

直交群およびユニタリ-群上の *invariant measure* に関するある表現について

広島大 理 小西 貞則

§ 1. 序

多変量解析においてある種の固有値の分布を求める場合、直交群 $O(p)$ あるいはユニタリ-群 $U(p)$ 上の *invariant measure* に関する定積分を求めることに帰着される。例えば Wishart 分布 $nW; W_p(n, \Sigma)$ に対して、 W の固有値を $L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_p)$ ($l_1 \geq \dots \geq l_p > 0$)、 Σ^{-1} の固有値を $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ ($0 < a_1 \leq \dots \leq a_p$) とするとき、 W の固有値の分布は定積分

$$(1.1) \quad \int_{O(p)} \exp\left[-\frac{n}{2} \text{tr} ATL T'\right] (T' dT) \quad T \in O(p)$$

(ここに $(T' dT)$ は、 $O(p)$ 上の *invariant measure* とする。)

を求めることに帰着される。さらに2つの互いに独立な、Wishart 分布 $W_i; W_p(n_i, \Sigma_i)$ ($i=1, 2$) からなる $W_1 W_2^{-1}$ の固有値の分布は上記対角行列 L, A を各々 $W_1 W_2^{-1}$, $(\Sigma_1 \Sigma_2^{-1})^{-1}$ の固有値とした場合次の定積分を求めることに帰着される。

$$(1.2) \quad \int_{O(p)} |I_p + ATL T'|^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} (T' dT)$$

また complex Wishart 行列に対する議論は直交行列 T をユニタリ行列 U におきかえて $U(P)$ 上の invariant measure に対して同様に考えることができる。G.A. Anderson [1] は、直交群 $O(P)$ 上の invariant measure に関する積分に対して、漸近展開を与える一つの方法として、固有直交行列 T に対して

$$(1.3) \quad T = \exp S \quad (S_{(P \times P)}; \text{実交代行列})$$

なる変換を考えている。Anderson は、(1.1) の積分に対して A の対角要素がすべて異なる場合に n^{-1} の項まで計算し、 n^{-2} の項の Conjecture を与えている。この変換は A の対角要素が一般の場合にも、また (1.2) の漸近展開を求めるにも有効である。[2], [3], [6]。なお complex case には、(1.3) の変換に対応して次の変換を考えればよい。[6]

$$(1.4) \quad U = \exp(iH) \quad (H: \text{エルミート行列}, i^2 = -1)$$

ここで問題とするのは、(1.3), (1.4) の変換の jacobian であるが、G.A. Anderson は、(1.3) に対して、ある種の parameter 表示を用いて、 S の order にしたがって展開する形でこれを求めている。この方法の基本となるのが、Murnaghan [8] の Group representation の理論であるが、この方法ではひじょうに複雑となり結果に到達するまでにいくつかの段階が必要である。そこでここではこれとま、たく異な、たより簡単で直接的な方法で、(1.1), (1.2) の漸近展開において n^{-1} までの

項を求めるのに必要な(1.3), (1.4)の変換の *Jacobian* の展開式を求めてゆく。

§2. $T = \exp S$ の変換の *Jacobian* について

この節では変換(1.3)の *Jacobian* を求めてゆく。直交群 $O(P)$ 上の *invariant measure* に対する *differential form* は,

$$(2.1) \quad (T' dT) = \prod_{j < k} t_{jk} dt_{jk}$$

によって与えられる。ここに t_{jk}, dt_{jk} は各々 T, dT の j 列, k 列とする。いま(1.3)における実交代行列 S を

$$S = (s_1, s_2, \dots, s_p) \quad s_i; P\text{-次元 vector}$$

とおく。このとき S^2, S^3, S^4 の (j, k) -element は各々

$$(2.2) \quad S^2 = -(s_j' s_k), \quad S^3 = -(s_j' \sum_{g=1}^p s_g e_g' s_k), \quad S^4 = (s_j' \sum_{g=1}^p s_g s_g' s_k)$$

と表わすことができる。ここに $e_g' = (0, \dots, 0, \overset{g}{1}, 0, \dots, 0)$ 。

したがって $T = \exp S = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} S^k$ より, t_{jk} および dt_{jk} の第 k 成分は各々,

$$(2.3) \quad t_{kj} = \delta_{kj} + e_k' s_j - \frac{1}{2!} s_k' s_j - \frac{1}{3!} s_k' \sum_g s_g e_g' s_j + \frac{1}{4!} s_k' \sum_g s_g s_g' s_j + \dots,$$

$$(2.4) \quad dt_{jk} = e_k' ds_j - \frac{1}{2!} (ds_k' s_j + s_k' ds_j) - \frac{1}{3!} (ds_k' \sum_g s_g e_g' s_j + s_k' \sum_g ds_g e_g' s_j + s_k' \sum_g s_g e_g' ds_j) + \frac{1}{4!} (ds_k' \sum_g s_g s_g' s_j + s_k' \sum_g ds_g s_g' s_j + s_k' \sum_g s_g ds_g' s_j + s_k' \sum_g s_g s_g' ds_j) + \dots$$

と書き表わすことができる。

そこで第 k 成分が(2.3), (2.4) で表わせる P -次元 vector t_{jk}, dt_{jk} を

differential form (2.1)へ代入することによって

$$(2.5) \quad \mathcal{J}_1 = \prod_{j < k} t_j' dt_k = \prod_{j < k} \left\{ d\sigma_{jk} - \frac{1}{2}(\sigma_k' d\sigma_j - \sigma_j' d\sigma_k) \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \left(\sum_g \sigma_g' \sigma_k d\sigma_{jg} + \sum_g \sigma_j' \sigma_g d\sigma_{gk} + 2 \sum_{g, h} \sigma_{jk} \sigma_{gh} d\sigma_{gh} \right) + \dots \right\}.$$

をえる。したがってこれからすぐに \mathcal{J}_1 の展開式の第1項は,

$\prod_{j < k} d\sigma_{jk}$ となることがわかる。次に \mathcal{J}_1 の展開式において S に

関する1次の項は(2.5)から

$$-\frac{1}{2}(\sigma_2' d\sigma_1 - \sigma_1' d\sigma_2) d\sigma_{13} \dots d\sigma_{p-1, p} + d\sigma_{12} \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_3' d\sigma_1 - \sigma_1' d\sigma_3) \right\} d\sigma_{14} \dots d\sigma_{p-1, p} + \dots + \\ d\sigma_{12} d\sigma_{13} \dots \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_k' d\sigma_j - \sigma_j' d\sigma_k) \right\} \dots d\sigma_{p-1, p} + \dots, \text{を計算することによ}$$

ってえられる。いまここで S は実交代行列であることと,

$d\sigma_{jk} d\sigma_{jk} = 0$ ($j < k; j, k = 1, \dots, p$) なることを使えば, 上式は0と

なることがわかる。それゆえ S に関する1次の項は0である。

次に \mathcal{J}_1 の展開式において S に関する2次の項を計算しよう。

それは(2.5)からわかるように

$$(2.6) \quad d\sigma_{12} d\sigma_{13} \dots \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_k' d\sigma_j - \sigma_j' d\sigma_k) \right\} \dots \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_m' d\sigma_l - \sigma_l' d\sigma_m) \right\} \dots d\sigma_{p-1, p}$$

ここに $j < k, l < m, j \leq l$ また $j = l$ ならば $k < m$ とする。

$$(2.7) \quad d\sigma_{12} d\sigma_{13} \dots \left\{ -\frac{1}{6} \left(\sum_g \sigma_g' \sigma_k d\sigma_{jg} + \sum_g \sigma_j' \sigma_g d\sigma_{gk} + 2 \sum_{g, h} \sigma_{jk} \sigma_{gh} d\sigma_{gh} \right) \right\} \\ \dots d\sigma_{p-1, p}, \quad 1 \leq j < k \leq p$$

を計算することによってえられる。differential の積に関して

は $d\sigma_{jk} d\sigma_{lm} = -d\sigma_{lm} d\sigma_{jk}$. 特に $d\sigma_{jk} d\sigma_{jk} = 0$ であるか

らいま

$$(2.8) \quad \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_k' d\sigma_j - \sigma_j' d\sigma_k) \right\} \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_m' d\sigma_l - \sigma_l' d\sigma_m) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{g,h} \sigma_{gk} \sigma_{hm} d\sigma_{gj} d\sigma_{hl} - \sigma_{gj} \sigma_{hm} d\sigma_{gk} d\sigma_{hl} - \sigma_{gk} \sigma_{hl} d\sigma_{gj} d\sigma_{hm} + \sigma_{gj} \sigma_{hl} d\sigma_{gk} d\sigma_{hm} \right\}$$

において $f_1(S) d\sigma_{jk} d\sigma_{em}$ の項のみ考えればよいことがわかる。さらに (2.7) 式においては $f_2(S) d\sigma_{jk}$ の項のみ考えればよい。ここに $f_1(S)$, $f_2(S)$ は S の element に関して 2 次の同時多項式である。まず (2.8) において $j=l$ の場合を考える。このとき (2.8) の右辺の第 1 項のみ

$$(2.9) \quad \sigma_{km}^2 d\sigma_{jk} d\sigma_{jm} + \sum_{g \neq m, h \neq k} \sigma_{gk} \sigma_{hm} d\sigma_{gj} d\sigma_{hj}$$

の形に表わすことができる。それは S が実交代行列であることからわかる。同様に $k=l$ のときには (2.8) の第 2 項のみ、また $k=m$ のときには (2.8) の第 4 項のみ各々

$$(2.10) \quad \sigma_{jm}^2 d\sigma_{jk} d\sigma_{km} - \sum_{g \neq m, h \neq j} \sigma_{gj} \sigma_{hm} d\sigma_{gk} d\sigma_{hk}$$

$$(2.11) \quad \sigma_{jl}^2 d\sigma_{jk} d\sigma_{lk} + \sum_{g \neq l, h \neq j} \sigma_{gj} \sigma_{hl} d\sigma_{gk} d\sigma_{hk}$$

と表わすことができる。したがって (2.9) (2.10) (2.11) より

$$(2.12) \quad \frac{(P-2)}{4} \sum_{j < k} \sigma_{jk}^2 \left(\prod_{j < k} d\sigma_{jk} \right)$$

をえる。さらに $\text{tr} S^2 = -2 \sum_{j < k} \sigma_{jk}^2$ であるから (2.12) は、

$$(2.13) \quad -\frac{P-2}{8} \text{tr} S^2 \prod_{j < k} d\sigma_{jk}$$

とかくことができる。最後に (2.7) における $f_2(S) d\sigma_{jk}$ の項を計算しよう。(2.7) をかきなおすと

$$(2.14) \quad (\sigma_k' \sigma_k + \sigma_j' \sigma_j - 2\sigma_{jk}^2) d\sigma_{jk} + \sum_{g \neq k} \sigma_g' \sigma_k d\sigma_{gg} + \sum_{g \neq j} \sigma_j' \sigma_g d\sigma_{gk} + 2 \sum_{g \neq j, h \neq k} \sigma_{jh} \sigma_{gk} d\sigma_{hg}$$

また $\text{tr} S^2 = -\sum_j \rho_j' \rho_j$ であるから (2.14) から、 J_1 を展開すると次の式をえる。

$$(2.15) \quad -\frac{1}{6} \left\{ \sum_{j < k} (\rho_k' \rho_k + \rho_j' \rho_j) - 2 \sum_{j < k} \rho_j \rho_k^2 \right\} \prod_{j < k} d\rho_{jk} = \frac{1}{6} (P-2) \text{tr} S^2 \prod_{j < k} d\rho_{jk}$$

したがって (2.13), (2.15) より J_1 の展開式における S に関する 2 次の項は、

$$(2.16) \quad \frac{P-2}{24} \text{tr} S^2 \prod_{j < k} d\rho_{jk}$$

となることがわかる。同様な方法によって J_1 の展開式において S に関する 3 次の項を計算すると 0 となることがわかる。したがって次の定理をえる。

定理 1.

任意の $P \times P$ 固有直交行列 T は

$$T = \exp S \quad S: P \times P \text{ 交代行列}$$

と表わすことができる。このときこの変換によって固有直交群上の invariant measure ($T'dT$) は

$$(2.17) \quad (T'dT) = \left(1 + \frac{P-2}{24} \text{tr} S^2 + \dots \right) \prod_{j < k} d\rho_{jk}$$

と表わすことができる。

§ 3. $U = \exp(iH)$ の変換の Jacobian について

この第 3 節では § 2 と同様な方法を用いて変換 (1.4) の Jacobian について考えてゆく。いま $U^* dU = \Omega = (\omega_{jk})$ とおく。ここに $U^* = \bar{U}'$ とする。このときユニタリ-群 $U(P)$ 上の

invariant measure に対する differential form は

$$(3.1) \quad i^p \prod_j w_{jj} \left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{1}{2}p(p-1)} \prod_{j < k} w_{jk} \bar{w}_{jk}$$

と表わすことができる。ここで $U = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ (u_j : p -次元

vector) とすると $w_{jk} = \bar{u}_j' du_k = u_{jR}' du_{kR} + u_{jI}' du_{kI} + i(u_{jR}' du_{kI} -$

$- u_{jI}' du_{kR})$ とかける。ここに $u_j = u_{jR} + i u_{jI}$, $du_k = du_{kR} +$

$i du_{kI}$ とする。指数関数の定義より $U = \exp(iH) = I$

$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (iH)^k$ であるから §2 と同様にエルミート行列

$H = (h_{jk}) = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ とおくと, u_j, du_k の第 j 成分は

$$(3.2) \quad u_{jI} = \delta_{jj} + i h_{jj} - \frac{1}{2!} \bar{h}_j' h_j - \frac{1}{3!} i \sum_g \bar{h}_g' h_g e_g' h_j + \dots,$$

$$(3.3) \quad du_{jR} = i dh_{jj} - \frac{1}{2!} (d\bar{h}_j' h_j + \bar{h}_j' dh_j) -$$

$$-\frac{1}{3!} i \left(\sum_g d\bar{h}_g' h_g e_g' h_j + \sum_g \bar{h}_g' dh_g e_g' h_j + \sum_g \bar{h}_g' h_g e_g' dh_j \right) + \dots$$

したがって Ω の (j, k) -element は

$$(3.4) \quad w_{jk} = \bar{u}_j' du_k = -dh_{jkI} + i dh_{jkR} - \frac{1}{2} (d\bar{h}_j' h_k - \bar{h}_j' dh_k) -$$

$$-\frac{i}{6} \left(\sum_g \bar{h}_g' h_k dh_{jg} + \sum_g \bar{h}_g' h_g dh_{jk} - 2 \sum_{g,l} \bar{h}_g' h_l dh_{jg} \right) + \dots$$

となる。ここで $w_{jk} = w_{jRk} + i w_{jIk}$ とおくと $w_{jk} \bar{w}_{jk} = 2i$

$\times w_{jIk} w_{jRk}$, $w_{jj} = i w_{jIj}$ であるから (3.4) の w_{jk} を,

real part と imaginary part に分割する。すなわち

$$(3.5) \quad w_{jk} = -dh_{jkI} - \frac{1}{2} f_{jRk}(H) + \dots + i \{ dh_{jRk} - \frac{1}{2} f_{jIk}(H) + \dots \}$$

$$\text{ここに } f_{jRk}(H) = h_{kR}' dh_{jR} + h_{kI}' dh_{jI} - h_{jR}' dh_{kR} - h_{jI}' dh_{kI}$$

$$f_{jIk}(H) = h_{kI}' dh_{jR} - h_{kR}' dh_{jI} - h_{jR}' dh_{kI} + h_{jI}' dh_{kR} \quad (j < k)$$

$$(3.6) \quad w_{jj} = i (dh_{jR} - f_{jR}(H) + \dots)$$

$$\text{ここに } f_{j\bar{j}R}(H) = h_{jI}' dh_{jR} - h_{jR}' dh_{jI}$$

この2式を(3.1)に代入して

$$(3.7) \quad \mathcal{J}_2 = \prod_j \{ dh_{j\bar{j}R} - f_{j\bar{j}R}(H) + \dots \} \prod_{j < k} \{ dh_{j\bar{k}R} - \frac{1}{2} f_{j\bar{k}R}(H) + \dots \} \\ \times \{ -dh_{j\bar{k}I} - \frac{1}{2} f_{j\bar{k}I}(H) + \dots \}$$

をえる。これからすぐに \mathcal{J}_2 の展開式における第1項は、

$$\prod_j dh_{j\bar{j}R} \prod_{j < k} dh_{j\bar{k}R} dh_{j\bar{k}I}$$

となることがわかる。次に \mathcal{J}_2 の展開式において H に関する1次の項について考える。これは $f_{j\bar{k}R}(H)$

において $dh_{j\bar{k}R}$ の、 $f_{j\bar{k}I}(H)$ において $dh_{j\bar{k}I}$ の、さらに $f_{j\bar{j}R}(H)$ において $dh_{j\bar{j}R}$ の係数についてのみ考えればよい。しかし H は

エルミート行列であることからこれらの係数はすべて0となり、したがって \mathcal{J}_2 の展開式における H に関する1次の項は

0である。この場合 §2 と同様に $j < k$ の時 (3.4) 式右辺の

第4項において、imaginary part から $dh_{j\bar{k}R}$ の係数をさらに

real part から $-dh_{j\bar{k}I}$ の係数のみを考えればよいことがわか

る。したがって (3.4) 式右辺第4項を $dh_{j\bar{k}R}$ 、 $dh_{j\bar{k}I}$ として残り

の項に分割してやると

の項に分割してやると

$$(3.8) \quad -\frac{1}{6} \{ (\bar{h}_j' h_j + \bar{h}_k' h_k + 2h_{j\bar{k}R}^2 - 2h_{j\bar{k}I}^2 - 2h_{j\bar{j}R} h_{k\bar{k}R}) (-dh_{j\bar{k}I}) \\ + 4h_{j\bar{k}R} h_{j\bar{k}I} dh_{j\bar{k}R} \} + i \{ (\bar{h}_j' h_j + \bar{h}_k' h_k - 2h_{j\bar{k}R}^2 + 2h_{j\bar{k}I}^2 \\ - 2h_{j\bar{j}R} h_{k\bar{k}R}) dh_{j\bar{k}R} - 4h_{j\bar{k}R} h_{j\bar{k}I} dh_{j\bar{k}I} \} + \text{order terms}$$

をえる。それゆえ \mathcal{J}_2 を展開すると上式より

$$(3.9) \quad -\frac{1}{3} \left\{ \sum_{j < k} (\bar{h}_j' h_j + \bar{h}_k' h_k) - 2 \sum_{j < k} h_{j\bar{j}R} h_{k\bar{k}R} \right\} \prod_j dh_{j\bar{j}R} \prod_{j < k} dh_{j\bar{k}R} dh_{j\bar{k}I}$$

をえる。 $j=k$ の場合 (3.4) 式右辺第 4 項において $j=k$ とすると

$$(3.10) \quad -\frac{2}{6} \left(\sum_j \bar{h}_j' h_j d h_{jj} + \sum_j \bar{h}_j' h_j d h_{jj} - 2 \sum_{j \neq k} h_{j\ell} h_{j\ell} d h_{j\ell} \right)$$

となるから上式の imaginary part における $d h_{j\ell R}$ の係数のみ考えればよい。したがって先と同様にして

$$(3.11) \quad -\frac{1}{3} \sum_j (\bar{h}_j' h_j - h_{j\ell R}^2) \prod_j d h_{j\ell R} \prod_{j < k} d h_{j\ell R} d h_{j\ell I}$$

をえる。さらに (3.5), (3.6) によって示される w_{jk} ($j < k$),

w_{jj} の展開式における H に関して order 1 の任意の 2 項の積を求めなければならない。これらをも 2 と同様な方法で計算してゆくと次のような結果をえる。

$$(3.12) \quad \left\{ \frac{1}{4} (P-1) \sum_j h_{j\ell R}^2 - \frac{1}{2} \sum_{j < k} h_{j\ell R} h_{k\ell R} + \frac{P}{2} \left(\sum_{j < k} h_{j\ell R}^2 + \sum_{j < k} h_{j\ell I}^2 \right) \right\} \\ \times \prod_j d h_{j\ell R} \prod_{j < k} d h_{j\ell R} d h_{j\ell I}$$

したがって (3.9), (3.11), (3.12) より \mathcal{J}_2 の展開式における H に関する 2 次の項は,

$$(3.13) \quad \left[-\frac{1}{3} \left\{ \sum_{j < k} (\bar{h}_j' h_j + \bar{h}_k' h_k) + \sum_j \bar{h}_j' h_j \right\} + \frac{P}{2} \sum_{j < k} (h_{j\ell R}^2 + h_{j\ell I}^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \sum_{j < k} h_{j\ell R} h_{k\ell R} + \frac{3P+1}{12} \sum_j h_{j\ell R}^2 \right] \prod_j d h_{j\ell R} \prod_{j < k} d h_{j\ell R} d h_{j\ell I}$$

であることがわかる。さらにこれを $(tH)^2 = 2 \sum_{j < k} h_{j\ell R} h_{k\ell R} + \sum_j h_{j\ell R}^2$, $tH^2 = \sum_j \bar{h}_j' h_j = 2 \sum_{j < k} (h_{j\ell R}^2 + h_{j\ell I}^2) + \sum_j h_{j\ell R}^2$ を用いて書きなおすと

$$(3.14) \quad -\frac{P}{12} tH^2 + \frac{1}{12} (tH)^2$$

をえる。したがってこれから次の定理をえる。

定理 2. 任意の $p \times p$ ユニタリ-行列 U は

$$U = \exp(iH) \quad H: p \times p \text{ エルミート行列}$$

と表わすことができる。このときこの変換によってユニタリ

-群上の *invariant measure* ($U^* dU$) は

$$(3.15) \quad (U^* dU) = \left\{ 1 - \frac{p}{12} \text{tr} H^2 + \frac{1}{12} (\text{tr} H)^2 + \dots \right\} \prod_{j=1}^p d\theta_j \prod_{j < k} d\theta_{jk} d\theta_{kj}$$

と表わすことができる。

References

- [1] Anderson, G.A.(1965). An asymptotic expansion for the distribution of the latent roots of the estimated covariance matrix. *Ann. Math. Statist.* 36, 1153-1173.
- [2] Chang, T.C.(1970). On an asymptotic representation of the distribution of the characteristic roots of $S_1 S_2^{-1}$. *Ann. Math. Statist.* 41, 440-445.
- [3] Chattopadhyay, A.K. and Pillai, K.C.S.(1970). Asymptotic expansions for the distributions of characteristic roots when the parameter matrix has several multiple roots. *Multivariate Analysis*, 3. (P.R.Krishnaiah, ed.). Academic Press, New York.
- [4] James, A.T.(1954). Normal multivariate analysis and the orthogonal group. *Ann. Math. Statist.* 25, 40-75.
- [5] James, A.T.(1969). Tests of equality of latent roots of the covariance matrix. *Multivariate Analysis*, 2. (P.R.Krishnaiah, ed.). Academic Press, New York.

- [6] Li, H.C., Pillai, K.C.S. and Chang, T.C. (1970). Asymptotic expansions of the distributions of the roots of two matrices from classical and complex Gaussian populations. *Ann. Math. Statist.* 41, 1541-1556.
- [7] Littlewood, D.E.(1940). *The Theory of Group Characters*, (2nd ed.). Oxford, 1958.
- [8] Murnaghan, F.D. (1938). *The Theory of Group Representations*. The Johns Hopkins Press, Baltimore.