数理解析研究所講究録
232巻 1975年 97-107

Nonarchimedean function algebra の話題について

東京電機大 鶴見和之
静岡大 教育 金井省二

序

compact Hausdorff空间 X 上の複素数値連続関数の algebra C(X)においては，C(X) より真に小なる closed subalgebra（定数を含み，X の点を分離する）が存在するが，nonarchimedean（n.a. と略して今後記す）valued field K に対して，K に値を持つ連続関数の algebra C(X) においては，Kaplansky の定理により真に小なる closed subalgebra は存在しない，また通常の正則関数の最大値の原理，Gefand-Mazur の定理等も成り立たない故，n.a. の場合には通常の function algebra と異る観点から，n.a. function algebra を考える必要がある様に思われます。 本講においてはそれらの点も考慮し，topolo-gical algebra の中で function algebra と関連した事柄を述べることにします。

K : n.a. complete nontrivially valued field.

"algebra": K上のalgebraで, commutativeで単位元を持つ.

X ; 0-dim. Hausdorff space

C(X) : Kに値をもつX上の連続関数のalgebra.

§1. Topological algebra

定義 topological algebra $\mathfrak{A}$ が n.a. locally multiplicatively K-convex (n.a.l.m.c) である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\exists$ base B of nbds U of 0 s.t. $\forall U \in \mathcal{B}$ に対して,

① U は K-convex, ② $UU \subset U$.

定義 $\mathfrak{A}$ 上の semi-norm p が nonarchimedean (n.a.) である

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in \mathfrak{A}$ に対して, $p(x+y) \leq \max(p(x), p(y))$

p が multiplicative (mult.) である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $p(xy) \leq p(x)p(y)$.

命題 1. topological algebra $\mathfrak{A}$ が n.a.l.m.c $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ の top. が n.a. mult. semi-norm の族 $\mathcal{P}$ により生成される.

証明. $\mathcal{P}$ を $\mathfrak{A}$ の top. を生成する族とする。 集合 $U :=$ $\{x \mid p_i(x) \leq \varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots; n.\ p_i \in \mathcal{P},\ 0 < \varepsilon \leq 1\}$ は n.a.l.m.c. の条件をみたす base at 0 である。

逆に $\mathcal{B}$ を条件をみたす base とする。 $\forall U \in \mathcal{B}$ に対して

$p_U(x) := \inf\{|\mu| \mid x \in \mu U, \mu \in K\}$ とすると，$\mathcal{P} := \{p_U\}_{U \in \mathcal{B}}$ は求める族である。

命題2. K : discrete valued field，$\mathfrak{A}$: n.a.l.m.c. algebra
$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ の top. を生成する n.a. mult. semi-norm の族 $\exists \mathcal{P}'$ s.t. $p'(\mathfrak{A}) \subset |K|$ for $\forall p' \in \mathcal{P}'$.

証明　$\mathcal{P}$ を $\mathfrak{A}$ の top. を生成する n.a. mult. semi-norm の族とする。　$\forall p \in \mathcal{P}$ に対して $p'(x) := \inf\{|\mu| \mid |\mu| \geq p(x)\}$ とおくと，p' は n.a. mult. semi-norm である。この p' の全体を $\mathcal{P}'$ とする。また，$\mu \in K$ を $0 < |\mu| < 1$ とし，K の値群を生成するものとする。$p(x) \leq p'(x) \leq |\mu^{-1}| p(x)$ であるから，$\mathcal{P}'$ は $\mathfrak{A}$ の top. を生成する。

定義. n.a.l.m.c. algebra $\mathfrak{A}$ が discrete $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{A}$ の top. を生成する n.a. mult. semi-norm の族 $\exists \mathcal{P}$ s.t. $p \in \mathcal{P}$ は discrete.

命題3. Hausdorff n.a.l.m.c. algebra $\mathfrak{A}$ が discrete $\Longleftrightarrow$ K : discrete

証明.　略.

$\mathbb{C}$ 上の topological algebra $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}$ から $\mathbb{C}$ への nontrivial homomorphism と $\mathfrak{A}$ の maximal ideal とは 1 対 1 に対応するが，

n.a. の場合にはこの事はもはや成り立たない。 ここでは
この事が成り立つ様ないくつかの事柄について考察することにします。

定義 n.a.l.m.c. algebra $\mathfrak{A}$ が Gelfand algebra である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$^\forall$closed maximal ideal $M \subset \mathfrak{A}$ に対して, $\mathfrak{A}/M$ が K に位相的に同型。

$\mathfrak{A}$ 上の semi-norm p に対して, $N_p := \{x \in \mathfrak{A} \mid p(x) = 0\}$ とおく。
$\mathfrak{A}/N_p$ は $\|x + N_p\| := p(x)$ により normed algebra になる。 $\mathfrak{A}/N_p$ の
completion $\mathfrak{A}_p$ を factor algebra という。

命題4. $\mathfrak{A}$: Gelfand algebra , $\mathfrak{A}/N_p$: complete
$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}/N_p$: Gelfand algebra

証明 $\pi_p : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/N_p$ ($\pi_p(x) := x + N_p$) を連続な homomorphism
とする。 M を maximal ideal in $\mathfrak{A}/N_p$ とすると, M は closed
maximal ideal だから, $\pi_p^{-1}(M)$ は N_p を含む closed maximal
ideal in $\mathfrak{A}$ である。 $^\forall x \in \mathfrak{A}$ に対して, $\exists \mu \in K$ s.t. $x - \mu e \in \pi_p^{-1}(M)$.
故に $\pi_p(x) - \mu \pi_p(e) \in M$. 故に, $(\mathfrak{A}/N_p)/M$ は K 上に代数的に同型.
M は closed だから, $(\mathfrak{A}/N_p)/M$ は 1次元 Hausdorff vector space である。
故に, K に位相的に同型である。 q.e.d.

また或る意味でこの逆が成り立つ。

命題5. $\mathcal{P}$: n.a.l.m.c. algebra $\mathfrak{A}$ の top. を生成する semi-norm の飽和な族, ${}^{\forall}p \in \mathcal{P}$ に対して, $\mathfrak{A}_p$ が Gelfand algebra
⇒ $\mathfrak{A}$: Gelfand algebra

証明. M を $\mathfrak{A}$ の closed maximal ideal とする。

$\exists p \in \mathcal{P}$ s.t. $M \supset N_p$, $\inf\{p(e-x) \mid x \in M\} > 0$.

従って, $\pi_p(M)$ は $\mathfrak{A}/N_p$ の proper ideal で $\pi_p(e)$ は $\pi_p(M)$ の集積点とはなり得ない。従って $\overline{\pi_p(M)}$ は $\mathfrak{A}_p$ の proper ideal である。故にこれは或る closed maximal ideal $N \subset \mathfrak{A}_p$ に含まれる。$\mathfrak{A}_p$ は Gelfand algebra であるから N は連続な nontrivial homomorphism $f_p : \mathfrak{A}_p \to K$ の kernel である。故に $f := f_p \circ \pi_p$ は $\mathfrak{A}$ から K への連続な nontrivial homomorphism である。そして明らかに $M = \ker f$ である。従って $\mathfrak{A}/M$ は K に位相的に同型である。　　　q.e.d.

例1. K を local field とし, C(X) に compact open topology を入れる。compact set $S \subset X$ に対して $p_S(x) := \sup_{t \in S} |x(t)|$ とおくと, $C(X)/p_S^{-1}(0) \cong C(S)$ で C(S) から K への連続な nontrivial homomorphism は $t \in S$ の evaluation map である。

例2. K を n.a. valued field, x を transcendental over K とする。K の valuation を多項式環 K[x] の商体 K(x) に次の様に拡張する, i.e. $|f/g| := |f|/|g|$, ただし $|f| := |f(x)| =$

$|a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m| := \max_i |a_i|$.　そうすると
$sp(x)=\phi$ だから $K(x)$ は Gelfand algebra でない。

§2. Function algebra.

定理1 (Kaplansky)　X: 0-dim compact Hausdorff space
$C(X)$ の norm は $\|f\| := \sup_{t\in X}|f(t)|$，$\mathfrak{A}$ を $C(X)$ の subalgebra で
X の点を分離し，定数を含む。
$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は dense in $C(X)$ である。

この定理の証明をする前に次の補題の証明をやる。

補題　$\alpha\in K$，$\alpha\neq 0$ とする。A を K の compact subset とする。
そうすると次の様な多項式 $f(x)$ がとれる。i.e. f の定数項は
0，$f(\alpha)=1$，$f(A)\subset V$，ここで $V:=\{\alpha\in K \mid |\alpha|\le 1\}$.

証明　$A' := A\cap\{\beta\in K \mid |\beta|>|\alpha|\}$ とおくと，A' は閉集合であるから，A' は compact in K.　$c\in A'$ とし，$U_c := c+S_{\varepsilon_c}(0)$，
$\varepsilon_c|c^{-1}|<1$ とおく。A' は compact だから，$\exists c_1,\dots,c_m\in A'$ s.t. $A'\subset\bigcup_{i=1}^{m} U_{c_i}$.
$\varepsilon_c<|c_i|$ だから $1-c_i^{-1}U_{c_i}\subset P$，ここで $P:=\{\gamma\in K \mid |\gamma|<1\}$.
今関数 $\varphi(\beta) := \log_r|\beta|$，$0<r<1$ をとると，$\varphi(\beta)$ は set $1-c_i^{-1}U_{c_i}$ 上で 0 にならない。また $1-c_i^{-1}U_{c_i} = c_i^{-1}S_{\varepsilon_{c_i}}(0) = S_{\varepsilon_{c_i}|c_i^{-1}|}(0)$ だから $\gamma\in S_{\varepsilon_{c_i}|c_i^{-1}|}(0)$ に対して，$|\gamma| = r^{\varphi(\gamma)} < \varepsilon_{c_i}|c_i^{-1}|<1$.
故に $\varphi(\gamma) > \log_r(\varepsilon_{c_i}|c_i^{-1}|)>0$.　$r_i := \log_r(\varepsilon_{c_i}|c_i^{-1}|)$ をとる。

$|c_i| \le |c_{i+1}|$, $i=1,\cdots,m-1$ としてよい。 各r_iは正だから，次の様な十分大なる整数$n_1,\cdots,n_i$を選ぶ。 i.e.

$$\varphi(\alpha^{-1}c_i) + \sum_{j=1}^{i-1} n_i \varphi(c_j^{-1}c_i) + n_i r_i \geq 0 .$$

$f(x) := 1-(1-\alpha^{-1}x)(1-c_1^{-1}x)^{n_1}\cdots(1-c_m^{-1}x)^{n_m}$ とおくと，この$f(x)$が求めるものであることを示す。 明らかにfの定数項は0で $f(\alpha)=1$. $\forall\beta\in A$ に対して $|f(\beta)| \le \max\{1, |1-\alpha^{-1}\beta|\prod_{i=1}^{m}|1-c_i^{-1}\beta|^{n_i}\}$ であるから $\rho := |1-\alpha^{-1}\beta|\prod_{i=1}^{m}|1-c_i^{-1}\beta|^{n_i} \le 1$ を示せばよい。

明らかに $|\beta| \le |\alpha|$ ならば $\rho \le 1$ である。故に $\beta\in A'$ を考える。

そうすると，或るt, $1\le t\le m$ に対して，$\beta\in U_{c_t}$ である。

故に $\beta\in c_t(1+P)$。 故に $\exists\gamma\in P$ s.t. $\beta=c_t+c_t\gamma$ 。従って

$|\beta| \le \max\{|c_t|, |c_t\gamma|\} = |c_t|$。 また，

$$\rho \le \max\{1, |\alpha^{-1}\beta|\}\prod_{i\ne t}\max\{1, |c_i^{-1}\beta|^{n_i}\}|1-c_t^{-1}\beta|^{n_t}$$

従って $\rho \le \max\{1, |\alpha^{-1}c_t|\}\prod_{i\ne t}\max\{1, |c_i^{-1}c_t|^{n_i}\}|1-c_t^{-1}\beta|^{n_t}$.

また，$t<i$ ならば $|c_t|\le|c_i|$, $t>i$ ならば $|c_t|\ge|c_i|$ だから

$$\prod_{i\ne t}\max\{1, |c_t c_i^{-1}|^{n_i}\} = \prod_{i=1}^{t-1}|c_t c_i^{-1}|^{n_i}.$$ $c_t\in A'$ だから $|c_t|>|\alpha|$.

従って，$\max\{1, |c_t\alpha^{-1}|\} = |c_t\alpha^{-1}|$. よって

$\rho \le |c_t\alpha^{-1}|\prod_{i=1}^{t-1}|c_t c_i^{-1}|^{n_i}|1-c_t^{-1}\beta|^{n_t}$. $\beta\in U_{c_t}$ だから

$1-c_t^{-1}\beta \in 1-c_t^{-1}U_{c_t}$. 故に $|1-c_t^{-1}\beta| \le r^{r_t}$. かくして

$$(*)\quad \rho \le |c_t\alpha^{-1}|\prod_{i=1}^{t-1}|c_t c_i^{-1}|^{n_i} r^{n_t r_t}.$$

ところがn_tは次の様に選んだ，i.e.

$$\nu := \varphi(\alpha^{-1}c_t) + \sum_{i=1}^{t-1} n_i \varphi(c_i^{-1}c_t) + n_t r_t \ge 0 .$$

従って ν は(*)の右辺の対数(底 r)であるから，$s \le r^{\nu} \le 1$.

q.e.d.

定理1の証明

(i) $\forall s, t \in X$ に対して，$\exists f \in \mathfrak{A}$ s.t. $f(s)=1$, $f(t)=0$.
$f(X)$ は compact set だから，補題により，次の様な多項式 P がとれる．即ち P の定数項は 0 で，$P(f(X)) \subset V$, $P(f(s))=1$.　そして $P(f(t))=P(0)=0$.　従って $Pf \in \mathfrak{A}$ で $\|Pf\| \le 1$.

(ii) E を X の closed subset とし，$s \in X \setminus E$ とする。$\forall \varepsilon > 0$ に対して，次の様な $g \in \mathfrak{A}$ が存在することを示す。即ち $\|g\| \le 1$, $g(s)=1$, $|g(t)| < \varepsilon$ for $\forall t \in E$.　(i) により $\forall t \in E$ に対して，$\exists g_t \in \mathfrak{A}$ s.t. $g_t(s)=1$, $g_t(t)=0$, $g_t(X) \subset V$.　g_t は連続だから，$\exists$ open $U_t \subset X$ s.t. $|g_t(w)| < \varepsilon$ for $\forall w \in U_t$.　$E \subset \bigcup_{t \in E} U_t$ で E は compact であるから $\exists U_{t_1}, \cdots, U_{t_m}$ s.t. $E \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{t_i}$.　従って関数 $g := \prod_{i=1}^{m} g_{t_i}$ は求める関数である。

(iii). X の任意の open compact subset の特性関数は $\mathfrak{A}$ に含まれていることを示す。　E を X の open compact subset とし，$s \in CE$ とする。　(ii) により，$s \in CE$ に対して，$\exists g_s \in \mathfrak{A}$ s.t. $\|g_s\| \le 1$, $g_s(s)=1$, $|g_s(t)| < \varepsilon$ for $\forall t \in E$.　$h_s := 1 - g_s \in \mathfrak{A}$ とおくと，$h_s(s)=0$, $|1-h_s(t)| < \varepsilon$ for $\forall t \in E$.　h_s の連続性により，$\exists$ open $U_s \subset X$ s.t. $s \in U_s$, $|h_s(t)| < \varepsilon$ for $\forall t \in U_s$.

$CE \subset \bigcup_{s \in CE} U_s$ で CE は compact であるから, $\exists U_{s_1}, \cdots, U_{s_m}$ s.t. $CE \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{s_i}$. $h := \prod_{i=1}^{m} h_{s_i}$ とおくと, $t \in CE$ なら $|h(t)| < \varepsilon$, $t \in E$ なら $|1 - h(t)| < \varepsilon$. かくして E の特性関数 χ_E に対して, $\|\chi_E - h\| \leq \varepsilon$, $h \in \mathfrak{A}$ で, ε は任意であるから, $\chi_E \in \overline{\mathfrak{A}}$.

(iv) $f \in C(X)$ とする. $f(X)$ は compact である. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $f(X) \subset \bigcup_{t \in X} S_\varepsilon(f(t))$ であるから $\exists t_1, \cdots, t_m$ s.t.

$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} S_\varepsilon(f(t_i))$. $S_i := S_\varepsilon(f(t_i))$, $C_i := S_i \setminus \bigcup_{j<i} S_j$ とおくと, $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, で C_i は clopen で, pairwise disjoint である, 従って $E_i := f^{-1}(C_i)$ は X の pairwise disjoint clopen covering をなす。 $t \in E_i$ に対して, $|f(t) - f(t_i)| < \varepsilon$ であるから, $\|f - \sum_{i=1}^{m} f(t_i)\chi_{E_i}\| < \varepsilon$. (iii) により $\sum_{i=1}^{m} f(t_i)\chi_{E_i} \in \overline{\mathfrak{A}}$ であるから, $f \in \overline{\mathfrak{A}}$. 従って $\overline{\mathfrak{A}} = C(X)$. q.e.d.

次に Kaplansky の定理を利用して n.a. Baire 関数及び n.a. 微分方程式で重要な働きをする1つの定理を述べることにします。 $\mathfrak{L}_0 := C(X)$, $\alpha \geq 1$ に対して $\mathfrak{L}_\alpha$ は $\mathfrak{L}_{\alpha-1}$ の関数の点別極限関数の集合とする。(i.e. α 級の Baire 関数)

定理 2. $\widetilde{\mathfrak{L}}_1 := \{f \in \mathfrak{L}_1 \mid \overline{f(X)} : \text{compact}\}$ とする。 $\widetilde{\mathfrak{L}}_1 \cong C(Y)$ なる compact 0-dim. Hausdorff space Y が存在する。

証明. $\phi : \widehat{\mathcal{L}}_1 \to K$ を nontrivial homomorphism とすると,
$\phi(f) \in \overline{f(X)}$ である。 何故なら, $\phi(f) \in \overline{f(X)}$ とすると $f \in \ker\phi$ に対して, $\overline{f(X)} \ni 0$ を示せばよい。 $\overline{f(X)} \not\ni 0$ とすると,
$\exists f_n \in C(X)$ s.t. $f_n \to f$, $f_n \neq 0$ on X。 従って $1/f_n \in C(X)$ で $1/f_n \to 1/f$. しかも $\overline{1/f(X)}$ は compact set である。故に $1/f \in \widehat{\mathcal{L}}_1$. 従って $\phi(f \cdot f^{-1}) = 1$ より $\phi(f) \neq 0$. これは矛盾。
従って $\phi(f) \in \overline{f(X)}$ である。
Y を nontrivial homomorphism $\phi : \widehat{\mathcal{L}}_1 \to K$ の全体とする。
canonical map $\tau : Y \to \prod_{f \in \widehat{\mathcal{L}}_1} \overline{f(X)}$, $(\tau(\phi))_f := \phi(f)$ は injective で closed image をもつ。 Y と $\tau(Y)$ を同一視し, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ を $C(Y)$ の subalgebra B とみなすと B は closed で Y の点を分離し, 定数を含む。 故に Kaplansky の定理により $B \cong C(Y)$, i.e. $\widehat{\mathcal{L}}_1 \cong C(Y)$. q. e. d.

定理2 と $C(Y)$ が countable base をもつという事実を用いて次の事が成り立つ。

定理3. X を孤立点をもたない K の部分集合とするとき $f \in \widehat{\mathcal{L}}_1 \iff \exists F : X \to K$ s.t. $F' = f$.

文　　献

[1] G. Bachman, E. Beckenstein,and L. Narici : Functional algebras over valued fields, Pacific J. M. 44(1973) 45 - 58.

[2] W. G. Bade : Complementation problems for Baire classes, Pacific J. M. 45(1973). 1 - 11.

[3] E. Beckenstein, G. Bachman, and L. Narici : Topological algebras of continuous functions over valued fields, Studia Math. XLVIII (1973) 119 - 127.

[4] L. Gruson and M. van der Put : Banach Spaces.

[5] C. Kuratowski : Topologie I, Warszawa (1946).

[6] E. A. Michael : Locally multiplicatively convex topological algebras, Memirs A. M. S. (1952).

[7] A. F. Monna : Analyse non-archimedienne, Springer Verlag (1970).

[8] L. Narici, E. Beckenstein and G. Bachman : Functional Analysis and Valuation Theory, Marcel Dekker (1971).

[9] K. Tsurumi : Non-archimedean Banach algebras, 数理解析研究所講究録 96 (1970).

[10] K. Tsurumi : On Baire functions in nonarchimedean valued fields, Indeg. Math. 36 (1974).