数理解析研究所講究録
231巻 1975年 96-103

Slippage Problem における Rank Tests について

九大 理学部 垣内逸郎
木村美善
柳川 堯

Part I.

$\{f(x|\Delta) \mid \Delta \in (-\infty,\infty)\}$ は，パラメーターとして Δ を持つ実数上の p.d.f. の族。$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ は，$f(x|\Delta_i)$ に従う互いに独立な r.v. とする。この時，次の両側([A]) 及び片側([B]) slippage 検定問題を考える。

[A]

$$H_0 \quad : \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots\cdots = \Delta_k = 0$$

$$H_{i1}(\Delta) : \Delta_1 = \cdots = \Delta_{i-1} = \Delta_i - \Delta = \Delta_{i+1} = \cdots = \Delta_k = 0$$

$$H_{i2}(\Delta) : \Delta_1 = \cdots = \Delta_{i-1} = \Delta_i + \Delta = \Delta_{i+1} = \cdots = \Delta_k = 0$$

$$i = 1, 2, \cdots, k \ (k \geqq 3) \ ; \ \Delta > 0$$

[B]

$$H_0 \quad : \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots\cdots = \Delta_k = 0$$

$$H_i(\Delta) : \Delta_1 = \cdots = \Delta_{i-1} = \Delta_i - \Delta = \Delta_{i+1} = \cdots\cdots = \Delta_k = 0$$

$$i = 1, 2, \cdots, k \ (k \geqq 2) \ ; \ \Delta > 0$$

$P(D_\theta | H_{\theta'})$ は，$H_{\theta'}$ の下で H_θ を採択する確率を表わすものとする。

定義1. rank test は.

(1) $\quad P(D_0|H_0) \geqq 1-\alpha \quad , \quad 0<\alpha<1$

を満たす時, size α であるという。

$\mathcal{D}_\alpha$ を size α rank test の全体とする。

定義2. size α rank test d^* は.

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{2} P_{d^*}(D_{ij}|H_{ij}(\Delta)) = \sup_{d\in\mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{2} P_d(D_{ij}|H_{ij}(\Delta))$, when [A]

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P_{d^*}(D_i|H_i(\Delta)) = \sup_{d\in\mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^{k} P_d(D_i|H_i(\Delta))$, when [B]

を満たす時. Δ に対する most powerful size α (MPS-α) rank test と呼ぶ。

定義3. size α rank test d^* は、任意の $\varepsilon>0$ に対して $\Delta_\varepsilon>0$ が存在し、$0<{}^\forall\Delta<\Delta_\varepsilon$ に対して

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{2} P_{d^*}(D_{ij}|H_{ij}(\Delta)) > \sup_{d\in\mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{2} P_d(D_{ij}|H_{ij}(\Delta)) - \varepsilon$, when [A]

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P_{d^*}(D_i|H_i(\Delta)) > \sup_{d\in\mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^{k} P_d(D_i|H_i(\Delta)) - \varepsilon$, when [B]

を満たすとき、extended locally most powerful size α (ELMPS-α) rank test と呼ぶ。

$\mathbf{X}=(X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{kn})$ に対して、$R_{ij}(\mathbf{X})$, 及び $X_{(i)}$ は、それぞれ $X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{kn}$ における X_{ij} の rank, i 番目の順序統計量とする。また、$R(\mathbf{X})=(R_{11}(\mathbf{X}), R_{12}(\mathbf{X}), \cdots, R_{kn}(\mathbf{X}))$ とし. $H_\theta(\Delta)$ の下での $R(\mathbf{X})$ の density を $h_\theta(r|\Delta)$ とする。ここで $H_\theta(0)=H_0(\Delta)=H_0$ と約束する。

定理1A. $f(x|0)=f(-x|0)$ 及び $f(x|\Delta)=f(-x|-\Delta)$ が満たされるならば. ${}^\forall\alpha\in(0,1)$ に対して MPS-α rank test が存在し、

次式(6)で与えられる。

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
d_0(r) &= \begin{cases} 1 & \text{if} \ \max\limits_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le 2}} h_{ij}(r|\Delta) < \lambda\cdot h_0(r) \\ \xi(r) & \text{if} \qquad\qquad = \\ 0 & \text{if} \qquad\qquad > \end{cases} \\
d_{\ell m}(r) &= \begin{cases} \eta_{\ell m}(r) & \text{if} \ h_{\ell m}(r|\Delta) = \max\limits_{i,j} h_{ij}(r|\Delta) \ge \lambda\cdot h_0(r) \\ 0 & \text{if} \ \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$i, \ell = 1, 2, \cdots, k \ ; \ j, m = 1, 2 .$$

定理1B、$\forall \alpha \in (0,1)$ に対して、[B]のMPS-α rank test が存在し、次式(7)で与えられる。

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
d_0(r) &= \begin{cases} 1 & \text{if} \ \max\limits_{1\le i\le k} h_i(r|\Delta) < \lambda\cdot h_0(r) \\ \xi(r) & \text{if} \qquad\qquad = \\ 0 & \text{if} \qquad\qquad > \end{cases} \\
d_j(r) &= \begin{cases} \eta_j(r) & \text{if} \ h_j(r|\Delta) = \max\limits_{i} h_i(r|\Delta) \ge \lambda\cdot h_0(r) \\ 0 & \text{if} \ \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

以下の定理2A, 2Bにおいて、Hájek & Šidák [1] で与えられる次の条件[C]を仮定する。

[C] J は、0を含む開区間とするとき、

(i) $f(x|\Delta)$ は、a.e. x に対して $\Delta \in J$ の絶対連続関数

(ii) a.e. x に対して、

$$\dot{f}(x|0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta}\left[f(x|\Delta) - f(x|0) \right] \quad \text{が存在する。}$$

(iii) $\displaystyle \lim_{\Delta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{f}(x|\Delta)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{f}(x|0)|\, dx < \infty$

ここで $\dot{f}(x|\Delta)$ は Δ に関する $f(x|\Delta)$ の偏微分

定理2A. $\forall \Delta \in J$ に対して、$f(x|\Delta)=f(-x|-\Delta)$ が満たされるならば、$\forall \alpha \in (0,1)$ に対して [A] の ELMPS-α rank test が存在し、次式(8)で与えられる。

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
d_0(r) &= \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \max_{i,j} T_{ij}(r) < \lambda \\ \xi(r) & \text{if} \quad \qquad\qquad\quad = \\ 0 & \text{if} \quad \qquad\qquad\quad > \end{cases} \\
d_{\ell m}(r) &= \begin{cases} \eta_{\ell m}(r) & \text{if} \quad T_{\ell m}(r) = \max_{i,j} T_{ij}(r) \geq \lambda \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$i, \ell = 1, 2, \cdots, k \ ; \ j, m = 1, 2$$

$$T_{i1}(r) = \sum_{j=1}^{n} E_0\left[\frac{\dot{f}(X_{(r_{ij})}|0)}{f(X_{(r_{ij})}|0)}\right], \quad T_{i2}(r) = \sum_{j=1}^{n} E_0\left[\frac{\dot{f}(X_{(nk+1-r_{ij})}|0)}{f(X_{(nk+1-r_{ij})}|0)}\right]$$

E_0 は、H_0 の下での期待値を表わす。

定理2B. $\forall \alpha \in (0,1)$ に対して [B] の ELMPS-α rank test が存在し、次式(9)で与えられる。

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
d_0(r) &= \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \max_{i} T_i(r) < \lambda \\ \xi(r) & \text{if} \quad \qquad\qquad = \\ 0 & \text{if} \quad \qquad\qquad > \end{cases} \\
d_j(r) &= \begin{cases} \eta_j(r) & \text{if} \quad T_j(r) = \max_{i} T_i(r) \geq \lambda \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$j = 1, 2, \cdots, k \quad ; \quad T_i(r) = \sum_{j=1}^{n} E_0\left[\frac{\dot{f}(X_{(r_{ij})}|0)}{f(X_{(r_{ij})}|0)}\right]$$

さて、特に Δ が location parameter の場合($f(x|\Delta)=f(x-\Delta)$)には、定理2B が成り立つ。更に $f(x)=f(-x)$ であれば、$f(x|\Delta)=f(-x|-\Delta)$ を満たすから定理2A が成り立つ。また、Δ が scale parameter の場合($f(x|\Delta)=e^{-\Delta}f(x \cdot e^{-\Delta})$)には、

定理２Ｂが成り立つ。ところで location の場合 $\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|dx<\infty$ scale の場合 $\int_{-\infty}^{\infty}|xf'(x)|dx<\infty$ であれば 条件［C］を満たす。

このlocation と scale の場合には、Slippage 問題［A］,［B］において、0 を unknown で free な δ に置き換えた Slippage 問題［A′］,［B′］に対しても全く同様な結果が得られることを注意しておく。

Part II.

これからは、片側 Slippage 検定問題

$$[B'] \quad H_0 \ : \Delta_1=\Delta_2=\cdots\cdots=\Delta_k=\delta$$

$$H_i(\Delta) \ : \Delta_1=\cdots=\Delta_{i-1}=\Delta_i-\Delta=\Delta_{i+1}=\cdots=\Delta_k=\delta$$

$$i=1,2,\cdots,k \ (k\geqq 2), \quad \delta: \text{unknown and free.}$$

において、Δ が location parameter である場合を考え．次に挙げる (10) 及び (11) の test の power の単調性と，(11) の (10) に対する漸近相対効率について議論する

さて、正規分布の場合，$f(x-\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\Delta)^2]$，であるとき，uniformly most powerful size α test は．

$$(10) \quad d_0(x)=\begin{cases} 1 & \text{if} \quad \max_{1\leq i\leq k} V_i(x)\leq\lambda \\ 0 & \text{if} \qquad\qquad > \end{cases}$$

$$d_j(x)=\begin{cases} 1 & \text{if} \quad V_j(x)=\max_{1\leq i\leq k} V_i(x)>\lambda \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

$$V_i(x)=(\overline{x}_i-\overline{\overline{x}})/\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{\overline{x}})^2}, \quad \overline{x}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}, \quad \overline{\overline{x}}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i$$

で与えられることが知られている。([3],[4])

ここで、次の形の rank test を考える。

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
d_0(r) &= \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \max_{1\le i\le k} T_{Ni}(r) < \lambda \\ \xi_\alpha & \text{if} \quad \qquad\qquad = \\ 0 & \text{if} \quad \qquad\qquad > \end{cases} \\
d_j(r) &= \begin{cases} 1/m(r) & \text{if} \quad T_{Nj} = \max_{1\le i\le k} T_{Ni} > \lambda \\ (1-\xi_\alpha)/m(r) & \text{if} \quad \qquad\qquad = \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$j=1,2,\cdots,k, \quad m(r) = \#\{l \mid T_{Nl}(r) = \max_i T_{Ni}(r)\}$$

ただし, T_{Ni} は次の様に定義する。

$$T_{Ni} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} E_{Nj} Z_{Nj}^{(i)} \quad ,$$

E_{Ni} : 与えられた数

$$Z_{Nj}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad X_{(j)} \text{が } i \text{ 番目の母集団からの sample.} \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

[I] Powerの単調性

(10)及び(11)の test は、Slippage test の3種の検出力について、

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&P(D_i \mid H_i(\Delta)) = P(D_j \mid H_j(\Delta)) \\
&P(D_i \mid H_j(\Delta)) = P(D_l \mid H_m(\Delta)) \\
&P(D_0 \mid H_i(\Delta)) = P(D_0 \mid H_j(\Delta)), \quad 1 \le i \ne j, l \ne m \le k
\end{aligned}
$$

を満足する。そこで、次の3種の検出力の単調性を考える。

(i) $P(D_i|H_i(\Delta))$は，Δに関して非減少。

(ii) $P(D_j|H_i(\Delta))$は，Δに関して非増大．　$(i \neq j)$

(iii) $P(D_0|H_i(\Delta))$は，Δに関して非増大。

このとき次の定理が成り立つ。

定理3．location parameter Δを持つ分布族に対し，(10)のtestは，(i)を満足する

定理4．E_{Ni}がiに関してnondecreasingであるとき，parameter Δに関しstochastically increasingな分布族に対して，(11)のtestは，(i)を満足する

〔II〕Asymptotic Relative Efficiency (A.R.E)

標本数を明確にし，かつ(10)と(11)のtestを区別する為に，H_iを採択する決定D_iを，(10)の場合D_{ni}^M，(11)の場合D_{ni}^Rと表わすことにする。(10)に対する(11)のtestの漸近相対効率は，Pitmanの考えに従って

$$\lim_{n\to\infty} P(D_{ni}^M | H_i(\Delta^{(n)})) = \lim_{n\to\infty} P(D_{n^*i}^R | H_i(\Delta^{(n)}))$$
$$\lim_{n\to\infty} P(D_{nj}^M | H_i(\Delta^{(n)})) = \lim_{n\to\infty} P(D_{n^*j}^R | H_i(\Delta^{(n)}))$$
$$\lim_{n\to\infty} P(D_{n0}^M | H_i(\Delta^{(n)})) = \lim_{n\to\infty} P(D_{n^*0}^R | H_i(\Delta^{(n)}))$$

を同時に満たすn, $n^* = n^*(n)$について

(13) $$e_{R.M} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^*}$$

で定義する。　ここで，$\Delta^{(n)} = n^{-1/2}\Delta$とする。

このとき，$e_{R.M}$は，t-testに対するrank testの

漸近相対効率と一致する。

Refferences

[1] Hájek, J. and Šidák, Z. (1967): Theory of rank tests. Academic Press. New York.

[2] Hall, I.J. and Kudô, A. (1968): On slippage tests-(I) A generalization of Neyman-Pearson's lemma. A.M.S. 39, 1693-1699

[3] Hall, I.J., Kudô, A. and Yeh, N.C. (1968): On slippage tests-(II) Similar slippage tests. A.M.S. 39, 2029-37

[4] Paulson, E. (1952): An optimum solution to the k-sample slippage problem for the normal distribution. A.M.S. 23, 610-616.

[5] Puri, M.L. (1964): Asymptotic efficiency of a class of c-sample tests. A.M.S. 35, 102-121