全体とする。このとき $A(\Delta) \hat{\otimes} A(\Delta) = A(\Delta^2)$ であるのに対して, $H^\infty(\Delta) \hat{\otimes} H^\infty(\Delta) \subsetneq H^\infty(\Delta^2)$ である; 実際, Δ^2 から Δ への写像 $(z, w) \mapsto zw$ は $\Sigma_{H^\infty(\Delta^2)}$ から $\Sigma_{H^\infty(\Delta)}$ への写像に連続

延長出来るのに, $\Sigma_{HP(w)} \times \Sigma_{HP(w)}$ から $\Sigma_{HP(w)}$ へは連続に延長されない [たとえば, $e^{\frac{zw+1}{zw-1}}$ を考えて, z を nontangential に, w は tangential に 1 に収束させるフィルターを考慮して見ればよい].
 —別証明が [1], [6] にある。とくに [1] は興味ある。

例 1.2 $A(\Delta^2)$ の Shilov 境界は $T^2 = \{(z, w) : |z|=|w|=1\}$ であるが, この中で, $\{(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ は peak interpolation set であるが, $\{(e^{i\theta}, e^{i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ は peak set でも interpolation set でもない。とくに, $E \subseteq X \times Y$ のすべての切り口 $E \cap X_y$, $E \cap Y_x$ for $\forall x \in X, \forall y \in Y$, が peak set でも, E が peak set とは限らない; $X_y = \{(x, y) : x \in X\}$, $Y_x = \{(x, y) : y \in Y\}$ とする。

Q1 $A \hat{\otimes} B$ の peak set, interpolation set は, A 及び B の言葉で特徴付けられるか?

例 1.3 $A(\Delta)$ の原点 0 における T 上の表現測度は $\frac{1}{2\pi} d\theta$ 1 個だけであるが, $A(\Delta^2)$ の T^2 上の表現測度は無限次元である [$e^{i\theta} \rightarrow (e^{i\theta}, e^{i\theta})$ によって $\frac{1}{2\pi} d\theta$ から T^2 上に導入される測度はすべて $A(\Delta^2)$ に関する $(0, 0)$ の表現測度になっている]。

Q2 $A \hat{\otimes} B$ の表現測度や, annihilator を A 及び B の言葉で特徴付けられるか?

例 1.4 \mathbb{C}^n のコンパクト集合 X に対して, $A(X)$ を X 上連続で X の内部で正則な関数の全体, $R(X)$ を有理関数で, 分母が X 上で 0 と成らないものの全体の X 上での uniform closure と

とすると、 $R(X \times Y) = R(X) \hat{\otimes} R(Y)$ となるが、

$$\boxed{Q3} \quad A(X) \hat{\otimes} A(Y) = A(X \times Y) ?$$

[付記] テンソル積の性質 T1], T2] のうち、T1] の方は $\Sigma_{A \hat{\otimes} B}$ を決定するときにはしか使われない。そこで、T2] だけを取り出して、次のようなテンソル積(?) を考えてみた:

$$A \boxtimes B = \{ f \in C(X \times Y) : f(\cdot, y) \in A \text{ for } \forall y \in Y, f(x, \cdot) \in B \text{ for } \forall x \in X \}.$$

この定義では、 $A(X) \boxtimes A(Y) = A(X \times Y)$ となる。このテンソル積 \boxtimes も台となる空間 X, Y の定め方によらない、i.e., $A \boxtimes B = (\hat{A} \boxtimes \hat{B})|_{X \times Y}$ となる。ところが、 $A \boxtimes B$ の spectrum が $\Sigma_A \times \Sigma_B$ に一致するかどうかわからない [X が \mathbb{C}^1 のコンパクト集合のときには、任意の関数環 B に対して、 $\Sigma_{A(X) \boxtimes B} = \Sigma_{A(X)} \times \Sigma_B$ となることが示めせる]。

$$\boxed{Q4} \quad H^q(\Delta) \boxtimes H^q(\Delta) = H^q(\Delta) \hat{\otimes} H^q(\Delta) ?$$

$$A(X) \boxtimes A(Y) = A(X) \hat{\otimes} A(Y) ?$$

$$R(X) \boxtimes R(Y) = R(X) \hat{\otimes} R(Y) ?$$

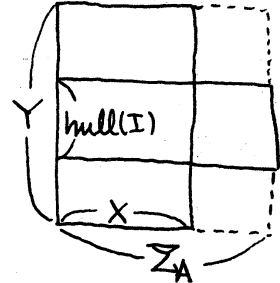
$\boxed{Q5}$ また、左辺の spectrum は何か?

§ 2. Sidney's example Sidney が [5] で与えた例を紹介する。 A, B をそれぞれ $X = \Sigma_A, Y = \Sigma_B$ 上の関数環とする。 A を X 上の A に含まれる関数環、 I を B の closed ideal とする。このとき、 $\sigma = (A \hat{\otimes} I + A \hat{\otimes} B)^-$ により $C(X \times Y)$ の closed subalgebra

を定義すると

Theorem 次の事柄が成立つ:

- 1) $A \hat{\otimes} B \subseteq \mathcal{O} \subseteq A \hat{\otimes} B$
- 2) $f \in \mathcal{O}, y \in \text{hull}(I) \Rightarrow f(\cdot, y) \in A$
- 3) $\Sigma_{\mathcal{O}} = (\Sigma_A \times \text{hull}(I)) \cup (X \times Y)$



$$4) \{ \mathcal{U}_A \times (\mathcal{U}_B \setminus \text{hull}(I)) \} \cup \{ \mathcal{U}_A \times \mathcal{U}_B \} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{U}_A \times \mathcal{U}_B$$

5) A', A の X 上での Gleason part relation が一致している (Gleason metric が一致する必要はない) ならば, \mathcal{O} に関する Gleason part はきっちり $(P_1 \times P_2) \cap \Sigma_{\mathcal{O}}$ であらわされる; ここで, P_1, P_2 はそれぞれ A 及び B に関する Gleason part.

[証明] 5)において, $a \in \Sigma_{\mathcal{O}} \setminus X$ のとき, 切り口 $Y_a \cap \Sigma_{\mathcal{O}}$ 上の \mathcal{O} に関する part relation が B に関するものと一致していることだけを示す。もし, $y, y' \in \text{hull}(I)$ が B に関して同じ part に入っていないならば, a の A に関する表現測度を μ とし, $f \in \mathcal{O}$ のとき $f(\cdot, y), f(\cdot, y') \in A$ となるから

$$f(a, y) - f(a, y') = \int (f(x, y) - f(x, y')) d\mu(x).$$

$x \in X$ に対しては, $f(x, \cdot) \in B$ であるから, $|f(x, y) - f(x, y')| \leq$

$\|y - y'\|_B \|f\|$ 。よって $|f(a, y) - f(a, y')| \leq \|y - y'\|_B \|f\|$ となり

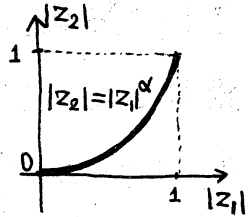
(a, y) と (a, y') は \mathcal{O} に関して同じ part に入る。逆は, スグにわかる。

例 2.1 α を正の無理数, m を T^2 上の Haar measure とし

$$A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C(T^2) : \int_{T^2} f(t_1, t_2) t_1^k t_2^l dm(t_1, t_2) = 0 \text{ for } k+l > 0\}$$

$$= \text{closed linear span } \{z_1^k z_2^l : k+l > 0\}$$

はよく知られた T^2 上の maximal 同変数環である。 Σ_{A_α} は図の実線であらわされた曲線に対応する \mathbb{C}^2 の subset に同一視され、原点 $\varphi_0 = (0, 0)$ は 1 点だけで A_α の part になっている。 $A = C(T^2)$ として、 $\sigma =$



$(C(T^2) \otimes I + A_\alpha \otimes B)^-$ は Theorem の 5) の仮定をみたしている。よって、 $P \in B$ の一つの Gleason part とすれば、 $\{\varphi_0\} \times \{\text{hull}(I) \cap P\}$ は σ の一つの Gleason part となる — Garnett の construction の本質的な部分、ただし、作り方に多少の差がある。

例 2.2 $A = C(X)$, $B = A(\Delta S) = \bigotimes_{s \in S} A(\Delta_s)$ とする。 B_s を座標関数 z_s の s 次の同次多項式全体の closure とすると、 $B = (\sum_{s \in S} B_s)^-$ となる。 $f \in C(X) \otimes B \subseteq C(X)$ の元を係数として $\{z_s\}$ に関してテイラー展開したときの s 次の同次式の部分 f_s が定義出来る。

実際 $f(x, z) = \sum_s \sum_{|\nu|=s} f_{s, \nu}(x) z^\nu$ (有限和); $\nu = (\nu_s)$, $\nu_s \geq 0$, $|\nu| \equiv \sum_s \nu_s$, $z^\nu \equiv \prod_s z_s^{\nu_s}$, に対して、その s 次の同次式 $\sum_{|\nu|=s} f_{s, \nu}(x) z^\nu$ を対応させる operator が bounded となることが示めせる [多変数の Schwarz の補題を作って、変数 z_s の個数に関係しない定数でノルムをおさえる]。さて、 A を X 上の関数環で、 $\varphi_0 \in \Sigma_A \setminus X$ とする。 I は B の closed ideal で $I = (\sum_{s \in S} I_s)^-$, $I_s = B_s \cap I$ となるものとする [たとえば、 $z_s I_s \subseteq I_{s+1}$; $s \in S$, $\nu_s \geq 0$, とする

B_f の subspace の族 $\{I_f\}_{f \geq 1}$ に対し, $I = (\sum_f I_f)^-$ とおけばよい]. 更に各 f に対し, B_f の closed subspace J_f があって $B_f = I_f \oplus J_f$ と直和に書かれるものとする [S が finite ならば B_f は有限次元で, これは無条件に成立つ]. $I_0 = \{0\}$, $J_0 = B_0 \cong \mathbb{C}$ とする. Σ^S の原点 $\bar{0}$ は $\text{hull}(I)$ に含まれるから, $\varphi = (\varphi_0, \bar{0}) \in \Sigma_{\sigma}$. $\sigma_{\varphi} = \{t \in \sigma : \varphi(t) = 0\}$ と (A_{φ_0}, B_0 も同様に) 定義する. 以上の条件のもとに, σ の φ における形式的なテイラー展開 $\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_{\varphi}^n)^- / (\sigma_{\varphi}^{n+1})^-$ が explicit に計算出来る. すなわち, $\sigma_{\varphi} = (A \otimes I + A_{\varphi_0} \otimes B + A \otimes B_0)^-$ ということから,

$$\begin{aligned} (\sigma_{\varphi}^n)^- &= (A \otimes I + \sum_{f=0}^{n-1} A_{\varphi_0}^{n-f} \otimes B_f + A \otimes B_0^n)^- \\ &= \sum_{f=0}^{n-1} \oplus (A \otimes I_f + A_{\varphi_0}^{n-f} \otimes J_f)^- \oplus [\sum_{f \geq n} (A \otimes I_f + A \otimes J_f)]^- \\ (\sigma_{\varphi}^n)^- / (\sigma_{\varphi}^{n+1})^- &\cong \sum_{f=0}^n \oplus (A_{\varphi_0}^{n-f} \otimes J_f)^- / (A_{\varphi_0}^{n+1-f} \otimes J_f)^- \quad (\text{ただし, } A_{\varphi_0}^0 = A). \end{aligned}$$

ここで, 更に $A \subseteq \mathbb{C}(T^1)$, $A = A_{\alpha}$, $\varphi_0 = (0, 0)$ とすると, $A_{\varphi_0} = (A_{\varphi_0}^2)^-$ なることが知られている ([4]) ので,

$$(\sigma_{\varphi}^n)^- / (\sigma_{\varphi}^{n+1})^- \cong (A_{\varphi_0}^0 \otimes J_n)^- / (A_{\varphi_0}^0 \otimes J_n)^- \cong J_n \cong B_n / I_n$$

となる (A , A は消えてしまう!). とくに, $S = \{1, \dots, r\}$ のときを考える. $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ の ideal $J = \sum J_f$ は, $X_s J_f \subseteq J_{f+1}$, $\forall X_s$, となるとき, homogeneous ideal といわれる. X_1, \dots, X_r に変数 z_1, \dots, z_r を代入すれば, J_f に対応して, B_f の subspace I_f が定まり, $I = (\sum I_f)^-$ は B の closed ideal となる. 有限次元

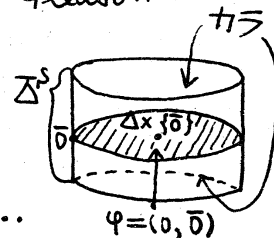
ということから, $B_f = I_f \oplus J_f$ と直和に分解して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (\alpha_\varphi^n / (\alpha_\varphi^{n+1})) \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] / f$$

となる——左辺は関数のテイラー展開なのに, 右辺は全く代数的であるためにおかしなことが起っている。というのは, 右辺を関数とみるときは, $\text{variety hull}(f) = \text{hull}(\text{Rad } f)$ 上の関数, すなわち, $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] / f$ の元とみなさなくてはならないからである。たとえば, $f = \{z_1^2, z_2^2, z_3^2\}$ のとき, $\text{hull}(f) = \{(0,0)\}$ 上の関数は trivial しかないのに, 左辺からは trivial でないテイラー展開をもつ関数があらわれる。

例 2.3 最後に T. T. Read (c.f. [6] p153) の作った例を上げる; $A = \mathbb{C}(\Delta)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Delta)$, $B = \mathcal{A}(\Delta^S)$, $I = (B_0^k)^{\sim} = (\sum_{k \in \mathbb{Z}^+} B_k)^{\sim}$ とする。このとき, $\text{hull}(I) = \{\bar{0}\}$ 。よって $\Delta \times \{\bar{0}\}$ は σ の Gleason part で weak topology で open になっている。ところが,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (\alpha_\varphi^n / (\alpha_\varphi^{n+1}))^{\sim} \cong B_0 \oplus B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus \{0\} \oplus \{0\} \dots$$



であり, とくに $B_1 = \alpha_\varphi / (\alpha_\varphi^2)^{\sim}$ は無限次元である。 $\alpha_\varphi / (\alpha_\varphi^2)^{\sim}$ 上の linear functional は φ における point derivation (幾何的な接ベクトルに対応する) は連続なものだけでも無限次元となる——一次元の analytic disc $\Delta \times \{\bar{0}\}$ 上に無限次元の接ベクトルがあることになる!

以上, いくつかの例を紹介したが, part や point derivation

それに *analytic structure* などに関連した例がこの他にも色々考えられる。

References

1. Birtel, F.T., and E. Dubinski, Bounded analytic functions of two complex variables, *Math. Z.* 93 (1966), 299-310.
2. Blumenthal, R.G., The spectrum of a function algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* 25 (1970), 343-346.
3. Oberlin, D.M., Interpolation and vector-valued functions, *J. Funct. Anal.* 15 (1974), 428-439.
4. Sidney, S.J., Point derivations in certain sup-norm algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 119-127.
5. _____, Properties of the sequence of closed powers of a maximal ideal in a sup-norm algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 128-148.
6. Stout, E.L., *The Theory of Uniform Algebras*, Bogden & Quigley, Inc., Now York, 1971.