数理解析研究所講究録
230巻 1975年 70-78

On unramified abelian extensions of local fields with abitrary residue field of characteristic $p \neq 0$ and its application to wildly ramified $\mathbb{Z}_p$-extensions

東大 理　　三木 博雄

この講演の詳細は文献[4]に述べてあるので，ここでは要点を述べることにする．

pを素数，kを標数pの任意の体を剰余体にもつ離散付値で完備な体とし，kの剰余体を$\bar{k}$，kの整数環を$\mathcal{O}_k$，$\mathcal{O}_k$の単数群をU_kとかく．

次の問題(1)(2)を考えよう．

問題(1)　kの不分岐アーベル拡大の理論をつくること．

問題(2)　kの完全分岐な$\mathbb{Z}_p$-拡大の全体$\mathfrak{Z}_\infty(k)$とkから構成されるある集合$W_\infty(k)$との間の1対1の対応を見い出すこと．ここでK/kがガロア拡大でそのガロア群$G(K/k)$が位相群としてp進整数環$\mathbb{Z}_p$の加法群に同型であるときKはkの$\mathbb{Z}_p$-拡大であるとよばれている．

上の問題は伊原[1]で述べられている問題「$\mathbb{Q}(t)_p$ の類体論をつくること」を考えている過程で生じたものである.

以下問題(1)(2)について補足しよう.

問題(1)の補足. よく知られているように, kの不分岐アーベル拡大と$\bar{k}$のアーベル拡大とはcanonicalに1対1に対応しているから, 問題(1)は本質的には標数pの任意の体$\bar{k}$の上のアーベル拡大の理論をつくることと同値である. そして$\bar{k}$のアーベル拡大の理論については, 拡大の次数がpでわれないときはKummer theory, exponentがpのアーベル拡大についてはArtin-Schreier拡大の理論, exponentがpのべきのアーベル拡大についてはWittの理論([7])がよく知られている. 剰余体$\bar{k}$へ移さずに直接kでのformulationを得たいというのが問題(1)の目標である.

問題(2)の補足. 一般のkでやらず, 次の条件(i)(ii)を仮定して考える.

(i) pはkの素元である.

(ii) 有限体$\mathbb{F}_p$は$\bar{k}$のmaximum perfect subfieldである. つまり, $\mathbb{F}_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{k})^{p^n}$.

Teichmüller[6]によれば, 標数pの任意の体$\bar{k}$についてpを素元にもち$\bar{k}$を剰余体にもつ離散付値で完備な体kはただひとつ存在する. ゆえに,

$$(*) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{K})^{p^n} = \mathbb{F}_p$$

をみたす標数 p の体 $\mathfrak{K}$ は上の条件 (i) (ii) をみたす k と $k \mapsto \bar{k}$ により1対1に対応している．(*) をみたす $\mathfrak{K}$ の例としては $\mathfrak{K} = \mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_p(t)$, $\mathbb{F}_p\{t\}$（有限体，有理函数体，形式的べき級数体）などがある．$\mathfrak{K} = \mathbb{F}_p$ のときは $k = \mathbb{Q}_p$（p 進数体），$\mathfrak{K} = \mathbb{F}_p(t)$ のときは $k = \mathbb{Q}(t)_p$ となる．

$k = \mathbb{Q}_p$ のときは問題(2)の解答は次のとおりである．局所類体論により，$\mathbb{Q}_p$ の完全分岐な $\mathbb{Z}_p$-拡大の全体 $\mathfrak{J}_\infty(\mathbb{Q}_p)$ と $U_p^{(1)} = \{ u \in \mathbb{Z}_p^\times \mid u \equiv 1 \pmod{p} \}$ は次の対応で1対1に対応している：$K_\infty \longmapsto u \in U_p^{(1)}$ s.t. $pu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{K_n/k}(K_n^\times)$．ただし K_n/k は K_∞/k の p^n 次 sub-extension である．この対応を上の (i) (ii) をみたす一般の k について拡張したいというのが問題(2)の目標である．

以下，上の問題 (1), (2) について得られた結果を紹介しよう．

§1　不分岐アーベル拡大

以下次数 m の完全分岐な巡回拡大 k'/k を固定して考える．任意の有限次不分岐拡大 K/k について，

$$G^*(K) = N_{K'/K}(U_{K'}) \cap k \,/\, N_{k'/k}(U_{k'})$$

とおく．ただし $K'=K\mathfrak{k}'$ とおいた．$G^*(K)$ は明らかに $U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'})$ の部分群である．そして

$$W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})=\bigcup G^*(K)$$

とおく．ただし和はすべての有限次不分岐拡大 $K/\mathfrak{k}$ にわたり，$U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'})$ の中で和を考えている．$W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ も明らかに $U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'})$ の部分群である．$\widetilde{W}(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ を $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ の有限部分群の全体からなる集合とし，$\mathfrak{F}_m$ を $\mathfrak{k}$ の有限次不分岐アーベル拡大 K で $(G(K/\mathfrak{k}))^m=1$ となるものの全体とする．また群 G について G の指標群を $\chi(G)$ であらわす．以上の Notation のもとで，

<u>Theorem A</u>．<u>次の (1)，(2) が成立する</u>．

(1) <u>$K\in\mathfrak{F}_m$ ならば，$G^*(K)$ から $\chi(G(K/\mathfrak{k}))$ の上への canonical な同型が存在する</u>．

(2) <u>$\mathfrak{F}_m$ と $\widetilde{W}(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ は $K\longmapsto G^*(K)$ により bijective に対応する．さらに，$K_1, K_2\in\mathfrak{F}_m$ のとき，$K_1\subset K_2$ と $G^*(K_1)\subset G^*(K_2)$ は同値である</u>．

次に Theorem A の意味について述べる．<u>$m\not\equiv 0 \pmod{p}$ のとき</u>，よく知られているように，完全分岐な m 次巡回拡大 $\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}$ が存在することと $\mathfrak{k}$ が（従って $\bar{\mathfrak{k}}$ が）1 の原始 m 乗根を含むことと同値である．そしてこの場合容易に $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})=(\bar{\mathfrak{k}})^\times/(\bar{\mathfrak{k}}^\times)^m$，$G^*(K)=(\bar{\mathfrak{k}})^\times\cap(\bar{K})^m/(\bar{\mathfrak{k}}^\times)^m$ がわかる

から，Theorem A は Kummer theory と本質的に同じである．また m が p のべきの場合は本質的には Witt の理論（[7]）と同じである．Witt の formulation は加法的であるのに対し Theorem A は乗法的である．Witt の理論における $W_n(\mathfrak{k})/\wp W_n(\mathfrak{k})$ に対応するのが $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ である．ただし $m=p^n$ で $W_n(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{k}$-係数の長さ n の Witt vector のつくる環の加法群で，$\wp(x)=x^p-x$，ただし $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$x^p=(x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p)$ である．また $\wp$-map と Norm map が対応している．従って Theorem A は本質的に Kummer 理論と Witt の理論を含んでいる．

また $\mathfrak{k}$ が完全体のときは $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})=U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'})$ が証明できるが，Theorem A は群 $U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'})$ のひとつの意味を与えている．つまり $U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'}) \cong \chi(G(K_m/\mathfrak{k}))$．ただし K_m は $\mathfrak{F}_m$ に属する体の全体の合併体である．

$\mathfrak{k}$ が一般の場合の $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ の形については文献[4]の§5を参照して下さい．

§2 $\mathbb{Z}_p$-拡大への応用

問題（1）と（2）は一見無関係のように思われるが，序文の中の条件(i)，(ii) のもとでは，次の Theorem により，それらは密接に結びついている．

Theorem（［3］の主定理）．k を離散付値 ν で完備な標数０の体で標数 p（$\neq 0$）の剰余体 $\bar{k}$ をもつとし，次の条件(イ)，(ロ)，(ハ) をみたす部分体 k_0 を含むとする．

（イ） k_0 は ν の k_0 への制限で完備である．

（ロ） k_0 の剰余体 $\bar{k}_0$ は $\bar{k}$ の maximum perfect sub-field である．つまり，$\bar{k}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{k})^{p^n}$ である．

（ハ） k_0 の素元は k の素元である．

このとき k の任意の $\mathbb{Z}_p$-拡大は k_0 のある $\mathbb{Z}_p$-拡大と k のある不分岐な $\mathbb{Z}_p$-拡大との合成体に含まれる．

さて (i)，(ii) の仮定のもとで問題(2) について得られた結果を述べよう．

条件 (i) により，$k_n(\zeta_1) = k(\zeta_{n+1})$ となる k の p^n 次巡回拡大 k_n がある．ただし ζ_i は1の原始 p^i 乗根である．$k_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} k_n$ とおけば，k_∞ は k の完全分岐な $\mathbb{Z}_p$-拡大である．

$H_n(k) = \{ x \in U_k \mid x \equiv a_0^{p^n} + a_1^{p^{n-1}} p + \cdots + a_n p^n \pmod{p^{n+1}},\ a_i \in O_k \}$ とおくと，これは U_k の部分群であることが証明できる．また

$N_{k_n/k}(U_{k_n})$ は $H_n(k)$ の部分群であることが証明される．

$$W_n(k) = H_n(k) / N_{k_n/k}(U_{k_n}) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

とおくと $\{W_n(k); \rho^{n'}_n\}$ は射影系となる．ただし $n' \geqq n$ について，$\rho^{n'}_n : W_{n'}(k) \longrightarrow W_n(k)$ は natural injection $H_{n'}(k) \to H_n(k)$ によって induce される homomorphism である．これの projective limit を $W_\infty(k)$ とする：

$$W_\infty(k) = \varprojlim W_n(k).$$

$\mathfrak{F}_\infty(k)$ は問題(2)のとおりとする．このとき，Theorem A の応用として（他のいくつかの命題ももちいて）次の Theorem B をえる．

Theorem B. 序文の中の条件(i), (ii)のもとで，$\mathfrak{F}_\infty(k)$ から $W_\infty(k)$ への map F を $k'_\infty \longmapsto (N_{k'_n/k}(\pi'_n)/N_{k_n/k}(\pi_n) \bmod N_{k_n/k}(U_{k_n}))$ で定義する．ただし k'_n/k は k'_∞/k の p^n 次の sub-extension で π_n, π'_n はそれぞれ k_n, k'_n の素元である．このとき F は π_n, π'_n のとり方によらず，F は $\mathfrak{F}_\infty(k)$ と $W_\infty(k)$ の間の1対1の対応を与える．

特に $k = \mathbb{Q}_p$ のときは $W_\infty(\mathbb{Q}_p) = U_p^{(1)}$ が容易にわかり，Theorem B の F は序文に述べた局所類体論による $\mathfrak{F}_\infty(\mathbb{Q}_p)$ と $U_p^{(1)}$ との対応と一致していることに注意されたい．

Corollary. Theorem B と同じ仮定のもとで，次の(1)(2) は同値である．

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{k_n'/k}(k_n'^{\times})$ が k の素元を含む.

(2) $k_\infty' = k_c k$ となる $\mathbb{Q}_p$ の $\mathbb{Z}_p$-拡大 k_c が存在する. つまり k_∞'/k は $\mathbb{Q}_p$-定数拡大である.

文　献

[1] 伊原 康隆：ある p 進完備な関数体についての問題, 数理研講究録 41, 1968, pp. 7-17.

[2] B. Dwork : Norm residue symbol in local number fields, Hamb. Abh. 22, 1958, pp. 180-190.

[3] H. Miki : On $\mathbb{Z}_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, Vol. 21, pp. 377-393.

[4] H. Miki : On unramified abelian extensions of local fields with arbitrary residue field of characteristic $p \neq 0$ and its application to wildly ramified $\mathbb{Z}_p$-extensions, J. Math. Soc. Japan に投稿中.

[5] J. P. Serre : Corps locaux (2nd edition), Hermann, Paris, 1968.

[6] O. Teichmüller, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper,

J. Reine Angew. Math. 176, 1937, pp. 141–152.

[7] E. Witt : Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p von Grade p^n, J. Reine Angew. Math. 176, 1936, pp. 126–140.