数理解析研究所講究録
230巻 1975年 47-58

$\mathbb{C}^3/G$ が compact 複素多様体となる affine 変換群 G について

東北大理　　内田興二

$\mathbb{C}^3$ は複素3次元 affine 空間とする。 G は $\mathbb{C}^3$ の affine 変換のつくる群とする。 即ち G の任意の元 g に対して、一次変換 A 及び $\mathbb{C}^3$ の元 a が定まって、任意の $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^3$ に対して

$$g\mathbb{X} = A\mathbb{X} + a$$

と表わされるものとする。 このとき A 全体のつくる群を H とすると、$g \to A$ は G から H への準同型を与える。 その kernel を G_0 とすると $G/G_0 \cong H$ で, G_0 は

$$l\mathbb{X} = \mathbb{X} + a_l$$

なる元から成り、a_l 全体のつくる加群 L と同型である。 G_0 が正規部分群だから, 任意の $A \in H$, $a_l \in L$ に対して $Aa_l \in L$ が成立つ。 以下 G は次の3条件をみたすものとする。

1) G は $\mathbb{C}^3$ に固有不連続に作用する。 即ち $K \subset \mathbb{C}^3$ を

任意のcompact setとするとき、$K \cap gK \neq \emptyset$ となる $g \in G$ は高々有限個しか存在しない。

2) Gの単位元以外の元は固定点を持たない。即ち $g \neq e$ なら $g\mathbb{X} = \mathbb{X}$ となる $\mathbb{X} \in \mathbb{C}^3$ は存在しない。

3) $\mathbb{C}^3/G$ は compact である。

注. ここでは $\mathbb{C}^3$ に限って考えているが、n次元でも同様に考えることができる。このようにして得られるcompact複素多様体 $\mathbb{C}^n/G$ は *hyperelliptic manifold* と呼ばれる。2次元の場合はすでに研究されているが、3次元の場合は吉原によって始められたばかりである。目標は $\mathbb{C}^3/G$ の多様体としての性質，分類にあるが、複素多様体論の一般論を有効に使う方法がまだ分らないので、手始めにGの構造を線形代数や若干の数論的知識を利用して調べようというわけである。

問題 1. Gは *solvable* か.

問題 2. Gは高々6個の元で生成される(有限指数の部分群をもつ)か。

Gの構造を決める決定的な武器は見つかっていない。条件 2) から任意の $A \in H$ の固有値に1が現われる。

定理1. Hが有限群とするとHはsolvableである。Hは次のもののどれかと同型である。

i) 位数8のdihedral group (非可換なものはこれに限る)

ii) 位数1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12の巡回群

iii) (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)型アーベル群

定理2. Hが適当な座標系でdiagonal行列で表わされる無限群とする。そのとき、実2次体又は総虚4次体Kが存在して、Hの元はすべて

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^{\sigma} \end{pmatrix}$$

と表わされる。ここでεはKの単数で，σはKの同型写像(ただし恒等写像でも複素共役写像でもない)。

これまでに得られた主な結果は上の2つである。それ以外の場合についても最後に触れる。以下2つの定理の証明の方針を述べる。なお定理1は吉原君と共著の論文に発表される予定である。

§1. Hが有限群の場合

このとき $\mathbb{C}^3/G_0$ も compact だから，それは complex torus であり，L は $\mathbb{C}^3$ の lattice である。任意の $A \in H$ は L の自己同型を引き起こすから，L の basis を $\omega_1, \cdots, \omega_6$ とすると

$$A(\omega_1, \cdots, \omega_6) = (\omega_1, \cdots, \omega_6)N$$

と書ける。ここで N は有理整係数の 6 次正方行列。
$\Omega = (\omega_1, \cdots, \omega_6)$ は 3×6 行列であるが，L の basis だから

$$\det\begin{pmatrix}\Omega \\ \overline{\Omega}\end{pmatrix} \neq 0 \qquad , \overline{\Omega} \text{ は } \Omega \text{ の複素共役}$$

であり，上の式から

$$\begin{pmatrix} A & \\ & \overline{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega \\ \overline{\Omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Omega \\ \overline{\Omega}\end{pmatrix} N$$

だから，A の固有値を $1, \alpha, \beta$ とすれば，N の固有値は $1, \alpha, \beta, 1, \overline{\alpha}, \overline{\beta}$ となる。従って α 及び β は有理数体上高々 4 次の代数的数で，一方がちょうど 4 次のときには α と β は共役である。仮定から A の位数は有限，従って α 及び β は 1 の巾根であることを考えて，A の位数は定理 1, ii) の値しかとれないことがわかる。特に A の位数が 5 のときには，α は 1 の原始 5 乗根で，β は α の共役かつ $\beta \neq \alpha, \overline{\alpha}$ だから $\det A \neq 1$ である。即ち H の部分群で $\det A = 1$ となるもの全体から成るものを H_1 とすると，H_1 の位数は $2^a 3^b$ の形となり H_1 は可解，従って H も可解となる。

補題 1. Hは(p,p,p)型アーベル群を含まない。

これからアーベル群の場合は容易であり、実際それらのHに対応するGをつくることができる。

補題 2. Hの5-Sylow群は5次巡回群又はtrivial, 3-Sylow群は$(3,3)$型アーベル群の部分群である。

補題 3. Hがアーベルでないとし, $ABA^{-1}=B^{-1}$なる関係をもつ2元A, Bによって生成されているとする。そのとき$A^2=1$であり、適当な座標系で

$$A=\begin{pmatrix} -1 & \\ & A' \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & \\ & B' \end{pmatrix}$$

と書ける。ここでA'及びB'は2次正方行列.

補題 4. HがS_3又はA_4と同型になることはない。

これらの補題からHはSylow群の直積となることがわかり、任意の元が固有値1をもつこと等から定理1が得られる。定理1のそれぞれの場合に、条件をみたすGが存在することもわかる。

§2. Hがdiagonalな無限群の場合

必要なら座標系をとりかえて、Hの任意の元は

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$$

の形をしているとしてよい。又、次の定理によってGはアーベル群ではない。

定理（吉原）　Gがアーベル群ならば、Hの任意の元は

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

の形に表わされ、$\mathbb{C}^3/G$ は complex torus に biholomorphic である。

Gの元は

$$g\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}\mathbb{X} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

のように表わされるから、この形で互いに非可換な2元の交換子を考えることによって

$$l\mathbb{X} = \mathbb{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \quad , l \neq e$$

の形の元がGに含まれる。　${}^t(0, l_2, l_3) \in L$ だからこの形

のLの元全体のつくる部分加群をL'とすると、L'は高々4個の生成元をもつ自由アーベル群である。

補題5. ${}^t(0,0,l_3)$ 又は ${}^t(0,l_2,0)$ の形の0でない元がL'に含まれればHは有限群である。

証明. ${}^t(0,0,l_3)\in L'$とする。L'の任意の元がこの形だと$\mathbb{C}^3/G$がcompactになれないから${}^t(0,m_2,m_3)$, $m_2\neq 0$の形の元もL'に含まれる。Hの任意の元Aに対して

$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\l_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&\alpha&\\&&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\l_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\beta l_3\end{pmatrix}\in L'$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\m_2\\m_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\alpha m_2\\\beta m_3\end{pmatrix}\in L'$$

となる。L'がdiscreteなことから、βは± 1か虚2次体の単数、即ち$\beta^{12}=1$でなければならない。αがβの共役元なら$A^{12}=1$であり、共役元でなければ、βの定義多項式を$f(X)$とするとき、2番目の式から${}^t(0,f(\alpha)m_2,0)\in L'$となり、$f(\alpha)m_2\neq 0$だから上と同様に考えて$\alpha^{12}=1$即ち$A^{12}=1$となる。従ってHは有限群である。

補題6. Hの任意の元$A\in H$に対して、αは有理数体上

高々4次の代数的数でしかも単数である。 β は α の共役元である。

証明. $AL'=L'$ となるから L' の basis をとって考えればよい。 β が共役でないと上の証明のように ${}^t(0,0,l_3)$ の形の元が L' に含まれる。

補題 7. L' の rank は 4 である。

証明. $B^{12}\neq 1$ なる H の元 B をとり、 B に対応する G の元

$$h\mathbb{X}=\begin{pmatrix}1&&\\&\gamma&\\&&\delta\end{pmatrix}\mathbb{X}+\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{pmatrix}$$

をえらんでおく。 座標軸を平行移動させて $l_2=l_3=0$ としてよい。 そのとき G の任意の元

$$g\mathbb{X}=\begin{pmatrix}1&&\\&\alpha&\\&&\beta\end{pmatrix}\mathbb{X}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

に対し

$$ghg^{-1}h^{-1}\mathbb{X}=\mathbb{X}+\begin{pmatrix}0\\(1-\gamma)a_2\\(1-\delta)a_3\end{pmatrix}$$

となる。 $\mathbb{C}^3/G$ の compact 性により、 g が動くとき ${}^t(a_2,a_3)$ は $\mathbb{R}$ 上 4 次元空間を張るから、上の形から L' の rank は 4

となる。

従って L' の basis Ω' をとって（第1成分の0を無視して2次の列ベクトルと考える）

$$\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \Omega' = \Omega' N' \quad , N' は有理整係数4次正方行列$$

とすると §1 と同じに考えて N' の固有値は $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ となる。従って α は3次ではあり得ない。又 α が4次のときには体 $Q(\alpha)$ は総虚でなければならない。Hの元Aを動かしたとき α が4次になるものが存在したとする。このとき L' の0でない元 ${}^t(0, l_2, l_3)$ をとると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha l_2 \\ \beta l_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^2 l_2 \\ \beta^2 l_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^3 l_2 \\ \beta^3 l_3 \end{pmatrix}$$

は L' において有限指数の部分群を生成する。その指数を n とすると、Hの任意の元Bに対して

$$nB \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \gamma & \\ & & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

はその部分群に含まれるから、成分毎に考えて $\gamma \in Q(\alpha)$ で $\beta = \alpha^\sigma$ とすると $\delta = \gamma^\sigma$ となることがわかる。$\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ がすべて異なるから σ は複素共役でも恒等写像でもない。従ってこのとき定理のように書ける。Hの元Aを動

かしたとき α が高々2次とする。 $\alpha^{12} \neq 1$ となる α をとると
このとき $Q(\alpha)$ は実2次体である。 α は単数だから α の共役元は $\pm\alpha^{-1}$ である。（固有値の考察から $\beta = \alpha$ ではない）

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \gamma & \\ & & \delta \end{pmatrix}, \quad \gamma \notin Q(\alpha)$$

なる元が存在すれば，γ 及び $\alpha\gamma$ も高々2次であり、$Q(\alpha)$ 上の γ の共役を γ'，$\alpha\gamma$ の共役を $(\alpha\gamma)'$ とすると

$$(\alpha\gamma)' = \alpha\gamma' = \pm\alpha\gamma^{-1}$$

$$(\alpha\gamma)' = \pm(\alpha\gamma)^{-1} = \pm\alpha^{-1}\gamma^{-1}$$

の2つの式から $\alpha^2 = 1$ となり α のとり方に反する。 従って $\gamma \in Q(\alpha)$ となり、そのとき $\delta = \gamma^\sigma$ （$\beta = \alpha^\sigma$ とする）となって、Hは定理2に述べる形になる。

例. Kが総虚4次体，σ は複素共役でない同型写像とする。Kの基本単数を ε，1の巾根の生成元を ζ，その位数を n とする。

$$g_1 \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^\sigma \end{pmatrix} \mathbb{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2 \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \zeta & \\ & & \zeta^\sigma \end{pmatrix} \mathbb{X} + \begin{pmatrix} \alpha/n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \text{は虚数}$$

とする。 Kの整数の basis を $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ とし、G_0

は

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & \omega_1^\sigma & \omega_2^\sigma & \omega_3^\sigma & \omega_4^\sigma \end{pmatrix}$$

を basis にもつ lattice に対応するものとする。 そのとき g_1, g_2, G_0 で生成される群 G は条件をみたす。

§3. その他の場合

問題1, 2共に未解決であり、可解な場合 H として可能なものをすべて求めることもまだできていない。 上に述べたような方法が一般にどこまで有効かも疑問であるが、上のような場合に体 K の数論的性質が $\mathbb{C}^3/G$ の幾何学的性質に影響することは確かなように思われる。 上に述べたものの他 H がアーベル群になる場合には、適当な座標系でその元が

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \beta \\ & & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 1 & \beta \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

の形に書ける場合が考えられる。 あとの2つの場合はそのままでは G の生成元を求めるのが難かしいが、§2で述べた吉原の定理と同様に考えて G の center が G_0 に含まれるように biholomorphic な変換をしておけば求められる。 最初の場合には、虚2次体 K が存在して、適当に座標をとりかえると、

αはKの単数，βはKの整数となるようにできる。そのような形の元全体はアーベル群として3個の生成元をもつが，Hは高々2個で生成される部分群でなければならない。