

Fuzzy-Fuzzy オートマトン

水本雅晴 田中幸吉

(大阪大学・基礎工学部・情報工学科)

1965年, L.A. Zadehによりあいまいな事柄を表現する手法として fuzzy 集合の概念が発表されて以来⁽¹⁾, オートマトン, 言語, 制御, パターン認識, 意志決定, 論理などの分野に応用されている. たとえば, fuzzy オートマトンについていえば, Wee⁽²⁾ による学習オートマトンとして定式化されたのが最初で, その後 fuzzy オートマトンによる多峰探索, プラント制御, ランダム媒体との相互作用, ゲーム, fuzzy プログラム, GMDH アルゴリズムなどに応用されている. これらと並行に, fuzzy オートマトンそのものに対する性質も調べられており,⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ また fuzzy オートマトンの変形または拡張として, マックス・積オートマトン, ミニ・マックスオートマトン, L-fuzzy オートマトンなど種々のオートマトンが定式化されている.⁽⁶⁾⁽⁷⁾

本稿では, fuzzy 集合の拡張である fuzzy-fuzzy 集合の性質を述べ, これを基に fuzzy-fuzzy オートマトンを新しく定義し, 2, 3 の性質を導き出す.

1. Fuzzy-Fuzzy 集合

準備として通常の fuzzy 集合について簡単に述べておこう.
集合 X における fuzzy 集合 A とは

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

なる X 上の メンバーシップ関数 μ_A によって特性づけられた集合で, 値 $\mu_A(x) \in [0, 1]$ は要素 $x \in X$ が fuzzy 集合 A に属する グレード を表わす. fuzzy 集合の表記法として

$$\begin{aligned} A &= \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n \\ &= \sum_i \mu_A(x_i)/x_i \end{aligned} \quad (2)$$

を採用する. ここで, $+$ は論理和 (\max) を表わす.

fuzzy 集合に関する演算としては

$$\text{包含: } A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X. \quad (3)$$

$$\text{和: } A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \quad (4)$$

$$\text{交わり: } A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \quad (5)$$

$$\text{補集合: } \bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (6)$$

正規 fuzzy 集合, 凸 fuzzy 集合が以下の様に定義される.

正規 fuzzy 集合: fuzzy 集合 A が 正規 であるとは

$$\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1 \quad (7)$$

を満たす場合をいう。

凸 fuzzy 集合: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($\in \mathbb{R}$ 且、 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 、 x_i は実数とする) における fuzzy 集合 A が 凸 であるとは任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$\mu_A(x_i) \geq \min[\mu_A(x_k), \mu_A(x_l)] \quad (7)$$

を満たす場合をいう。ここで、 $k \leq i \leq l$ である。

(例) 次の fuzzy 集合 A は正規凸 fuzzy 集合である。

$$A = 0.3/1 + 0.6/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.2/5.$$

さて、上述の fuzzy 集合においてはグレードは区間 $[0, 1]$ 内の値を取るものであったが(たとえば、 $\mu_A(2) = 0.8$ など)、現実にはグレードそのものがはつきり定まらなくて、たとえば、グレードは"高い"、"中位"、"非常に低い"、"0.8 ぐらい"といったことがある。このようなことを説明するためにはグレードが $[0, 1]$ 上の fuzzy 集合で表わされるような fuzzy-fuzzy 集合(またはタイプ2の fuzzy 集合)が Zadeh により提案された⁽⁸⁾。

Fuzzy-Fuzzy 集合: 集合 X における fuzzy-fuzzy 集合 A とは

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1]^{[0, 1]} \quad (8)$$

ある fuzzy X 上のメンバーシップ関数 μ_A によって特性づけられた fuzzy 集合で、値 $\mu_A(x)$ は fuzzy グレード と名付けられ、 $[0, 1]$ (またはその部分集合) における fuzzy 集合である。

Fuzzy-fuzzy 集合の演算は拡張原理[†] を使用することにより以下の様にならされる。

fuzzy グレード $\mu_A(x), \mu_B(x)$ は

$$\mu_A(x) = \sum_i \alpha_i / u_i, \quad \mu_B(x) = \sum_j \beta_j / v_j \quad (9)$$

と表わす。ここで、 α_i, β_j はそれぞれ $u_i, v_j \in [0, 1]$ に対するグレードである。 $\vee = \max, \wedge = \min$ とおくと

$$\begin{aligned} \text{和: } A \vee B &\Leftrightarrow \mu_{A \vee B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\ &= (\sum_i \alpha_i / u_i) \vee (\sum_j \beta_j / v_j) \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j) / (u_i \vee v_j). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{交わり: } A \wedge B &\Leftrightarrow \mu_{A \wedge B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j) / (u_i \wedge v_j). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{補集合: } \bar{A} &\Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = \neg \mu_A(x) \\ &= \sum_i \alpha_i / (1 - u_i). \end{aligned} \quad (12)$$

[†] $A = \sum_i \mu_A(x_i) / x_i, B = \sum_j \mu_B(y_j) / y_j \in X$ における fuzzy 集合とすると、 X の要素に対する二項演算 $*$ は fuzzy 集合 A, B に拡張定義され、以下の様にならされる (拡張原理)。

$$\begin{aligned} A * B &= (\sum_i \mu_A(x_i) / x_i) * (\sum_j \mu_B(y_j) / y_j) \\ &= \sum_{i,j} (\mu_A(x_i) \wedge \mu_B(y_j)) / (x_i * y_j), \quad \wedge = \min. \end{aligned}$$

(例) $J = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\} \subseteq [0, 1]$ とし

$$\mu_A(x) = \underline{\text{high}} = 0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1$$

$$\mu_B(x) = \underline{\text{low}} = 1/0 + 0.9/0.1 + 0.7/0.2 + 0.4/0.3$$

とすると, $\mu_A(x) \vee \mu_B(x) =$

$$(0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1) \vee (1/0 + 0.9/0.1 + 0.7/0.2 + 0.4/0.3)$$

$$= 0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1 = \underline{\text{high}};$$

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \underline{\text{low}}; \mu_{\bar{A}}(x) = \neg \underline{\text{high}} = \underline{\text{low}}.$$

[性質1] 任意の fuzzy グレードは演算 \vee, \wedge, \neg に関し
 ① 中等律; ② 交換律; ③ 結合律; ④ 重否定の法則; ⑤ ド・モルガンの法則などが成立するが, 一般に吸収律; 分配律; 定数演算の法則; 相補律は不成立とす。ただし, 定数演算のうち $\mu_A(x) \vee 0 = \mu_A(x), \mu_A(x) \wedge 1 = \mu_A(x)$ は成立する。

(例) $\mu_A(x) = 0.3/0 + 0.4/0.2 + 0.6/0.4 + 0.8/0.6 + 0.9/0.8,$

$$\mu_B(x) = 0.1/0 + 0.2/0.2 + 0.3/0.4 + 0.4/0.5 + 0.5/0.8,$$

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))$$

$$= 0.3/0 + 0.4/0.2 + 0.5/0.4 + 0.5/0.6 + 0.5/0.8$$

$\neq \mu_A(x)$. (吸収律の不成立).

(例) $\mu_A(x) = 0.9/0.1 + 0.2/0.2 + 0.1/0.3 + 0.8/0.4$

$$\mu_B(x) = 0.4/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.3/0.4$$

$$\mu_C(x) = 0.2/0.1 + 0.3/0.2 + 0.6/0.3 + 0.8/0.4$$

とすると

$$\begin{aligned} & \mu_A(x) \wedge (\mu_B(x) \vee \mu_C(x)) \\ &= 0.6/0.1 + 0.3/0.2 + 0.6/0.3 + 0.6/0.4, \\ & (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_C(x)) \\ &= 0.6/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.6/0.4 \end{aligned}$$

となり分配律は成立して「は」.

(例) $\mu_A(x) = 0.7/0.1 + 0.5/0.2 + 0.8/0.3$

とすると

$$\begin{aligned} \mu_A(x) \vee 1 &= 0.8/1 \neq 1/1 (=1), \\ \mu_A(x) \wedge 0 &= 0.8/0 \neq 0/0 (=0), \end{aligned}$$

となり定数演算の法則(一部分)は成立して「は」.

(例) $\mu_A(x) = 0.8/0.1 + 1/0.2 + 0.5/0.3$

とすると, $\neg \mu_A(x) = 0.8/0.9 + 1/0.8 + 0.5/0.7$

となる. $\mu_A(x) \vee (\neg \mu_A(x)) = 0.8/0.9 + 1/0.8 + 0.5/0.7 \neq 1/1 (=1)$

$$\mu_A(x) \wedge (\neg \mu_A(x)) = 0.8/0.1 + 1/0.2 + 0.5/0.3 \neq 0/0 (=0)$$

より相補律は不成立となる.

《定理1》 fuzzy グレイドに対する順序関係 \leq

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \Leftrightarrow \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A(x)$$

と定義すれば, \leq の下で半順序集合となる. 同様に \geq

$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \Leftrightarrow \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \mu_B(x)$$

と定義すれば, \geq の下で半順序集合となる. 一般に $\leq \neq \geq$.

[性質2] $\mu_A(x), \mu_B(x)$ を凸 fuzzy グレードとすれば

$\mu_A(x) \vee \mu_B(x), \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \neg \mu_A(x)$ も凸である。

[性質3] 凸 fuzzy グレードに対しては分配律が成立する†。

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_B(x) \vee \mu_C(x)) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_C(x)),$$

$$\mu_A(x) \vee (\mu_B(x) \wedge \mu_C(x)) = (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_C(x)).$$

《定理2》 凸 fuzzy グレードは \vee, \wedge の下で半環 (詳しくは単位元をもつ可換半環) をなす。

(証明) \vee, \wedge に関して分配的であり, また \vee, \wedge の下で単位元をもつ可換半群をなす。単位元は, \vee の下では $\bigvee 0 (=0)$, \wedge の下では $\bigwedge 1 (=1)$ である。なお, 凸 fuzzy グレード $\phi = \sum_i o_i / u_i$, $u_i \in [0, 1]$, は \vee, \wedge に対する零元となる。

[性質4] $\mu_A(x), \mu_B(x)$ を正規 fuzzy グレードとすれば

$\mu_A(x) \vee \mu_B(x), \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \neg \mu_A(x)$ も正規である。

[性質5] 正規凸 fuzzy グレードに対しては定数演算の法則の他方, すなわち

$$\mu_A(x) \vee 1 = 1, \quad \mu_A(x) \wedge 0 = 0$$

が成立する。

[性質6] 正規凸 fuzzy グレードに対しては吸収律が成立する。

† $\mu_A(x)$ は凸である必要はあるが, $\mu_B(x), \mu_C(x)$ は必ずしも凸でなくても分配律は成立する。

(定理3) 正規凸 fuzzy グレードは V, \wedge の下で分配束をなす。ただし, 最大元 = \vee_0 , 最小元 = \vee_0 である (例参照.)

(例) $J = \{0, 0.5, 1\}$ における fuzzy グレード \mathcal{E}

$$A_i = a_1/0 + a_2/0.5 + a_3/1, \quad i=1, 2, \dots, 27$$

とする。ただし $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 0.5, 1\}$ とする。各 fuzzy グレード $A_i (i=1, \dots, 27)$ は表1のように表わされているものとし, また, このうち正規凸 fuzzy グレードを $\textcircled{A_i}$ と記すことにすると, 正規凸 fuzzy グレード $\textcircled{A_i}$ の全体は図1のような分配束をなす。

表1. Fuzzy グレード $A_i = a_1/0 + a_2/0.5 + a_3/1$
($\textcircled{A_i}$ は正規凸 fuzzy グレード)

fuzzy グレード	a_1	a_2	a_3
A_1	0	0	0
A_2	.5	0	0
$\textcircled{A_3}$	1	0	0
A_4	0	.5	0
A_5	.5	.5	0
$\textcircled{A_6}$	1	.5	0
$\textcircled{A_7}$	0	1	0
$\textcircled{A_8}$.5	1	0
$\textcircled{A_9}$	1	1	0
A_{10}	0	0	.5
A_{11}	.5	0	.5
A_{12}	1	0	.5
A_{13}	0	.5	.5
A_{14}	.5	.5	.5
$\textcircled{A_{15}}$	1	.5	.5
$\textcircled{A_{16}}$	0	1	.5
$\textcircled{A_{17}}$.5	1	.5
$\textcircled{A_{18}}$	1	1	.5
$\textcircled{A_{19}}$	0	0	1
A_{20}	.5	0	1
A_{21}	1	0	1
$\textcircled{A_{22}}$	0	.5	1
$\textcircled{A_{23}}$.5	.5	1
A_{24}	1	.5	1
$\textcircled{A_{25}}$	0	1	1
$\textcircled{A_{26}}$.5	1	1
$\textcircled{A_{27}}$	1	1	1

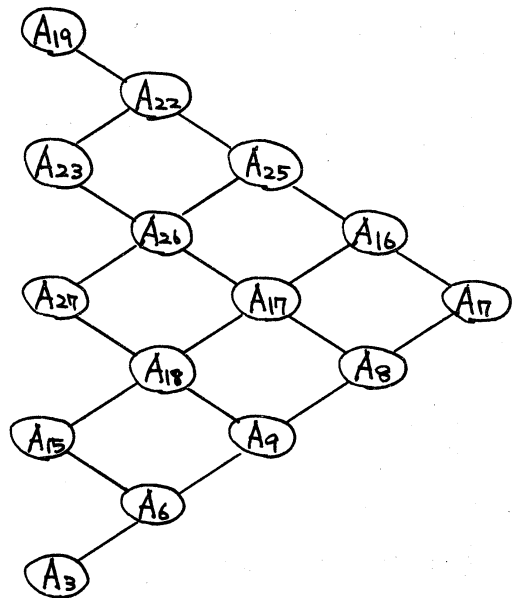


図1. 正規凸 fuzzy グレード $\textcircled{A_i}$ による分配束

各種の fuzzy グレードに対する各法則の成立, 不成立をまとめてみると表えるようになる. ここで, \circ は成立を表わし, \times は一般には不成立であることを示す. また, Δ は一部不成立であることを表わす(すなわち, 定数演算の法則のうち $\mu_A(x) \vee 1 \neq 1$, $\mu_A(x) \wedge 0 \neq 0$ となることを表わす). なお通常の fuzzy 集合に対するグレード, および通常の集合に対する特性関数値(すなわち, 2値グレード(0, 1のみをとる))も対比のために付加しておく.

表2. 各種 fuzzy グレードに対する法則の成立, 不成立
(\circ : 成立, \times : 一般には成立せず, Δ : 一部成立)

法則 グレード	中等	交換	結合	吸収	分配	二重否定	ド・モルガン	定数演算	相補
任意の fuzzy グレード	\circ	\circ	\circ	\times	\times	\circ	\circ	Δ	\times
正規 fuzzy グレード	\circ	\circ	\circ	\times	\times	\circ	\circ	\circ	\times
凸 fuzzy グレード	\circ	\circ	\circ	\times	\circ	\circ	\circ	Δ	\times
正規凸 fuzzy グレード	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\times
グレード (通常の fuzzy 集合に対する)	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\times
2値グレード (通常の集合に対する)	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ	\circ

2. Fuzzy-Fuzzy オートマトン

アルファベット Σ における fuzzy-fuzzy オートマトン A とは

$$A = (S, S_0, \mu_A, F). \quad (13)$$

- (1) S は状態集合.
 (2) S_0 は 初期 fuzzy 状態 で

$$\mu_{S_0} : S \rightarrow [0, 1]^{[0, 1]} \quad (14)$$

は μ_{S_0} fuzzy λ -メンバーシップ関数 μ_{S_0} で特性づけられた状態集合 S における fuzzy-fuzzy 集合である.

- (3) μ_A は fuzzy 状態推移関数で

$$\mu_A(s_{i+1}/s_i, a_i) \in [0, 1]^{[0, 1]}, \quad s_{i+1}, s_i \in S, a_i \in \Sigma \quad (15)$$

は μ_A 条件付 fuzzy λ -メンバーシップ関数で表わされる。これは状態 s_i , λ が a_i が与えられた時に, 次の状態 s_{i+1} に対する fuzzy グレードを与える。

- (4) $F \subseteq S$ は最終状態の集合。

† 一般に, Y における fuzzy-fuzzy 集合 $B(x)$ が $\forall x \in X$ によって条件付けられている場合, $\mu_B(y/x)$ は 条件付 fuzzy λ -メンバーシップ関数 で表わされる。 $A \in X$ における fuzzy-fuzzy 集合とすると, A は $\mu_B(y/x)$ により Y における fuzzy-fuzzy 集合 B を引き起こし, 次の様に定義される。

$$\mu_B(y) = \bigvee_{x \in X} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y/x)].$$

(参考) μ_{S_0}, μ_A が凸 fuzzy グレードを取る場合, fuzzy-fuzzy オートマトン A は半環オートマトン⁽⁷⁾となり, μ_{S_0}, μ_A が正規凸 fuzzy グレードを取る時, A は束オートマトン⁽⁷⁾となる. さらに $\mu_A, \mu_{S_0} \in [0, 1]$ の時, A は通常の fuzzy オートマトンとなる.

次に, fuzzy-fuzzy オートマトン A の状態方程式を求めよう. 今, 初期 fuzzy 状態が S_0 で, λ が $a_0 \in \Sigma$ の時, 次の fuzzy 状態 S_1 は p. 7 の脚注の式より

$$\mu_{S_1}(s_1) = \bigvee_{s_0 \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_1/s_0, a_0)]$$

と与えられる. ここで演算 \vee, \wedge は式 (10), (11) で与えられる.

よって一般に, 初期 fuzzy 状態 S_0 で, λ が系列 $x = a_0 a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ が与えられた時の fuzzy 状態 S_{n+1} は

$$\mu_{S_{n+1}}(s_{n+1}) = \quad (15)$$

$$\bigvee_{s_0, s_1, \dots, s_n \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_1/s_0, a_0) \wedge \mu_A(s_2/s_1, a_1) \wedge \dots \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_n, a_n)].$$

と与えられる. これより

$$\mu_A(s_{n+1}/s_0, a_0 a_1 \dots a_n) \triangleq$$

$$\bigvee_{s_1, \dots, s_n \in S} [\mu_A(s_1/s_0, a_0) \wedge \mu_A(s_2/s_1, a_1) \wedge \dots \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_n, a_n)] \quad (16).$$

と置き直すと, 式 (15) は簡単に下記のようになります.

$$\mu_{S_{n+1}}(s_{n+1}) = \bigvee_{s_0 \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_0, a_0 a_1 \dots a_n)]. \quad (17)$$

これより, fuzzy 状態 S_{n+1} は初期 fuzzy 状態 S_0 と, λ が $x = a_0 a_1 \dots a_n$ により表わされることから, 式 (17) を

$$\nu p_A(s/s_0, x) = \bigvee_{s_0 \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s/s_0, x)] \quad (18)$$

と表わす(応答を表わして)。)

これより入力系列 $x \in \Sigma^*$ が fuzzy-fuzzy オートマトン A によ
て受理されるグレードを

$$f_A(x) = \bigvee_{s \in F} r_{PA}(s/s_0, x) \quad (19)$$

と定義し, $f_A(x)$ によつて特性づけられる Σ^* 上の fuzzy-fuzzy
集合を $L(A)$ と記し, fuzzy-fuzzy 言語 と名付ける。

次に, fuzzy-fuzzy オートマトン(簡単 = ffa) によつて特
性づけられる fuzzy-fuzzy 言語の閉包性を議論しよう。

(定理 4) ffa A_1, A_2 による fuzzy-fuzzy 言語 $L(A_1), L(A_2)$
とすると

$$L(A) = L(A_1) \cup L(A_2) \quad (20)$$

となる ffa A が存在する。

(証明) $A_1 = (S^1, S_0^1, \mu_{A_1}, F^1)$, $A_2 = (S^2, S_0^2, \mu_{A_2}, F^2)$ に対し
て, $A = (S, S_0, \mu_A, F)$ とする。ここで, $S = S^1 \cup S^2$, $F = F^1 \cup$
 F^2 とし, μ_{S_0}, μ_A は以下の様にと与えられる。

$$\mu_{S_0}(s) = \begin{cases} \mu_{S_0^1}(s) & \dots s \in S^1, \\ \mu_{S_0^2}(s) & \dots s \in S^2. \end{cases}$$

$$\mu_A(s'/s, a) = \begin{cases} \mu_{A_1}(s'/s, a) & \dots s', s \in S^1, \\ \mu_{A_2}(s'/s, a) & \dots s', s \in S^2, \\ 1/0 & \dots \text{その他の場合.} \end{cases}$$

《定理5》 $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$. (21)

(証明) $S = S^1 \times S^2$, $F = F^1 \times F^2$ とし,

$$\mu_{S_0}(s_1, s_2) = \mu_{S_0^1}(s_1) \wedge \mu_{S_0^2}(s_2).$$

$$\mu_A((s_1', s_2') / (s_1, s_2), a) = \mu_A(s_1' / s_1, a) \wedge \mu_A(s_2' / s_2, a).$$

《定理6》 $L(A) = L(A_1) * L(A_2)$. (連接†) (22)

(証明) $S = S^1 \cup S^2$, $F = F^2$, $\mu_i = \bigvee_{s \in S^i} \mu_{S_0^i}(s)$, $i=1, 2$, に対し

$$\mu_{S_0}(s) = \begin{cases} \mu_{S_0^1}(s) \wedge \mu_2 & \dots s \in S^1, \\ \mu_{S_0^2}(s) \wedge \mu_1 & \dots s \in S^2. \end{cases}$$

$$\mu_A(s'/s, a) = \begin{cases} \mu_{A_1}(s'/s, a) & \dots s, s' \in S^1, \\ \mu_{A_2}(s'/s, a) & \dots s, s' \in S^2, \\ \mu_{S_2}(s') & \dots s \in S^1, s' \in S^2, \\ \% & \dots \text{その他の場合.} \end{cases}$$

《定理7》 $L(A) = L(A_1)^*$ (Kleene 閉包) (23)

(証明) $S = S^1$, $F = F^1$, $S_0 = S_0^1$ とあり

$$\mu_A(s'/s, a) = \mu_{A_1}(s'/s, a) \vee \mu_{S_0^1}(s').$$

《定理8》 ffa による fuzzy-fuzzy 言語は補集合の下で閉じている。

(証明) $L(A, \lambda) = \{x \mid \mu_A(x) \geq \lambda\}$ と定義すると, もし $\lambda_1 \leq \lambda_2$

† $L_1, L_2 \in \text{fuzzy-fuzzy 言語}$ とすると

連接: $L_1 * L_2 \Leftrightarrow \mu_{L_1 * L_2}(x) = \bigvee_u [\mu_{L_1}(u) \wedge \mu_{L_2}(v)], x = uv.$

Kleen 閉包: $L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L * L \cup L * L * L \cup \dots$

ならば, $L(A, \lambda_1) \supseteq L(A, \lambda_2)$ となり, $L(A, \cdot)$ は非増加関数となる. 一方, $\overline{L(A, \cdot)}$ は非減少となることより証明される. 順序関係 \supseteq は定理 2 参照. \supseteq によりても同様である.

(定理 9) しきい値 λ をもつ言語 L

$$L(A, \lambda) = \{x \mid f_A(x) \geq \lambda\}, \lambda \in [0, 1]^{[0, 1]} \quad (24)$$

とすると, $L(A, \lambda)$ は正規言語である. \supseteq によりても同様である. さらに式 (14), (15) の μ_{S_0}, μ_A が正規凸 fuzzy グレードの場合も $\supseteq = \supseteq$ となり同様なことが成立する.

(証明) Σ^* 上の関係 R を

$$x R y \iff r_{PA}(s/S_0, x) = r_{PA}(s/S_0, y) \quad (25)$$

と定義すると, R は Σ^* 上の同値関係となる. また, 任意の $z \in \Sigma^*$ に対し

$$\begin{aligned} & r_{PA}(s/S_0, xz) \\ &= \bigvee_{t \in S} [r_{PA}(t/S_0, x) \wedge \mu_A(s/t, z)] \\ &= \bigvee_{t \in S} [r_{PA}(t/S_0, y) \wedge \mu_A(s/t, z)] \\ &= r_{PA}(s/S_0, yz) \end{aligned}$$

となり, R は右合同関係となる. さらに R は有限個の同値類をもつことよりいえる.

[参考] fuzzy-fuzzy オートマトンの言語受理能力は通常
の決定性オートマトンと同じことから, fuzzy-fuzzy 集合の

概念をタイポ3の形式文法に適用しても同様はことが出来る。

しかしながら、タイポ2の文法に適用した場合には言語生成能力は上がる。たとえば、fuzzy タイポ3 ションが

- (1) $S \xrightarrow{\alpha} AB$, (2) $S \xrightarrow{\beta} CD$, (3) $A \xrightarrow{\gamma} aAb$, (4) $A \xrightarrow{\gamma} ab$
 (5) $B \xrightarrow{\gamma} cB$, (6) $B \xrightarrow{\gamma} c$, (7) $C \xrightarrow{\gamma} aC$, (8) $C \xrightarrow{\gamma} a$
 (9) $D \xrightarrow{\gamma} bDc$, (10) $D \xrightarrow{\gamma} bc$.

ただし、 α, β, γ は fuzzy グレードで、

$$\alpha = 0.5/0 + 1/0.5 + 0.5/1,$$

$$\beta = 1/0.5,$$

$$\gamma = 1/0.5 + 0.5/1.$$

このより

$$L(G, \gamma) = \{x \mid \mu_G(x) \geq \gamma\} = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

となり、タイポ1言語が生成される。

(注) 通常のタイポ^(fuzzy)2文法ではタイポ1言語は生成できないことがわかっている(9)。

参考文献

(1) L.A.Zadeh: "Fuzzy sets", Inform. Control, 8, 338-358, 1965.

(2) W.G.Wee, K.S.Fu: "A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems", IEEE Trans. on SSC, ssc-5, 215-223, 1969.

- (3) L.A. Zadeh : "Toward a theory of fuzzy systems",
in "Aspects of Network and System Theory" (ed. Kalman
and DeCaris), Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- (4) E.S. Santos : "Maximin automata", Inform. Control,
13, 363-377, 1968.
- (5) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "Some considerations
on fuzzy automata", J. CSS, 3, 409-422, 1969.
- (6) E.S. Santos and W. G. Wee : "General formulation of
sequential machines", Inform. Control, 12, 5-10, 1968.
- (7) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "Various kinds of
automata with weights", J. CSS (in press).
- (8) L.A. Zadeh : "The concept of a linguistic variable
and its application to approximate reasoning", Inform.
Sci. (to appear).
- (9) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "N-fold fuzzy
grammars", Inform. Sci., 5, 25-43, 1973.