

## Function algebra と flow

早大 教育 和田淳藏

Function algebra と、数学の他の分野との関連についてはいろいろ研究されているが、ここではエルゴード理論との関係、とくに flow との関連について述べる。これについての研究は Forelli [4] によって始められ、それについて Muhly [7, 8, 9] が一連の論文を發表している。これらの結果をもとにしてこの話題を考えていく。

## § 1. Flow.

$S$  を局所コンパクト Hausdorff 空間とし、 $\mathbb{R}$  を実数空間とする。

$(\mathbb{R}, S)$  が flow であるとは、 $\tau: \mathbb{R} \times S \rightarrow S$  は連続写像であつて

$$\tau(0, x) = x \quad (x \in S)$$

$$\tau(s+t, x) = \tau(t, \tau(s, x)) \quad (s, t \in \mathbb{R}, x \in S)$$

となる  $\tau$  が存在することである。

Forelli [4] では  $S$  を局所コンパクト空間として考えているが、ここでは  $X = S$  をコンパクト Hausdorff 空間とする。

$C(X)$  の  $\varphi$  に対して

$$\varphi(x+t) = \varphi[T(t, x)]$$

とおくとき、 $\varphi \in C(X)$  が analytic であるとは、 $\forall x$  で  $\varphi(x+t) \in H^\infty(\mathbb{R})$  であることをいう。ここで  $H^\infty(\mathbb{R})$  は  $\mathbb{C}$  の上半分  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  で有界な analytic function の  $\mathbb{R}$  での boundary function 全体を表わす。

$H^\infty(\mathbb{R})$  はつぎのようにも書くことができる ([2])。

$H^\infty(\mathbb{R}) \ni f$  となる必要かつ十分条件は  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \left( \frac{1}{t-z} \right) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} f(t) dt \quad (z = x + iy)$$

は  $\{z : \text{Im}(z) > 0\}$  で analytic となることである。

$C(X)$  の中の analytic function 全体を  $\mathcal{A}$  とおくとき、 $\mathcal{A}$  は  $C(X)$  の closed sub-algebra となり  $1$  を含む。

いま  $\mathcal{B}$  を  $C(X)$  の sub-algebra としたとき、 $X$  の上の確率測度  $\mu$  が乗法的であるとは、 $\forall f, g \in \mathcal{B}$  で  $\int_X fg d\mu = \left( \int_X f d\mu \right) \left( \int_X g d\mu \right)$  となることをいう。また  $\mu$  が不変 (invariant) であるとは、 $\forall t \in \mathbb{R}$  と  $\forall$  Baire set  $E \subset X$  に対して  $\mu[T(t, E)] = \mu(E)$  となることであり、 $\mu$  がエルゴード的 (ergodic) であるとは Baire set  $E \subset X$  が  $T$  で

$\mu$ -不変であれば  $\mu(E) = 0$  または  $\mu(E) = \mu(X)$  となることをいう。  $E$  が  $\mu$ -不変とは  $\forall t \in \mathbb{R}$  で  $\mu[E \Delta T(t, E)] = 0$  のことである。  $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$  が強い意味でエルゴード的 (strictly ergodic) であるとは、  $T$  のもとに不変である  $X$  の上の確率測度が唯一つ存在することである。 また  $\text{flow}(\mathbb{R}, X)$  が極小 (minimal) であるとは、  $\forall x \in X$  で  $x$  の orbit  $\{T(t, x); t \in \mathbb{R}\}$  が  $X$  の中で稠密のときである。

## §2. Subalgebra $\mathcal{O}$

$(\mathbb{R}, X)$  を  $\text{flow}$  としたとき  $\mathcal{O}$  を §1 で定義された  $C(X)$  の subalgebra とする。  $(\mathbb{R}, X)$  と  $\mathcal{O}$  との関係をつぎに述べる。

定理 2.1  $\mathcal{O}$  の確率測度  $\mu$  が不変でエルゴード的とする。そのとき  $\mathcal{O}$  は  $L^\infty(\mu)$  における weak- $*$  Dirichlet algebra である。

定理 2.2  $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$  が強い意味でエルゴード的であれば  $\mathcal{O}$  は Dirichlet algebra である。

例.  $\Gamma \in (0)$  で  $\mathbb{R}$  の部分群とし、  $\Gamma$  に discrete topology を与え、  $G \in \Gamma$  の指標群 (character group) とする。勿論  $G$  はコンパクト群である。  $\chi_a(x) = x(a)$  ( $a \in \Gamma, x \in G$ ) とおくとき  $\chi_a$  ( $a \in \Gamma, a \geq 0$ ) で生成された  $G$  の上の function algebra を  $A$  とする。  $A$  は Dirichlet algebra であり、  $A$  の

の関数は *generalized analytic function* と呼ばれる。

$\mathbb{R} \ni \forall s \ni e_s(a) = e^{ias} (a \in \Gamma)$  とおけば  $e_s \in G$  となることから  $s \rightarrow e_s$  となる写像によって  $\mathbb{R}$  は  $G$  の中で稠密な部分群に写される。こゝで  $\text{Flow}(\mathbb{R}, G)$  をつぎのように定義する。

$$T : (t, x) \rightarrow e_t + x$$

こゝで  $\text{flow}(\mathbb{R}, G)$  から  $\mathcal{A}$  を作ると  $\mathcal{A} = A$  となる。これは  $f = \sum c_j \chi_{a_j}$  とすれば  $f(e_t) = \sum c_j e^{ia_j t}$  が  $\forall a_j \geq 0$  であれば  $\mathbb{C}$  の上半分の有界な *analytic function* に拡張できることからわかる。この場合  $T$  によって不変となる  $G$  の上の唯一つの確率測度は Haar 測度であることから、 $\text{flow}(\mathbb{R}, G)$  は強い意味でエルゴード的である。

定理 2.3  $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$  が極小であれば  $\mathcal{A}$  は  $C(X)$  の maximal closed sub-algebra となる。

系 2.4 (Wermer maximality theorem) Disc algebra は maximal algebra である。

前の例において  $\Gamma$  を  $\mathbb{R}$  の整数全体の部分群とする。そのとき  $\mathcal{A}$  は disc algebra となる。このとき  $T(t, x) = t + x$  の orbit は  $G$  となるから  $\text{flow}(\mathbb{R}, G)$  は minimal となることがわかる。

定理 2.5  $\text{Flow}(\mathbb{R}, X)$  が minimal ならば  $\mathcal{A}$  は pervasive

algebra となる。ここで  $\mathcal{A}$  が pervasive であるとは、 $X$  の任意の閉集合 ( $F \neq X$ ) に対して  $\mathcal{A}|_F$  は  $C(F)$  で稠密であることをいう。

注 Forelli [4] においては、定理 2.3 定理 2.5 は別々に証明されているが、 $(\mathbb{R}, X)$  が minimal なる  $\mathcal{A}$  は essential であることが容易にわかるから、定理 2.3 より定理 2.5 が導かれる。

### §3 $H^p(m)$ と flow

Helson and Lowdenslager [6] は generalized analytic function の algebra に付随する Hardy space  $H^p(m)$  の性質を考えた。それを flow を用いて §1 で定義された algebra  $\mathcal{A}$  の場合に拡張すると、つぎのようになる。

$\mathcal{A}$  の上の乗法的な確率測度を  $m$  とする。そのとき

定理 3.1  $H^2(m)$  が定数関数以外の関数を含むとする。そのとき、 $m$  がエルゴード的であるための必要かつ十分条件は、 $H^2(m) \ni f$  が  $m(E) > 0$  となる  $E$  の上で  $0$  ならず  $f \neq 0$  (a.e.  $m$ ) となることである。

定理 3.2 測度  $m$  は dirac 測度でないとし、 $\mathcal{A}$  は  $L^\infty(m)$  の weak  $^*$ -Dirichlet algebra とする。そのときつぎの条件は同等である。

(1)  $m$  はエルゴード的である。

(2)  $1 \leq p \leq \infty$  に対して  $H^p(m) \ni f$  が  $m(E) > 0$  となる  $E$  の上で  $0$  なる  $f = 0$  (a.e.  $m$ )。

(3)  $H^\infty(m)$  は  $L^\infty(m)$  の maximal weak\*-closed subalgebra である。

定理 3.3 Flow  $(\mathbb{R}, X)$  が強い意味でエルゴード的であるならば  $m$  が dirac 測度でなければ  $m$  はエルゴード的である。

#### § 4. $\Omega$ の maximal ideal space.

$X \times [0, 1]$  において  $X \times \{0\}$  を 1 点  $\hat{0}$  とした quotient space を  $\mathbb{D}$  で表わす。

定理 4.1  $X$  の上の乗法測度  $m$  は dirac 測度でないとする。そのとき  $\mathbb{D}$  から  $\Omega$  の maximal ideal space  $M_\Omega$  の上への同相写像  $\Gamma$  が存在する。さらに  $0 < \gamma < 1$  となる  $\gamma$  について  $\{\Gamma(x, \gamma); x \in X\}$  はある non-trivial な Gleason part に含まれ、 $C_0 = \Gamma(\hat{0})$  を含む Gleason part が non-trivial である必要かつ十分条件は  $m$  はある orbit に凝集することである。

## 参考文献

- [1] R. Arens and I. Singer : Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956) 379-393.
- [2] P. L. Duren : Theory of  $H^p$  Spaces, Academic Press 1970.
- [3] F. Forelli : Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967) 33-59.
- [4] ——— : A maximal algebra, Math. Scand. 30 (1972) 152-158.
- [5] T. Gamelin : Uniform algebras, Prentice Hall 1969.
- [6] H. Helson and D. Lowdenslager : Prediction theory and Fourier series in several variables II Acta Math., 106 (1961), 175-213.
- [7] P. S. Muhly : Function algebras and flows : Acta Scien. Math. 35 (1973) 111-121.
- [8] ——— : Function algebras and flows II : Arkiv Math. 11 (1973) 203-213.
- [9] ——— : Function algebras and flows III : Math. Z. 136 (1974) 253-260.