数理解析研究所講究録
229巻 1975年 37-46

時間依存オートマトンについて

北大 工学部 田中 譲
京大 工学部 矢島 脩三

1. はじめに.

オートマトンに時系列の処理能力を持たせるためには. 時間の概念の明確な形での導入が必要である。その際に時間を離散的なものとして扱うか, あるいは連続的なものとして扱うかによって. 従来のオートマトンを基礎に考えるか. ここで述べる時間依存オートマトンのようなモデルを基礎とするかに分かれる。後者はより一般的なモデルであり. 前者の範囲では現れない問題をも含むことから. 著者らは後者のモデルに興味を持ち、定式化を試みた。本報告では. 有限オートマトンの時間依存オートマトンへの拡張に話を限るが、ここでの考え方は. 他のクラスのオートマトンにも適用可能であろう。以下では. まず. モデルの定式化を示し. 種々のクラスの時間依存オートマトンの間の関係について述べた後. 時系列パターンの一種と考え得るアタランスなる言語を定義し、

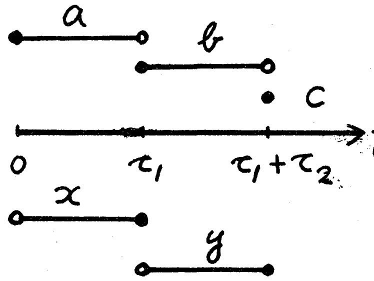
これが、時間依存オートマトンの受理する時系列パターンの集合にクラスとして一致することを示す。最後の節では、遷移先と遷移時間の両方が確率変数であるような時間依存オートマトンについて述べる。

2．時間情報を持った記号列 ― トレイン ―

定義 1：$T=[0,\infty)$，Σ を有限集合とする。トレイン長 τ の Σ 上のトレイン $\mu|_\tau$ とは $[0,\tau)\in T\to\Sigma$ なる区分的に定値な関数で、不連続点を有限個しか持たないものを言う。不連続点において右連続なトレインをSトレイン、左連続なトレインをIOトレインと呼ぶ。μ がIOトレインの時、$\mu(0)=\lambda$（λ は空トレイン：$\eta\lambda=\lambda\eta=\eta$）と定義する。

図1にSトレインとIOトレインの例を示す。これらをそれぞれ $a^{\tau_1}.b^{\tau_2}$, c^0, $x^{\tau_1}y^{\tau_2}$ で表わす。

Sトレイン μ_1



IOトレイン μ_2

図 1

$\mu = x_{i_1}^{\tau_1} x_{i_2}^{\tau_2}\cdots x_{i_n}^{\tau_n}$ に対して、$\tau(\mu)=\Sigma_i\tau_i$，$l(\mu)=n$，$F(\mu)=x_{i_1}$，$L(\mu)=x_{i_n}$，$H_k(\mu)=x_{i_1}^{\tau_1}\cdots x_{i_k}^{\tau_k}$，$u(\mu)=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ と定義する。μ の $[0,\tau)$（$\tau\leqq\tau(\mu)$）への制限を $\mu|_\tau$ で表わす。

定義2：$\forall x \in \Sigma$，$\forall t_1$，$\forall t_2 \in T$に対して，$x^{t_1} x^{t_2} = x^{t_1+t_2}$ が成立するとき，Σ上のトレインは連続条件（C－条件）を満足するという。この報告では，トレインは常にC－条件を満足すると仮定する。

3．種々の時間依存オートマトン ―等価性・接続―

定義3：5項列 $M=(S, X, Y, \delta^*, \Lambda)$ を時間依存オートマトン（TSA）という。ただし，S，X，Y は状態，入力記号，出力記号の有限集合を表わし，δ^* は $\forall s \in S$ と X 上のIOトレイン（入力トレイン）に対して S 上の S トレイン（状態トレイン）を与える写像で，Λ は S から Y の上への写像である。状態トレインは Λ によって Y 上のIOトレイン（出力トレイン）に写される。

TSAにおいて，$\delta^*(s, \xi\eta) = \delta^*(s, \xi)\delta^*(L(\delta^*(s, \xi)), \eta)$ が成立するとき，このTSAの挙動はオートノマスな挙動によって決定される。これをL－TSAと呼ぶ。

定義4：L－TSAにおいて $\delta^*(s, x^\infty)$ が常に $\sigma_1 \cdot \dot{\sigma}_2$ $(=\sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \cdots)$ の形（概周期形）になるものをD－TSAと呼ぶ。

D－TSAの挙動は完全に記述することができる。

定義5：D－TSAにおいて，$\delta^*(s, x^\infty) = \xi\eta$ と書けるなら常に $\delta^*(L(\delta^*(s, x^{\tau(\xi)})), x^\infty) = \eta$ となるとき，これ

をP－TSAと呼ぶ。

定理1：$M=(S, X, Y, \delta, \tau, \Lambda)$（$\delta: S\times X\to S$，$\tau: S\times X\to T$）はP－TSAである。逆もまた真である。（証明省略）

TSA；MとM′があって，Mの状態sとM′の状態s′に関する入出力関係が等しいとき，sとs′が等価であるといい，M′の任意の状態についてこれと等価なMの状態が存在するとき，MはM′を実現するという。

定理2：任意のD－TSAに対してこれを実現するP－TSAが存在する。逆の関係も明らかに成り立ち，D－TSAとP－TSAのクラスは能力的に等価である。（証明省略）

このことから，D－TSAを考察するかわりにP－TSAを考察すれば充分であることがわかる。

すべての状態遷移時間が有理数であるようなP－TSAを有理P－TSAと呼ぶ。有理P－TSAの並列およびカスケード接続は有理P－TSAで実現可能である。このことを有理P－TSAのクラスはこれらの接続に関し能力的に閉じているという。TSAの直列接続を考えるとL－TSAさえ閉じていない。P－TSAの有限個の並列，直列，カスケード接続によってできるTSAのクラスは，時系列パターンの認識モデルとしては最も興味あるTSAのクラスであるが，その性質を解明するのは難しい。しかし，有理P－TSAに話を限ればいくつかのこ

とが分っている。次節でこのことにも触れる。

4、時間依存オートマトンの受理する言語

本節では有限集合Σを発音記号の集合と呼び、$x \in \Sigma$に対し$x^{[\tau|\Delta]} \triangleq \{x^t | \tau \leq t < \tau + \Delta\}$を音素と呼ぶ。（$[\tau|\Delta]$は区間$[\tau, \tau+\Delta)$を表わす。）　音素の集合に以下に定義される連接や、補集合、集合和、星積の作用を有限回適用して得られるトレインの集合のクラスの閉包を正規アタランスのクラスと名づける。

定義5：アタランスα, βの連接$\alpha\beta$の要素は次のようなものである。

a. $\mu \in \alpha$, $\eta \in \beta$ ($\alpha, \beta \neq \phi$ nor $\{\lambda\}$) で $L(\mu) \neq F(\eta)$ とする。(1) $\mu \cdot \eta \in \alpha\beta$, (2) $y \in F(\beta) - \{F(\eta)\}$ ($F(\beta) \triangleq \{F(\eta) | \text{for } \forall \eta \in \beta\}$) で $y^t \notin H_1(\beta) \triangleq \{H_1(\eta) | \text{for } \forall \eta \in \beta\}$ ならば $\mu y^t \eta \in \alpha\beta$.

b. $x^{t_1} | x^{t_2} \to x^{[\tau|\Delta]}$ で、$\tau \leq t_1 < \tau + \Delta$ かつ $0 \leq t_2 < \Delta$ であることを示す。$x^{[\tau|\Delta]} y^{[\tau'|\Delta']}$ の形のアタランスに関し、$\mu \in x^{[\tau|\Delta]}$ で $x^{t_1} | x^{t_2} \to x^{[\tau|\Delta]}$ かつ $0 \leq t_3 < \tau'$ とすると $x^{t_1} y^{t_3} x^{t_2}$ かつ $\mu y^{t_3} x^{t_2}$ はこの場合のアタランスについて $x^{[\tau|\Delta]}$ の要素になっている。

すべての肩添数$[\tau|\Delta]$のτおよびΔが有理数であるよう

なアタランスを有理アタランスと呼ぶ。TSAはδ^*が多値写像であるとき非決定性であるという。λ-遷移をλで起る遷移とし、瞬時遷移を任意のx^0によって起る遷移とする。λ-遷移を持つP－TSAは非決定性P－TSAで逆も真である。瞬時遷移を許すことは一つの拡張であり、先述のIOトレインの定義とは矛盾するが、近似的にはx^0のかわりにx^{+0}を考えればよい。

定理3：決定性有理P－TSAのクラスと非決定性有理P－TSAのクラスとは能力的に等価であり、従ってそれらの受理するトレインの集合のクラスは等しい。

（証明）　任意に与えられた非決定性有理P－TSAに対し、これを実現する決定性有理P－TSAを構成できることを示せばよい。P－TSAの状態、入力記号対(s, x)に対し、$s^{\tau(s,x)}$、$(\delta(s,x))^0$を記述という。$n(s, x)$を(s, x)に対する記述の数とし、$\sigma_k(s, x)$を(s, x)のk番目の記述とする。$\forall s, \forall x, \forall k$に対し、$\tau(\sigma_k(s, x))$はすべて有理数であるから、$m_k(s, x)\Delta$（$m_k(s, x)$は整数）と書くことができる。$S(x, k, h)$　$(k = 1, 2, \cdots n(s, x); h = 0, 1, \cdots m_k(s, x) - 1)$で$S$の時刻$h\Delta$における$k$番目の記述$\sigma_k(s, x)$に対応する仮空の状態を表わす。$N = \Sigma_{(s,x)}\Sigma_k m_k(s, x)$とし、$\{0, 1\}^N$のベクトル空間を考え、この部分集合の要素を状態とする決定性P－TSAを以下のようにつくる。N次元ベクトルの第(s, x, k, h)エ

ントリは$s(x,k,h)$に対応する。非決定性P－TSAの状態sはエントリ$(s,\forall x,\forall k,0)$に1を持つベクトルに対応する。$(s,\forall x,\forall k,0)$に$x^{\Delta}$が入力されると$(s,x,\forall k,1)$に変わる。例えば、$(s_1,x)$に対し$s_1{}^1 s_2{}^0$, $s_1{}^2 s_1{}^0$と2つの記述を持ち、(s_2,x)に対し$s_2{}^1 s_2{}^0$である場合を考えよう。$(s_1,\forall x,\forall k,0)$に1を持つベクトル$a$の$x$に対する記述は、$(s_2,\forall x,\forall k,0)$と$(s_1,x,2,1)$に1を持つベクトルを$b$、$(s_2,\forall x,\forall k,0)$と$(s_1,\forall x,\forall k,0)$に1を持つベクトルを$c$とするとき、$a^1 b^1 c^0$となる。これはD－TSAの記述である。$(s,x,\forall k,\forall h)$に$y^{\Delta}$が入力されると$(s,y,\forall k,1)$に移る。D-TSAはP-TSAで実現でき、定理が証明された。

αを正規アタランスとするとき、$[\alpha]^{[\tau|\Delta]}=\{\mu \mid \tau \leq \tau(\mu) < \tau+\Delta \text{ and } \exists \eta \text{ s.t. } \mu\eta \in \alpha\}$を拡張音素と呼ぶ。拡張音素を音素とみなしてつくられる正規アタランスを拡張正規アタランスと呼ぶ。$\alpha=\alpha_1 x^{[\tau|\Delta]}\alpha_2$で$\mu_1 \in \alpha_1 x^{[\tau|\Delta]}$, $\mu_2 \in x^{[0|\Delta]}\alpha_2$のとき、$\mu_1|\mu_2 \to \alpha$と表わす。$\mu_1|\mu_2 \to \alpha$で、$\eta_1|\eta_2 \to \beta$かつ、$\tau_1 \leq \tau(\mu_1) < \tau_1+\Delta_1$, $0 \leq \tau(\mu_2) < \Delta_1$, $0 \leq \tau(\eta_1) < \tau_2$, $\tau_2 \leq \tau(\eta_2) < \tau_2+\Delta_2$のとき、$\mu_1\eta_1\mu_2\eta_2 \in [\alpha]^{[\tau_1|\Delta_1]}.[\beta]^{[\tau_2|\Delta_2]}$によって連接を定義する。拡張正規アタランスを更に拡張したものも拡張正規アタランスと呼ぶ。

定理4：有理正規アタランスのクラスは瞬時遷移を許した有

理P-TSAの受理するトレインの集合のクラスに一致する。拡張有理正規アタランスのクラスは瞬時遷移を許した有理P-TSAの有限個の直列接続によってできるTSAが受理するトレインの集合のクラスに一致する。（証明省略）

上述の結果は神経の多層構造と時系列パターンの冗長ノイズ長との関連で興味深いが紙面の都合上詳細を割愛する。

5. 確率時間依存オートマトン

5.a. 確率時間依存オートマトンの定義と性質

定義6：確率時間依存オートマトン（STSA）とは5項列 $M=(S, X, Y, \{Q(x;t)\}, \Lambda)$ である。ここに $Q(x;t)$ なる行列の ij 成分で入力モード x のときの状態 s_i から s_j への直接遷移の時空間分布関数を表わす。$\lim_{t\to\infty}\sum_j Q_{ij}(x;t)=1$ $\lim_{t\to\infty} Q_{ij}(x;t) \triangleq P_{ij}(x)$ とすると $P(x)$ は遷移先に関する確率行列であり、$Q_{ij}(x;t) \triangleq P_{ij}(x) F_{ij}(x;t)$ で定義される $F(x;t)$ は遷移時間行列と呼ばれる。

入力トレイン μ が与えられたときのSTSAの状態を表わす確率変数を k_μ で表わすとSTSAの挙動は次式で定義される。

$$P_r\{k_{x^t\cdot\mu}=j\,(F(\mu)\neq x) \mid k_\lambda=i\}=\sum_k P_r\{k_\mu=j \mid k_\lambda=k\} P_r\{k_{x^t}=k \mid k_\lambda=i\}$$

定義7：対角行列 $H(x;t)$, $H^+(x;t)$ を次のように定義する。

$$H_i(x;t)=\sum_j Q_{ij}(x;t), \quad H_i^+(x;t)=\sum_{j\neq i} Q_{ij}(x;t)$$

定理5：遷移行列 $P(x;t)$ を次式

$P_{ij}(x;t) = P_r\{k_{xt} = j \mid k_x = i\} \quad (t \geq 0) \quad \text{or} \quad 0 \quad (t < 0)$

で定義すると．

$P(x;t) = (I - Q(x;t))^{(-1)*} * (I - H(x;t))$

である。ただし $*$ はスティルチェスコンボルーションを表わし、$[I - C(t)]^{(-1)*} = I + C(t) + C(t) * C(t) + \cdots$ である。$\mu = x_{i_1}^{t_1} x_{i_2}^{t_2} \cdots x_{i_n}^{t_n}$ $(x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}})$ に対して $P_{ij}(\mu) \triangleq P_r\{k_\mu = j \mid k_x = i\}$ とすると．$P(\mu) = P(x_{i_1};t_1) \cdots P(x_{i_n};t_n)$ となる。

$P^A(x;t)$，$P^B(x;t)$ を STSA；A．B の遷移行列とするとき、並列接続の遷移行列は $P_{ik,jl}(x;t) = P^A_{ij}(x;t)P^B_{kl}(x;t)$。

定理6：STSA；M_A, M_B のカスケード接続の遷移行列は．A_A が全単射のとき次式で表わされる。

$P(x;t) = [\delta - (Q^{A+\prime} \otimes P^B)_x]^{(-1)\circledast} \circledast [(I - H^{A+}) * (I - Q^{Ad})^{(-1)*} \otimes P^B]_x$

ただし $\circledast$ はコンボルーションを表わし、$(A \otimes B)(x;t)_{ik,jl} = A_{ij}(x;t)B_{kl}((x, S^A{}_i);t)$，$Q' = (d/dt)Q$，$Q^+{}_{ij} = (1 - \delta_{ij})Q_{ij}$，$Q_{ij}{}^d = \delta_{ij}Q_{ii}$ を表わすものとする。

確率時間依存オートマトンの一つの未解決な問題は、状態数の最少化に関するものである。

5．b．連続時間確率オートマトン

定義8：連続時間確率オートマトン（CSSM）は5項列 $M = (S, X, Y, \{A(x)\}, A)$ で定義される。$A(x)$ は遷移率行列で．$a_{ii} =$

$-\Sigma_{j\neq i} a_{ij}$, $a_{ij} \geq 0$を満足し、時刻 t における状態分布を $\pi(t)$ とすると、入力モード x のとき、$\pi(t) = \pi(0) e^{A(x)t}$ である。

出力記号 y に対し、$\#(S)$ 次元ベクトル η_y ($\eta_{y_i} = 1$ iff $\lambda(S_i) = y$, otherwise 0) を考える。ストリング $u = aabbbcdd$ の縮約ストリング $abcd$ を $M_e(u)$ で表わす。

定義9：CSSM；Mに対し、

$$K^M(m) = [(\forall y)\{\eta_y\}, (\forall y, \forall u' \in X^+ \text{ s.t. } \ell(M_e(u')) = 1)\{\zeta_y(u')\}$$
$$---- (\forall y, \forall u^m \in X^+, \text{ s.t. } \ell(M_e(u^m)) = m)\{\zeta_y(u^m)\}]$$

$$\zeta_y(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = A(x_{i_1}) \cdots A(x_{i_n})\eta_y$$

と定義する。$K^{M+}(m)$ は $K^M(m)$ の部分集合で $\zeta_y^M(u) \in K^{M+}(m)$ は u 中の任意の記号 x に対し、連続した x の個数が $(A(x)$ の最小多項式の次数$)-1$ 以下を満足していることを示す。$K^{M+}(n-1)$ (n は M の状態数) の要素のベクトルを列ベクトルとする行列を C^M で表わす。

定理7：CSSMの2つの分布 π, ρ が等価である必要十分条件は $\pi C^M = \rho C^M$ である。（証明省略）

7、おわりに　TSAの紹介を述べたが紙面の都合上詳述できなかった。時間を連続領域にまで拡張することの是否については今後の御批判を待ちたい。

参考文献
(1) 矢島，田中："時間依存オートマトンについて" 信学会 AL73-67 (1974-01)
(2) 田中，矢島 "確率時間依存オートマトンについて" 信学会 AL73-79 (1974-03)
(3) 田中，矢島 "時間依存オートマトン" 信学全，C2-1526 (1974-07)