数理解析研究所講究録
230巻 1975年 30-40

実2次体の基本単数について

中京大 養　久綱 正和

§0. 実2次体$Q(\sqrt{D})$の基本単数に関して，現在ではいろいろな事が調べられているが，それらの多くは Ankeny, Chowla, Hasse 共著の1965年に発表された論文[1]を出発点としている。そこにおいて彼らは次の事を示した：

定理 $p=4n_0^2+1$ ($n_0>1$ 素数でない) なる素数に対して，実2次体$Q(\sqrt{p})$の類数は1より大である。

この定理の証明には，$n+\sqrt{n^2+1}$ が実2次体$Q(\sqrt{n^2+1})$の単数であることを用いている。従って，実2次体の(基本)単数を知る事によって，上の定理を拡張することができよう。Hasse [5]はこのように考えて，genus number は1であるが，class number は1より大なる実2次体を種々構成した。Hasse はそこで，実2次体の基本単数に関する Degert の結果[3]を用いたのである。

以下我々は色々な角度からこれまでに得られた結果をまとめてみよう。

以下，次の記号を使う。

実2次体 $Q(\sqrt{D})$，$D>0$ square-free integer

判別式 d，基本単数 $\varepsilon_D=\frac{1}{2}(t_0+u_0\sqrt{D})>1$

単数 $\varepsilon=\frac{1}{2}(t+u\sqrt{D})>1$

§1. Dが与えられたとき，ε_Dをexplicitに求めること。あるいはそれの特徴を見つけること。

(1) Richaud-Degert [3]

$D=n^2+r$，$-n<r\leq n$ とおくとき，$r|4n$ ならば，

$$\varepsilon_D=\begin{cases} n+\sqrt{D} & ,\ N\varepsilon_D=-\operatorname{sgn} r \ \cdots\ |r|=1 \\ \frac{1}{2}(n+\sqrt{D}) & ,\ N\varepsilon_D=-\operatorname{sgn} r \ \cdots\ |r|=4 \\ \frac{1}{|r|}(2n^2+r+2n\sqrt{D}) & ,\ N\varepsilon_D=1 \ \cdots\ |r|\neq 1,4 \end{cases}$$

以下，$r|4n$ なる条件を満たす実2次体をR-D typeという。特に，$|r|=1$ or 4 の場合を狭義のR-D typeという。

(2) Kutsuna [7]

$D=p$ or $2p$，$p\equiv 3\ (4)$ 素数 のとき

$$\varepsilon_D=\begin{cases} a^2+1+ab\sqrt{D} & \cdots\ p\equiv 3\ (8) \\ a^2-1+ab\sqrt{D} & \cdots\ p\equiv 7\ (8) \end{cases}$$

ここで，a,bは$\sqrt{D}$の連分数展開の周期の半分から得られる。

(3) Nakahara [13]

$D=pq$ or $2pq$，$p<q$ odd primes，p or $q\equiv 3\ (4)$，

$D \not\equiv 5\ (8)$ のとき

$$\varepsilon_D = \begin{cases} a^2 \pm 1 + ab\sqrt{D} \\ \frac{2}{p} a^2 \pm 1 + \frac{2}{p} ab\sqrt{D} \\ \frac{1}{p} a^2 \pm 1 + \frac{1}{p} ab\sqrt{D} \end{cases}$$

(2) と同様に，a, b は $\sqrt{D}$ の連分数展開の周期の半分から得られる。

§2. 単数 ε が与えられたとき，それが基本単数であるか否かを判定すること。

(1) $u = 1$ or 2 $\Rightarrow$ $\varepsilon = \varepsilon_D$

(2) Yokoi [17] [18]

$u = p$ or $2p$, p prime , $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ は狭義の R-D type ではない。

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_D$$

(3) Morikawa [10] [11]

$N\varepsilon = 1$ を仮定し， $\delta = \begin{cases} 0 \cdots D \equiv 1\ (4) \\ 1 \cdots D \equiv 2, 3\ (4) \end{cases}$ とおく.

(i) $u = 2^{\delta} p^n$, p odd prime > 4 , $n \geq 2$

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_D \text{ or } \varepsilon_D^{\,2}$$

(ii) $u = 2^{\delta} pq$, p, q primes , $\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-2}\, p < q$

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_D \text{ or } \varepsilon_D^{\,2} \text{ or } \varepsilon_D^{\,4}$$

(iii) $u = 2^{\delta} rq$, q prime , $\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-2}\, r < q$

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_D^{\,2^{l}} , \ l \geq 0 .$$

(iv) (iii)の仮定の下で $D \not\equiv 1\ (4)$, $\frac{u}{2}$ odd $\Rightarrow$ $\varepsilon = \varepsilon_D$

(5) Kutsuna [7]

(i) $N\varepsilon = 1$ のとき $t < D-2$ or $u < \sqrt{D-4}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon = \varepsilon_D$

(ii) $N\varepsilon = -1$ のとき $t < D\sqrt{D-6}$ or $u < D-3$ $\Rightarrow$ $\varepsilon = \varepsilon_D$

(6) Kutsuna

$N\varepsilon = -1$ のとき

(i) $t = pq$, p, q primes, $q < p < q^4 + 5q^2 + 5$, $D \neq 2, 5$

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_D$$

(ii) $t = rp^k$, p prime, $(r, p) = 1$,

$$r < \begin{cases} p^{2k} + 3 & \cdots\cdots\ p \neq 3, 5 \text{ or } p = 5,\ k > 2 \\ 3^{2k-3} & \cdots\cdots\ p = 3 \end{cases}$$

更に, $\forall r_i | r$ に対して $r_i^2 + 4 = u_i^2 D_i$, D_i square-free とおくとき

$D \neq D_i$. $\Rightarrow$ $\varepsilon = \varepsilon_D$

$N\varepsilon = 1$ のとき. $t-2$, $t+2$ は共に平方数でないとする.

(iii) $t - 2 = r \cdot p^k$, p prime, $(r, p) = 1$

$$r < \begin{cases} (p^k + 2)^2 & \cdots\cdots\ p \geq 11 \text{ or } p = 7,\ k \neq 3 \text{ or } p = 5,\ k \neq 3, 4. \\ (3^{k-3} + 1)^2 & \cdots\cdots\ p = 3 \end{cases}$$

$\forall r_i | r$ に対して $(r_i + 2)^2 - 4 = u_i^2 D_i$, D_i square-free とおくとき

$D \neq D_i$. $\Rightarrow$ $\varepsilon = \varepsilon_D$

(iv) $t + 2 = rp^k$, p prime, $(r, p) = 1$

$r < (p^k - 3)^2$ $\cdots\cdots$ $p \geq 11$ or $p = 7$, $k \neq 3$ or $p = 5$, $k \neq 3, 4, 5$

$r < (3^{k-3}-1)^2 \quad \cdots\cdots \quad p=3$

${}^\forall r_i | r$ に対して $(r_i-2)^2-4 = u_i^2 D_i$, D_i square-free

とおくとき $D \neq D_i$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_D .$$

この結果の証明は，その方針を最後の§で述べることにしよう。

§3. uが与えられたとき，$u_0 = u$ となる基本単数をもつ実２次体を構成すること。

(1) $N\varepsilon_D = -1$ の場合. Yokoi [17] は $u = p \equiv 1\ (4)$ prime のとき示し，Nakahara [12] はそれを一般化した：

$u = \prod_i p_i^{e_i}$, $p_i \equiv 1\ (4)$ primes , $e_i \geqq 1$ に対して ${}^\exists a, b$ s.t. $0 < a < \frac{1}{2}u^2$, $a^2+4 = bu^2$. そこで $D = u^2m^2 \pm 2am + b$ $(m \geqq 2)$ とおく。 D or $\frac{D}{4}$ が square-free ならば

$$\varepsilon_D = \frac{1}{2}(u^2 m \pm a + u\sqrt{D})$$

(2) $N\varepsilon_D = 1$ の場合. Yokoi [18] は $u = p \equiv 3\ (4)$ prime のとき示し，Kutsuna [7] はそれを一般化した：

任意の自然数 u に対して $u = u_1 \cdot u_2$, $(u_1, u_2) = 1 \sim 2$ とかってに分解するとき， ${}^\exists a, b$ s.t. $0 < a \leqq u_2^2$, $u_1^2 a + 4 = u_2^2 b$. そこで $D = u^2m^2 + 2(u_1^2 a + 2) + ab$

$(m \geq 1)$ とおく. $D = d$ or $\frac{d}{4}$ (d は判別式) ならば,

$$\varepsilon_D = \frac{1}{2}(u^2 m + u_1{}^2 a + 2 + u\sqrt{D}) .$$

§4. 大きさの評価.

(1) Hua [6] $N\varepsilon_D = 1$ のとき.

$$\log \varepsilon_D < \sqrt{d}\left(\frac{1}{2}\log d + 1\right)$$

(2) Takaku [15] $N\varepsilon_D = 1$ のとき.

D に対して $\exists\, l, m, \Delta (= \text{square-free})$ s.t.

$D = \Delta(m^2\Delta \pm 2^{2-\delta})/l^2$, $\delta = 0, 1$ or 2.

$$\varepsilon_D < 2^\delta l^2 D$$

(3) Kutsuna

D に対して $\exists\, l$: least positive integer s.t.

$l^2 D = n^2 + r$, $-n < r \leq n$, $r | 4n$.

そこで $\delta = \begin{cases} 0 \cdots\cdots r | 4n,\ r \nmid 2n \\ 1 \cdots\cdots r | 2n,\ r \nmid n \\ 2 \cdots\cdots r | n \end{cases}$, $|r| = 2^{2-\delta}\Delta$, $n = \Delta m$

とおくと,

$$2l\sqrt{D} - 1 < \varepsilon_D < 2l\sqrt{D} + 1 \quad \cdots\cdots \delta = 2,\ \Delta = 1$$

$$l\sqrt{D} - 1 < \varepsilon_D < l\sqrt{D} + 1 \quad \cdots\cdots \delta = 0,\ \Delta = 1$$

$$\frac{2^\delta}{\Delta} l^2 D - 2 < \varepsilon_D < \frac{2^\delta}{\Delta} l^2 D + 2 \quad \cdots\cdots \text{others}$$

この結果の証明は §6 定理1 を用いて容易に示すことができる。

(4) Yamamoto [16]

(i) $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ primes に対して

$$p_i = \mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{p}_i' \quad \text{in } \mathbb{Q}(\sqrt{D}), \quad \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_i' \text{ principal ideals}$$

なる実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ が無数に存在するならば, $^{\exists} C_0 = C_0(n, p_1, \cdots, p_n)$, 十分大なる D に対し

$$\log \varepsilon_D > C_0 (\log \sqrt{D})^{n+1}$$

(ii) $p < q$ primes, $m_k = (p^k q + p + 1)^2 - 4p \quad (k \geqq 1)$

このとき $\mathbb{Q}(\sqrt{m_k})$ は (i) の条件を満たし, $^{\exists} C_0$, 十分大なる D に対し

$$\log \varepsilon_D > C_0 (\log \sqrt{D})^3$$

§5. 類数問題への応用.

§0で述べたように, Hasse [5] は Degert の結果を用いて, genus number は1であるが, class number は1より大なる実2次体を構成した。Hasse 以後, Yokoi [17], [18], Nakahara [13] らは実2次体の基本単数を調べ, その結果を用いて, Hasse の方法に従い, class number が1より大きい実2次体を構成し, class number の下からの評価を与えた。

これらとは異なる応用としては, 最近発表された Chowla [2] Hartung [4] の結果がある。ここではそれを紹介しよう。

補題 (Ankeny, Artin, Chowla)

d を判別式とする実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の class number を $h = h(d)$

で表わし，その基本単数を $\frac{1}{2}(t_0+u_0\sqrt{d})$ で表わす。

$d=3q$, $q\equiv 1\ (3)$ square-free positive integer とし，H を虚2次体 $Q(\sqrt{-q})$ の class number とするとき次の合同式が成り立つ。

$$H \equiv -\frac{u_0}{t_0}h \quad (3)$$

この補題より $u_0\equiv 0\ (3)$ ならば $H\equiv 0\ (3)$ がいえる。Chowla はこのことを用いて，次の定理を証明し，Hartung はその拡張を与えたのである：

定理　$p=27n^2+4$ を素数とし，虚2次体 $Q(\sqrt{-p})$ の class number を H とするとき，　$H\equiv 0\ (3)$　である。

§6. 分類，その他.

すべての実2次体 $Q(\sqrt{D})$ の基本単数は次の様に分類される（Kutsuna [9]）：

定理1　v_0 を　$v_0^2D=n_0^2+r_0$, $-n_0<r_0\le n_0$, $r_0|4n_0$ を満たす最小の正整数とするとき，実2次体 $Q(\sqrt{D})$ の基本単数 ε_D は次の通りである：

$$\varepsilon_D=\begin{cases} n_0+v_0\sqrt{D} & , N\varepsilon_D=-1 \quad \cdots \quad r_0=1 \\ \frac{1}{2}(n_0+v_0\sqrt{D}) & , N\varepsilon_D=-1 \quad \cdots \quad r_0=4 \\ n_0+\sqrt{D} & , N\varepsilon_D=1 \quad \cdots \quad r_0=-1 \\ \frac{1}{2}(n_0+\sqrt{D}) & , N\varepsilon_D=1 \quad \cdots \quad r_0=-4 \\ \frac{1}{|r_0|}(2n_0^2+r_0+2n_0v_0\sqrt{D}) & , N\varepsilon_D=1 \quad \cdots \quad |r_0|\ne 1,4 . \end{cases}$$

定理１の v_0 は $\sqrt{D}$ の正則連分数展開より得られる：

定理２．D が $p\equiv 3\ (4)$ なる素因数をもち，$D\not\equiv 5\ (8)$ であるとする。$\sqrt{D}$ の正則連分数展開の周期を $k\ (=2m$ 偶数)，ν 次近似分数を A_ν/B_ν，ν 次完全商を $\dfrac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu}$ とするとき，

定理１の v_0 は B_{m-1} と一致する．更に，$|r_0|=Q_m$ であり，

$$\varepsilon_D=\frac{1}{Q_m}\left\{2A_{m-1}^2+(-1)^{m-1}Q_m+2A_{m-1}B_{m-1}\sqrt{D}\right\}.$$

最後に，§2 (6) の証明に必要なことがらをまとめておこう。単数 $\varepsilon=\frac{1}{2}(t+u\sqrt{D})$，$\varepsilon^n=\frac{1}{2}(t_n+u_n\sqrt{D})$ から定まる t_n, u_n には次の性質がある．

補題１　$N\varepsilon=-1$ のとき

(i) $t_n=t^n+\cdots+\frac{1}{24}(n^3-n)t^3+nt$ …. n odd

(ii) $u_n=u\{\Delta^{\frac{n-1}{2}}-\cdots\pm\frac{1}{24}(n^3-n)\Delta\mp n\}$ … n odd，$\Delta=t^2+4=Du^2$.

補題２　$N\varepsilon=1$ のとき

(i) $t_n-2=(t-2)\{(t-2)^{\frac{n-1}{2}}+\cdots+\frac{1}{24}(n^3-n)(t-2)+n\}^2$ …. n odd

(ii) $t_n+2=(t+2)\{(t+2)^{\frac{n-1}{2}}-\cdots\pm\frac{1}{24}(n^3-n)(t+2)\mp n\}^2$ … n odd

(iii) $u_n=u\{\Delta^{\frac{n-1}{2}}+\cdots+\frac{1}{24}(n^3-n)\Delta+n\}$ … n odd，$\Delta=t^2-4=Du^2$.

文　献

[1] Ankeny, Chowla, Hasse : On the class-number of the maximal real subfield of a cyclotomic field, J. reine angew. Math. 217 (1965), 217－220.

[2] S. Chowla : Congruence properties of class numbers of quadratic fields, J. of Number Theory 6 (1974), 136-137.

[3] G. Degert : Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reell-quadratischer Zahlkörper, Abh. math. Sem. U. Hamb. 22 (1958), 92-97

[4] P. Hartung : Explicit construction of a class of infinitely many imaginary quadratic fields whose class number is divisible by 3, J. of Number Theory 6 (1974), 279-281

[5] H. Hasse, Über mehrklassige, aber eingeschlechtige reell-quadratischer Zahlkörper, Elemente der Math. 20 (1965), 49-59.

[6] L.K. Hua ; On the least solution of Pell's equation, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 731-735.

[7] M. Kutsuna : On an explicit formula of the fundamental units of real quadratic fields (in Japanese), Suron Hanti, 1 (1971), 41-62.

[8] ———— : On the fundamental units of a certain type of real quadratic fields (in Japanese), Suron Hanti, 1 (1971), 116-138.

[9] ———— : On the fundamental units of real quadratic fields, Proc. of Japan Acad. 50 (1974), 580-583.

[10] R. Morikawa ; On units of real quadratic fields, J. of Number Theory, 4 (1972), 503-507

[11] ——— : On the fundamental units of certain real quadratic number fields (to appear).

[12] T. Nakahara : On the determination of the fundamental units of certain real quadratic fields, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. 24 (1970) 300-304.

[13] ―――――― : On the fundamental units and ~~its~~ an estimate of the class numbers of real quadratic fields, Rep. of fac. of sci. eng. Saga U. 1 (1974), 104-116.

[14] (H.-U.) Nordhoff : Explizite Darstellungen von Einheiten und ihre Anwendung auf Mehrklassigkeitsfragen bei reell-quadratischen Zahlkörpern I, J. reine angew. Math. 268/269 (1974) 131-149.

[15] A. Takaku : Units of real quadratic fields. Nagoya Math. J. 44 (1971), 51-55.

[16] Y. Yamamoto : Real quadratic number fields with large fundamental units, Osaka J. of Math. 8 (1971), 261-270.

[17] (H.) Yokoi : On real quadratic fields containing units with norm −1, Nagoya Math. J. 33 (1968), 139-152.

[18] ―― : On the fundamental unit of real quadratic fields with norm 1, J. of Number Theory. 2 (1970), 106-115.