数理解析研究所講究録
231巻 1975年 69-77

共分散行列に関するいくつかの検定の性質

熊本大学　教養部　長尾寿夫

§1. 序

多次元正規分布の共分散行列Σに関する次の仮説検定問題を取り扱う。(i)仮説 $H_1:\Sigma=\Sigma_0$ 対立仮説 $K_1:\Sigma\neq\Sigma_0$, (ii) $H_2:\Sigma=\sigma^2 I$, $K_2:\Sigma\neq\sigma^2 I$ の二つの仮説検定問題について考えることにする。第一点は，以前[4]において提案した(i), (ii)に対する検定統計量の性質，第二点は，それらの検定統計量と，(i), (ii)に対する尤度比検定との漸近展開による検定力の数値的比較をあたえる。

§2. 検定統計量

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ を p 次元正規分布 $N(\mu,\Sigma)$ からの random sample とする。このとき(i)に対して

$$(2.1)\qquad T_1=\frac{n}{2}\mathrm{tr}(S\Sigma_0^{-1}/n-I)^2,$$

ただし $S=\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha-\bar{x})(x_\alpha-\bar{x})'$ ，$n=N-1$.

(ii)に対しては，上と同じ記号を使って，

$$(2.2)\qquad T_2=\frac{p^2n}{2}\mathrm{tr}\{S/\mathrm{tr}S-p^{-1}I\}^2 .$$

この（2.2）の検定は，別の観点より，John[1]，Sugiura[7]によって locally best invariant test であることが示されている。

§3．準備

補題3.1. S_n をウイシャート分布 $W(\Sigma_n, n)$ に従うものとする。ただし $\Sigma_n=\Sigma+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ であり，Σ は，正定値行列である。$Y=(y_{ij})=(\Sigma^{-\frac{1}{2}}S_n\Sigma^{-\frac{1}{2}}-nI)/\sqrt{2n}$ とし，$n\to\infty$ のとき y_{ij} $(i\leq j)$ は，互に独立であり，y_{ii} は $N(\theta_{ii}^*, 1)$，y_{ij} $(i<j)$ は，$N(\theta_{ij}^*, 1/2)$ にそれぞれ法則収束する。ただし $(\theta_{ij}^*)=\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Theta\Sigma^{-\frac{1}{2}}/\sqrt{2}$ である。

補題3.2. $P_{\delta^2}(x)$ を非心度 δ^2 であり自由度 f なる非心 χ^2-分布とする，このとき $P_{\delta^2}(x)/p_0(x)$ は，x の単調増加関数である。

§4．検定統計量 T_1, T_2 の性質

上の補題3.1によって，対立仮説の列 $K_n: \Sigma=\Sigma_0+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下では，$Y=(\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}S\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}-nI)/\sqrt{2n}$ は，漸近的に正規分布である。すなわち $y'=(y_{11}, y_{22}, \cdots, y_{pp}, \sqrt{2}y_{12}, \cdots, \sqrt{2}y_{p-1,p})$ とするとき，

仮説の下で $y \sim N(0, I)$，対立仮説の下で $y \sim N(\theta^*, I)$ となる。ただし $(\theta_{ij}^*) = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \theta \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} / \sqrt{2}$ としたとき，$\theta^{*\prime} = (\theta_{11}^*, \cdots, \theta_{pp}^*, \sqrt{2}\theta_{12}^*, \cdots, \sqrt{2}\theta_{p-1,p}^*)$ である。だから平均 θ^* が，零かどうかの検定問題とみなすことが出来る。$f = \frac{1}{2}p(p+1)$ とし，大きさ $f \times f$ の任意の直交行列によって問題は，不変にするから，maximal invariant は，$y'y$ となる。すると $y'y$ は，自由度 f，非心度 $\delta^2 = \frac{1}{2}\theta^{*\prime}\theta^*$ である非心 χ^2-分布に従う。よって補題3.2によって，$y'y = \mathrm{tr}\, Y^2 \geq c$ が UMP invariant test である。

定理4.1. 仮説 $H_1 : \Sigma = \Sigma_0$ と対立仮説 $K_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$ に対する検定問題に対して，$T_1 \geq c$ は，漸近的局所的 UMP invariant test である。

次に，(H_2, K_2) に対して，$Y = \sqrt{\frac{n}{2}}(pS/\mathrm{tr}\, S - I)$ を対立仮説の列 $K_n : \Sigma = \sigma^2 I + n^{-\frac{1}{2}}\theta$ の下で考えると，補題3.1によって，漸近的に正規分布となる。すなわち $y' = (y_{11}, y_{22}, \cdots, y_{pp}, \sqrt{2}y_{12}, \cdots, \sqrt{2}y_{p-1,p})$ とすると，仮説の下では，$y \sim N(0, \hat{\Sigma})$，対立仮説の下では，$y \sim N(\theta^*, \hat{\Sigma})$ となる。ただし $(\theta_{ij}^*) = \sigma^{-2}(\theta - p^{-1} I\, \mathrm{tr}\, \theta)/\sqrt{2}$ としたとき，$\theta^{*\prime} = (\theta_{11}^*, \theta_{22}^*, \cdots, \theta_{pp}^*, \sqrt{2}\theta_{12}^*, \cdots, \sqrt{2}\theta_{p-1,p}^*)$ であり $\hat{\Sigma}$ は，次であたえられる。

$$(4.1)\qquad \tilde{\Sigma}=\begin{pmatrix} I_p-\frac{1}{p}G_p & 0 \\ 0 & I_{\frac{p}{2}(p-1)} \end{pmatrix}, \qquad G_p=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

すると y は，$\frac{1}{2}p(p+1)-1$ 次元上に退化した正規分布となる。確率1で，$\sum_{i=1}^{p} y_{ii}=0$ であるから，$y^{*\prime}=(y_{11},\cdots,y_{p-1,p-1},\sqrt{2}y_{12},\cdots,\sqrt{2}y_{p-1,p})$ の平均が0かどうかの仮説検定問題となる。するとこの問題は，

$$(4.2)\qquad \begin{pmatrix} H_{p-1} & 0 \\ 0 & H_{\frac{p}{2}(p-1)} \end{pmatrix}$$

ただし $H_{\frac{p}{2}(p-1)}$ は，直交行列であり，H_{p-1} は，正則であり，かつ $H'_{p-1}(I_{p-1}+G_{p-1})H_{p-1}=I_{p-1}+G_{p-1}$ なるもので不変となる。すると maximal invariant は，

$$(4.3)\qquad z=y^{*\prime}\begin{pmatrix} I_{p-1}+G_{p-1} & 0 \\ 0 & I_{\frac{p}{2}(p-1)} \end{pmatrix}y^{*}$$

である。すると z の分布は，

$$(4.4)\qquad \begin{pmatrix} I_{p-1}+G_{p-1} & 0 \\ 0 & I_{\frac{p}{2}(p-1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{p-1}-\frac{1}{p}G_{p-1} & 0 \\ 0 & I_{\frac{p}{2}(p-1)} \end{pmatrix}^{-1}$$

であることより，非心度 δ^2，自由度 $\frac{p}{2}(p+1)-1$ の非心 χ^2-分布である。ただし

$$(4.5)\quad \delta^2=\frac{1}{2}\theta^{**\prime}\begin{pmatrix} I_{p-1}+G_{p-1} & 0 \\ 0 & I_{\frac{p}{2}(p-1)} \end{pmatrix}\theta^{**}$$

であり，θ^{**}は，θ^{*}に対応するベクトルである。すると(4.3)より，

$$(4.6)\quad Z=\sum_{i=1}^{p-1}y_{ii}^2+\left(\sum_{i=1}^{p-1}y_{ii}\right)^2+2\sum_{i>j}^{p}y_{ij}^2=\sum_{i=1}^{p}y_{ii}^2+2\sum_{i>j}^{p}y_{ij}^2=\mathrm{tr}\,Y^2.$$

ゆえに補題3.2より，$\mathrm{tr}\,Y^2\geq c$ がUMP invariant testである，

定理4.2. (H_2, K_2)に対する検定問題に対して，$T_2\geq c$ は，漸近的局所的UMP invariant test である。

§5. 検定力の数値例

上の検定T_1，T_2と尤度比検定λ_1，λ_2の検定力を，それらの分布の漸近展開をもちいて，数値的に比較をあたえる。なお棄却点は，すべて5%点を表わす。

例1. $p=2,\ n=100$ とし，対立仮説Kを $\Sigma=(1+a)\Sigma_0$ とする。

	式	Δ	第一項	第二項	第三項	検定力
$P_K(T_1 \geq 7.848)$	[3]	0.5	0.8735	0.1051	−0.0116	0.967
		0.4	0.7667	0.1307	−0.0083	0.889
		0.3	0.5587	0.1600	−0.0026	0.716
		−0.3	0.6081	0.1049	0.0024	0.715
		−0.4	0.9553	0.0286	0.0014	0.985
	[2]	0.2	0.3561	0.0831	−0.0194	0.420
		0.1	0.1144	0.0590	−0.0029	0.171
		−0.1	0.1144	−0.0590	−0.0029	0.053
		−0.2	0.3561	−0.0831	−0.0194	0.254
$P_K(-2\log\lambda_1 \geq 7.8717)$	[6]	0.5*	0.8651	0.0714	0.0052	0.942
		0.4	0.7272	0.0912	0.0057	0.824
		0.3	0.4771	0.1198	−0.0007	0.594
		−0.3	0.7181	0.1388	−0.0077	0.849
		−0.4	0.9623	0.0466	−0.0143	0.995
	[8]	0.2	0.3544	−0.0462	0.0097	0.318
		0.1*	0.1134	−0.0033	0.0018	0.112
		−0.1	0.1134	0.0033	0.0018	0.119
		−0.2	0.3544	0.0462	0.0097	0.410

*の項は，Sugiura [8] にあたえられている。上の表より，T_1, λ_1 がいずれよいということは，いえない。

例2. $p=2$ のとき, T_2 と λ_2 は, 同値となる。そこで, $n=200$ とし対立仮説 K を $\Sigma=\mathrm{diag}(\lambda, \lambda(1+\Delta))$ としたときの検定力を計算する。ただし λ は, 未知である。

	式	Δ	才一項	才二項	才三項	検定力
$P_K(T_2 \geq 6.066)$	[2]	0.05	0.0574	−0.0005	0.0014	0.058
		0.1	0.0869	−0.0641	0.0007	0.084
		0.2	0.2207	−0.0377	0.0032	0.186
	[3]	0.8	0.9166	0.0464	−0.0371	0.926
		0.9	0.9519	0.0338	−0.0269	0.959
$P_K(-2\rho\log\lambda_2 \geq 5.9915)$	[5]	0.05	0.0595	−0.0005	−0.0001	0.059
		0.1	0.0894	−0.0041	0.0000	0.085
		0.2	0.2246	−0.0380	0.0060	0.193
	[6]	0.8	0.9129	0.0530	0.0018	0.968
		0.9	0.9472	0.0414	−0.0006	0.988

この例は, T_2 の検定力が, ひくく計算されているように思われる。これは, 尤度比検定の方の5%点は, exact であるが一方 T_2 の方は, あまり収束の速くない漸近展開をもちいているからである。[4] における数値例を見られたい。

例3．$p=3$，$n=200$ のとき，対立仮説Kを $\Sigma=\mathrm{diag}(\lambda, \lambda(1+\Delta_1), \lambda(1+\Delta_2))$ とする。ただし λ は未知とする。

	式	Δ_1, Δ_2	第一項	第二項	第三項	検定力
$P_K(T_2 \geq 11.016)$	[2]	0.1, 0.1	0.0827	−0.0053	−0.0013	0.076
		0.1, 0.05	0.0743	−0.0025	−0.0015	0.070
		0.1, −0.05	0.1095	−0.0014	−0.0026	0.106
		−0.1, −0.1	0.0827	0.0053	−0.0013	0.087
	[3]	−0.3, −0.3	0.4032	0.2139	0.0381	0.655
		−0.35, −0.35	0.6365	0.1679	−0.0354	0.769
		−0.4, −0.4	0.8126	0.1193	−0.0484	0.884
$P_K(-2\rho\log\lambda_2 \geq 11.071)$	[5]	0.1, 0.1	0.0809	−0.0040	0.0002	0.077
		0.1, 0.05	0.0727	−0.0024	0.0000	0.070
		0.1, −0.05	0.1073	−0.0028	−0.0002	0.104
		−0.1, −0.1	0.0809	0.0040	0.0002	0.085
	[6]	−0.3, −0.3	0.3505	0.2472	0.0132	0.611
		−0.35, −0.35	0.5925	0.2067	−0.0051	0.794
		−0.4, −0.4	0.7864	0.1490	−0.0125	0.923

これより，T_2，λ_2 がいずれが良いともいえない。

参考文献

[1] John, S. (1971). Some optimal multivariate tests. Biometrika 58 123-127.

[2] Nagao, H. (1973). 共分散行列に関する検定の仮説の近傍での漸近展開について 解析研講究録 197 113-122.

[3] ________ (1973). 多次元正規分布の共分散行列の検定について (IV) 日本数学会 要旨 65-67.

[4] ________ (1973). On some test criteria for covariance matrix. Ann. Statist. 1 700-709.

[5] ________ (1973). Asymptotic expansions of the distributions of Bartlett's test and sphericity test under the local alternatives. Ann. Inst. Statist. Math. 25 407-422.

[6] Sugiura, N. (1969). Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. Ann. Math. Statist. 40 2051-2063.

[7] ________ (1972). Locally best invariant test for sphericity and the limiting distributions. Ann. Math. Statist. 43 1312-1316.

[8] ________ (1973). Asymptotic non-null distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix under local alternatives. Ann. Statist. 1 718-728.