数理解析研究所講究録
232巻 1975年 55-64

有界調和関数族上の汎関数の退化について

広島大 理　酒井　良

compactなRiemann面上の調和関数は定数である．したがって定数でない調和関数の存在するRiemann面はnon-compactであるが，このときには定数でない調和関数は次の意味でたくさんある．面上に集積しない点列$\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$と各$\zeta_j$に局所変数$z_j(=x_j+iy_j)$，自然数$m_j$，実数$c_j$を任意に与えて

$$\left.\frac{\partial^{m_j} u}{\partial x_j^{m_j}}\right|_{z_j=\zeta_j} = c_j \qquad (j=1,2,\cdots)$$

をみたす調和関数uが存在する．つまり，定数でない調和関数が存在すれば，汎関数 $u \mapsto \left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{z=\zeta}$ が退化しないほどに調和関数がたくさんある．このようなことが調和関数の部分族に関して成立するであろうか．部分族としては無論意味のあるもの例えばDirichlet積分有限の族，有界な族などをとる．歴史的には，正則関数の族に関してまず調べられた．

non-compact な Riemann 面は Stein 多様体であって，上のことは調和関数を正則関数とおきかえて成り立つ．そして有界正則関数に関しては上のようなことはおきない．つまり，定数でない有界正則関数が存在し任意の有界正則関数 f に対して，

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=\zeta} = 0$$

となる点 ζ があるような Riemann 面が Myrberg [1] により構成された．我々はこれらのことを調和関数に関して調べるのであるが，Dirichlet 積分有限の族に関しては [3] で調べたのでここでは有界な族に関して調べる．結果は [3] で得たものと同様であるが証明など異ってくる部分について主に述べる．

§1. Riemann 面の族 $\mathcal{S}_X^1$.

$HB(W)$ を Riemann 面 W 上の有界調和関数の全体とし，$KB(W)$ を $HB(W)$ の元 u でその共役微分 $*du$ の周期が任意の dividing cycle に関して 0 となるものの全体とし，$AB(W)$ を W 上の有界正則関数の全体とする．Riemann 面 W 上の点 ζ と ζ の局所変数 $z(=x+iy)$ に対して X - span $S_X^1(\zeta, z)$ を

$$S_X^1(\zeta, z) = \sup\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=\zeta}\ ;\ u\in X,\ \sup_{p\in W}|u(p)| \leqq 1\right\}$$

と定義する．ここで，X は HB, KB または $\mathrm{Re}\,AB = \{\mathrm{Re}\,F \mid F \in AB\}$ である．ある点 $\zeta \in W$ と ζ の局所変数 z があって，$S_X^1(\zeta, z) = 0$ となるような Riemann 面 W の全体を $\mathcal{S}_X^1$ で表わす．O_X を $X(W)$ が定数のみからなる Riemann 面の族とすると $W \in O_X$ の必十条件は，すべての ζ と ζ のすべての局所変数 z に対して $S_X^1(\zeta, z) = 0$ となることであり，したがって $O_X \subset \mathcal{S}_X^1$ である．まず平面領域で $\mathcal{S}_{HB}^1$ に属するものを特徴づけるために平面上の compact 集合 E に対して，$k(E)$ を

$$k(E) = \{\zeta \mid {}^\forall r > 0,\ \mathrm{Cap}\,[\,\{z \mid |z - \zeta| \leqq r\} \cap E\,] > 0\}$$

と定義する．ここで Cap は対数容量を表わす．$k(E)$ は compact かつ perfect な E の部分集合であって，

(a) $k(E) = \phi \iff \mathrm{Cap}\,E = 0$

(b) $\mathrm{Cap}\,k(E) = \mathrm{Cap}\,E$

(c) $k(k(E)) = k(E)$

をみたす．この $k(E)$ を用いて次の特徴づけを得る．

定理 1.1. W は平面領域で，$W \ni \infty$ とする．$W \in \mathcal{S}_{HB}^1 - O_{HB}$ である必十条件は次の (i) と (ii) が成立することである．

(i) $E = W^c$ が $N_B - N_G$ に属する．つまり，$W \in O_{AB}$ かつ，$\mathrm{Cap}\,E > 0$.

(ii) 円(周) C があって, $k(E)\subset C$. 但し直線は ∞ 点を通る円と考える. 次に Riemann 面において $O_X < \mathcal{S}_X^1$ の包含関係が strict であることをみる.

定理 1.2. 有限種数の Riemann 面にかぎれば,

(1) $$O_{HB} < \mathcal{S}^1_{HB} < O_{AB},$$

(2) $$O_{KB} = \mathcal{S}^1_{KB} = O_{AB} = \mathcal{S}^1_{Re AB}.$$

一般の Riemann 面に関しては,

$$\begin{array}{ccccc} O_{HB} & < & O_{KB} & < & O_{AB} \\ \wedge & & \wedge & & \wedge \\ \mathcal{S}^1_{HB} & < & \mathcal{S}^1_{KB} & < & \mathcal{S}^1_{Re AB} \end{array}$$

であって, O_{KB} と $\mathcal{S}^1_{HB}$, $\mathcal{S}^1_{HB}$ と O_{AB}, O_{AB} と $\mathcal{S}^1_{KB}$ には包含関係がない.

証明は省略するが, $W\in \mathcal{S}^1_{HB}-O_{AB}$ の例の構成についてのみ述べる. D を z-平面上の単位円板とし, slit $l_{n,m}$ を

$$l_{n,m} = \left\{ z = re^{i\theta} \;\middle|\; 1-\frac{1}{2^n} \leq r \leq 1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+2}},\quad \theta = \frac{2\pi}{[8\pi(2^n-1)]}\cdot m \right\}$$

$$(n=1,2,\cdots;\ m=1,2,\cdots,[8\pi(2^n-1)])$$

とする. ここで $[x]$ は x をこえない最大整数を表す. D_i $(i=1,2)$ を $D-\bigcup_{n,m} l_{n,m}$ の二つの copy とし, 共通の slit に沿って上下交叉してつなぎ合せる. これによ

りD上の二葉の分岐被覆面 (W, π) ができる．このWが求める例となっている．$W \notin O_{AB}$ は，$\pi \in AB(W)$ より明らかだから $W \in \mathcal{S}^1_{HB}$ を示す．任意の $u \in HB(W)$ に対して，$\pi(p) = \pi(q)$ ならば $u(p) = u(q)$ をみる．$|u| \leqq M$ とする．$l_{n,m}$ の端点 a に対して，$D_{a,\rho} = \{ z \mid |z-a| < \frac{\rho}{2^{n+2}} \}$ $(0<\rho \leqq 1)$ とおく．$U_{a,\rho} = \pi^{-1}(D_{a,\rho})$ とおき，$q = \pi^{-1}(\pi(p))$ の p と異なる分枝 とすると，$u(p) - u(q)$ は $U_{a,1}$ 上調和で，q-lemma ([2] 参照) より $p \in U_{a,\rho}$ なら

$$|u(p) - u(q)| \leqq q \sup_{p \in U_{a,1}} |u(p) - u(q)| \leqq q \cdot 2M$$

ここで，q は $\sqrt{\rho}$ のみによる値で，$0 < q < 1$ である．ρ を十分1に近くとると，$D \subset \bigcup_a D_{a,\rho}$ とできるから，

$$\sup_{U_{a,1}} |u(p) - u(q)| \leqq q \cdot 2M.$$

$$\therefore \sup_{U_{a,1}} |u(p) - u(q)| \leqq q^n \cdot 2M. \qquad (n \geqq 1)$$

$$\therefore \quad u(p) = u(q).$$

uは任意であったから，Wの分岐点ζをとるとその任意の局所変数tに対して $S^1_{HB}(\zeta, t) = 0$．$\therefore W \in \mathcal{S}^1_{HB}$．

§2. 分離可能性.

Riemann面Wの2点ζ, ζ'に対して，X-span $S_X(\zeta, \zeta')$ を

$$S_X(\zeta,\zeta')=\sup\{u(\zeta)-u(\zeta');\ u\in X,\ \sup_{p\in W}|u(p)|\leqq 1\}$$

と定義する．異った2点 $\zeta,\zeta'\in W$ があって，$S_X(\zeta,\zeta')=0$ となるような Riemann 面の全体を $\mathcal{S}_X$ で表わす．$W\in\mathcal{S}_X$ であることとは，W 上に $X(W)$ によって分離されない2点があるということである．$\mathcal{S}_X^1$ を $\mathcal{S}_X$ でおきかえて定理1.1，定理1.2が成り立つ．このことから次のことが分る．

定理2.1．平面領域にかぎれば，$\mathcal{S}_{HB}=\mathcal{S}_{HB}^1$．

§3．高位数の span．

Riemann 面 W 上の点 ζ と ζ の局所変数 $z(=x+iy)$ に対して，位数 m の X-span を

$$S_X^m(\zeta,z)=\sup\left\{\left.\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right|_{z=\zeta};\ u\in X,\ \sup_{p\in W}|u(p)|\leqq 1\right\}$$

と定義する．$\mathcal{S}_X^m$ を $\mathcal{S}_X^1$ と同様に定義する．$\mathcal{S}_X^1$ を $\mathcal{S}_X^m$ でおきかえて，定理1.2が成り立つ．定理1.1は次の形に一般化される．

定理3.1．W は平面領域で，$W\ni\infty$ とする．$W\in\mathcal{S}_{HB}^m-O_{HB}$ であるための必要十分条件は次の(i)と(ii)が成立することである．

(i) $E=W^c$ が N_B-N_G に属する．

(ii) $\zeta\in W$ と m 次の多項式 $P(t)=\sum_{j=0}^{m}a_j t^j$ $(a_m\neq 0)$ があって，

$\xi \neq \infty$ のときは, $k(E) \subset \{z \mid \operatorname{Im} P(\frac{1}{z-\xi}) = 0\}$

$\xi = \infty$ のときは, $k(E) \subset \{z \mid \operatorname{Im} P(z) = 0\}$

が成り立つ.

この定理の系として,

系 3.2. 平面領域にかぎれば, $\mathcal{S}_{HB}^m \subset \mathcal{S}_{HB}^n$ であるための必要条件は m が n の約数となることである.

§4. 点集合 $N_{X,s}^m(W)$, $N_{X,a}^m(W)$ について.

Riemann 面 W に対して, $N_{X,s}^m(W)$ と $N_{X,a}^m(W)$ とを

$N_{X,s}^m(W) = \{\xi \in W \mid \xi$ のある局所変数 z に対して, $S_X^m(\xi, z) = 0\}$,

$N_{X,a}^m(W) = \{\xi \in W \mid \xi$ のすべての局所変数 z に対して, $S_X^m(\xi, z) = 0\}$

と定義する. $N_{X,a}^m(W) \subset N_{X,s}^m(W)$, $N_{ReAB,s}^1(W) = N_{ReAB,a}^1(W)$, $N_{X,s}^m(W) \neq \phi \Longleftrightarrow W \in \mathcal{S}_X^m$ である. §1 でのべたことは平面領域に対しては,

(1) $N_{HB,s}^1(W) \neq \phi$ ならば,

$N_{HB,s}^1(W) = W$ (つまり, $W \in O_G$)

または, ある円 C があって $N_{HB,s}^1(W) = W \cap C$.

であるが, 定理 1.1 の証明から, 次のことが分る.

(2) $N_{HB,a}^1(W) \neq \phi$ ならば, $N_{HB,a}^1(W) = W$.

任意の Riemann 面については，次のことが言える．

定理 4. 1. $N^m_{X,a}(W)$ が W 上に集積点を持つための必十条件は，$W \in O_X$ となることである．

定理 4. 2. $N^m_{X,a}(W)$ が内点を持つための必十条件は，$W \in O^{2m}_X$ となること，つまり $X(W)$ が高々 $2m$ 次元となることである．特に $O^{2m}_{ReAD} = O_{AB}$ であるので，$N^m_{ReAD,a}(W)$ が内点を持つための必十条件は，$W \in O_{AB}$ である．

§5. 共役微分の周期.

$u \in HB(W)$ の微分 du の共役微分 $*du$ の cycle γ に沿っての周期

$$\int_\gamma *du$$

の退化について考察する．次のことが知られている．

定理 5. 1. V を Riemann 面 W の regular な部分領域とし，$W - \overline{V} = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ の各成分 U_j の relative boundary を γ_j とし，U_j の ideal boundary は harmonic measure positive とする．任意の実数 $c_1, \cdots, c_n$ で $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ となるものを与えたときに，

$$\int_{\gamma_j} *du = c_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

となる $u \in HB(W)$ が存在する。

したがって，

定理5.2. W が有限種数の Riemann 面とし，γ を W 上の dividing cycle とする。任意の $u \in HB(W)$ に対して，

$$\int_\gamma {}^*du = 0$$

となるための必十条件は，γ が W の HB-maximal region W^* 上で homologous to 0 となることである。

non-dividing cycle に関しては退化することが起り得る。例を示す。E を z-平面上の実軸上の $N_B - N_G$ に属する集合とする。$\{z \mid |z| \leqq \infty\} - E - \{x+i \mid -1 \leqq x \leqq 1\} - \{x-i \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ の copy を二つとり，各面の slit $\{x \pm i \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ で上下交叉してつなぎ合わせ，種数1の Riemann 面 W を構成する。$\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$ とし，γ_+ は上の面の $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ に射影される部分にあって slit $\{x+i \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ にあたるものを正の向きに一回まわる cycle とし，γ_- は上の面の $\{\mathrm{Im}\, z < 0\}$ に射影される部分にあって slit $\{x-i \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ にあたるものを負の向きに一回まわる cycle とする。すると γ は non-dividing であって，任意の $u \in HB(W)$ に対して，

$$\int_\gamma {}^*du = 0$$

となる.

文　献

[1] Myrberg, P. J., Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. No. 58 (1949), 1-7.

[2] Sario, L. and K. Oikawa, Capacity functions. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1969).

[3] Sakai, M., On the vanishing of the span of a Riemann surface. Duke Math. J. 41 (1974), 497-510