

Measure algebra における Taylor の問題について

東教大 理 泉池敬司

§1. 序. Taylor は measure algebra の maximal ideal space を表現するのに structure semigroup なるものを考えた。そして彼の一連の仕事により topology に関係している所の measure algebra の性質はかなり明確に取らえられる様になった。つまり structure semigroup の maximal group によっている measure が G 上の L.C.A. group topology と 1 対 1 に対応しているのであるが、それに関係して 1 つの問題がでてくる。その Taylor の問題を肯定的に解くのがこの目的である。

§2. 記号及び定義. ここでは次の記号を用いる。

G : non-discrete locally compact abelian group.

\hat{G} : G の dual group

$E \subset \hat{G}$ に対して

E^\perp : E の G での annihilator, つまり $E^\perp = \{x \in G : (x, \alpha) = 1 \text{ on } E\}$

あると E^\perp は G の closed subgroup である。

$M(G)$: G 上の bounded regular Borel measure 全体よりなる Banach algebra, 積は convolution, norm は total variation norm.

$L^1(G)$: G 上の group algebra.

$\text{Rad } L^1(G)$: $L^1(G)$ の radical, つまり $L^1(G)$ を含む $M(G)$ の maximal ideal の共通部分。

$H \subset G$ compact subgroup に対して

m_H : H 上の normalized Haar measure, $\|m_H\|=1$, $m_H \in M(G)$.

G_H : H を open compact subgroup としてある topology の備わった group G . $\{U_\alpha\}$ を G における 0 の open base とあるとき $\{U_\alpha \cap H\}$ は 0 の open base とある G 上の L.C.A. group topology.

(*) $M(G_H) \subset M(G)$.

$\mu, \nu \in M(G)$ に対して

$\mu \ll \nu$: μ は ν に 絶対連続.

$\mu \perp \nu$: μ と ν は 互いに singular.

$\mu^* \in M(G)$: $\mu^*(E) = \overline{\mu(-E)}$ for Borel subset E of G .

$\hat{\mu}$: μ の Fourier-Stieltjes 変換 $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma) d\mu(x)$, $\gamma \in \hat{G}$.

$\tilde{\mu}$: μ の Gelfand 変換

$N \subset M(G)$ closed ideal (subalgebra) に対して

N が L -ideal (L -subalgebra)

$\Leftrightarrow \lambda \in N, \forall \lambda \ll \nu$ for some $\nu \in N$.

$E \subset G$ が independent

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in E$ に対して, $\exists \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_k x_k = 0$

ならば $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$.

§ 3. Structure semigroup と Taylor の問題.

Taylor は [3] で次の定理を示した。

定理 1. (Taylor [3]). $M(G)$ に対し次を満たす compact topological semigroup S と homomorphism $\theta: M(G) \rightarrow M(S)$ が存在する。

(1) θ : order-preserving isometric into isomorphism

$$(\mu \ll \nu \text{ in } M(G) \Rightarrow \theta\mu \ll \theta\nu \text{ in } M(S))$$

(2) $\theta(M(G))$ は $M(S)$ の weak* dense L -subalgebra.

(3) $M(G)$ の maximal ideal space は S 上の continuous semicharacter ($f(xy) = f(x)f(y), x, y \in S$) の集合 \hat{S} と

1 対 1 の対応がある, τ , τ の対応は

$$M(G) \ni \mu \rightarrow \tilde{\mu}(f) = \int_S f d\theta\mu.$$

この定理によつて $M(G)$ の構造を考えるのには $M(S)$ の subalgebra として取り上げればよいわけであるが, 以下に

$M(G)$ と \mathcal{S} の関係は、互いに別々、というわけではない。わが
この二箇所という次の定理がある。

定理 2 (Taylor [4]) \mathcal{S} の maximal group K_p に對し、
もし、 $M(K_p) = \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } K_p \text{ に } \mathcal{S} \text{ を } \mu \text{ 集める}\} \neq \{0\}$ ならば
 G の元の topology より強い G 上の L.C.A. group topology τ
が存在し、 $M(K_p) = \text{Rad } L'(G_\tau)$ である。又逆も成立する。

そこで $K \equiv \bigcup_{p \in \mathcal{P}} K_p$ (すなわち \mathcal{S} の maximal group の union) とする。
あると $K = \{x \in \mathcal{S} : |f(x)| = 0 \text{ or } 1, \forall f \in \mathcal{S}\}$ となる。

定義. $M(K) \equiv \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } K \text{ に concentrate している}\}$

$$M_1(G) \equiv \{\mu \in M(K) : |\mu|(K_p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}\}$$

$$\mathcal{L}(G) \equiv \sum_{\tau} \text{Rad } L'(G_\tau).$$

すると定理 2 より $\mathcal{L}(G) \subset M(K)$, $M_1(G) \subset M(K)$
 $\mathcal{L}(G) \perp M_1(G)$ を得る。そこでこれが Taylor の問題である。

Taylor の問題 1 ([4]).

$M_1(G) \neq \{0\}$ なる L.C.A. group G は存在するのか?

もう 1 つ別の所から $M(K)$ に関係する所をわが、ということがある。
ある。 $\mathcal{M} \equiv \{\mu \in M(G) : \mu^{\wedge}(f) = \overline{\mu(f)}, \forall f \in \mathcal{S}\}$
symmetric measure 全体とする。

定理 3 (Taylor [3]) $\mathcal{L}(G) \subset \mathcal{M} \subset M(K)$.

Taylor の問題 2 ([3]) $\mathcal{M} = M(K)$?

以下に二種はある種の L.C.A. group G に対して次の性質をもち $\mu \in M(G)$ の存在を示す。1) $\mu \neq 0$ 2) $\mu \in M_1(G)$ 3) $\mu \in \mathcal{M}$
これは Taylor の問題 1 に対する肯定的な解答であるが、Taylor の問題 2 はまだわからない。

◎ 後で使う記号と性質.

$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して

$S_0(f) \equiv \{x \in S : f(x) = 0\}$, $S_1(f) \equiv \{x \in S : f(x) = 1\}$

$M(S_j(f)) \equiv \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } S_j(f) \text{ に台をもち} \} \quad (j = 0, 1)$

Proposition 1 ([3]) $M(S_0(f))$ は L-ideal, $M(S_1(f))$ は

L-subalgebra である。

Proposition 2 ([3]) $f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して

$M(S_1(g_f)) = M(S_1(f))$ なる $g_f \in \hat{S}$, $g_f^2 = g_f$ が存在する。

Proposition 3 ([3]) $f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して

$M(S_0(h_f)) = M(S_0(f))$ なる $h_f \in \hat{S}$, $h_f^2 = h_f$ が存在する。

§ 4. 定理とその証明.

R を実数とする。すなわち $\hat{R} = R$ である。 \bar{R} を R の Bohr compactification とする。つまり $\bar{R} = \hat{R}_d$ 。

定理. 次をみたす non-zero $\mu \in M(\bar{R})$ が存在する。

- (1) $\mu \neq 0$ (2) $\mu \in M_1(\bar{R})$ (3) $\mu \in \mathcal{M}$ (4) $\mu * \mu \in \mathcal{L}(\bar{R})$
 (5) μ の spectrum は countable set.

定理を満足す $\mu \in M(\bar{R})$ の作り方

$$\Lambda_n \equiv \{(d_0, d_1, \dots, d_n); d_0 = 0, d_i = 0 \text{ or } 1 (i=1, 2, \dots, n)\}$$

$$\Lambda \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n \text{ とおく。}$$

$$d \in \Lambda \text{ には } \exists! n \text{ して } |d| \equiv n \text{ if } d \in \Lambda_n.$$

$$d = (d_0, d_1, \dots, d_n), \beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) \in \Lambda \text{ には } \exists! n \text{ して}$$

$$d \wedge \beta \equiv (d_0, d_1, \dots, d_k) \text{ if } d_0 = \beta_0, d_1 = \beta_1, \dots, d_k = \beta_k, d_{k+1} \neq \beta_{k+1}.$$

補題 1. 次をみたす R の subset の family $\{E_d\}_{d \in \Lambda}$ が存在する。

- (1) $E_d \subseteq E_{d,0}$, $E_d \subseteq E_{d,1}$ for $d \in \Lambda$
 (2) $E_d \cap E_\beta = E_{d \wedge \beta}$ for $d, \beta \in \Lambda$
 (3) $\bigcup_{d \in \Lambda} E_d$ は independent set.

(証) \mathbb{R} は infinite independent set を含むから。

E_α より生成される subgroup を H_α で表わし, \mathbb{R} の $\bar{\mathbb{R}}$ での annihilator を G_α で表わす。すると $E_\alpha^\perp = H_\alpha^\perp = G_\alpha$ 。

補題 2. $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ は $\bar{\mathbb{R}}$ の compact subgroup の family として記述する。

$$(1) G_\alpha \not\subseteq G_{\alpha,0}, G_\alpha \not\subseteq G_{\alpha,1} \text{ for } \alpha \in \Lambda.$$

$$(2) G_\alpha / G_{\alpha,0}, G_\alpha / G_{\alpha,1} \text{ は infinite compact group}$$

$$(3) G_\alpha + G_\beta = G_{\alpha \wedge \beta} \text{ for } \alpha, \beta \in \Lambda$$

$$\therefore \text{ " } \mu_n \equiv \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{\alpha \in \Lambda_n} \mu_{G_\alpha} \text{ (} n=0,1,2,\dots \text{) とおく。}$$

すると $\mu_n \in M(\bar{\mathbb{R}})$, $\mu_n \geq 0$, $\|\mu_n\| = 1$ を満たす。

補題 3. $\{\mu_n\}$ の Fourier-Stieltjes 変換は次の性質をもつ。

$$(1) \hat{\mu}_n(\gamma) = 1 \text{ for } \gamma \in H_0 \text{ (} n=0,1,2,\dots \text{)}$$

$$(2) \gamma \in H_{d_0, d_1, \dots, d_k} \setminus H_{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}} \text{ に対して}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n(\gamma) &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ for } n \geq k \\ &= 0 \text{ for } n < k \end{aligned}$$

$$(3) \exists (\gamma \in \mathbb{R} \setminus H_\alpha \text{ (} \forall \alpha \in \Lambda \text{) に対して}$$

$$\hat{\mu}_n(\gamma) = 0 \text{ (} n=0,1,2,\dots \text{)}$$

(証) $\delta \in \mathbb{R}$ に $\neq 1$ 2, 「 $\delta \neq 1$ on G_d ならば $\widehat{m_{G_d}}(\delta) = 0$ 」より明らか:

補題 3 より $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ は 唯一の weak* cluster point $\mu \in M(\overline{\mathbb{R}})$ をもつ。それの性質を調べる。

補題 4. (1) $\mu \in M(\overline{\mathbb{R}})$, $\mu \geq 0$, $\|\mu\| = 1$.

(2) $\widehat{\mu}(\delta) = 1$ for $\delta \in H_0$.

(3) $\widehat{\mu}(\delta) = (\frac{1}{2})^k$ for $\delta \in H_{d_0, d_1, \dots, d_k} \setminus H_{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}}$.

(4) $\widehat{\mu}(\delta) = 0$ for $\delta \in \mathbb{R} \setminus H_d$ ($\forall d \in \Lambda$)

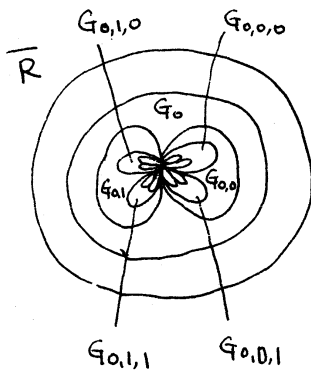
我々の目標はこの μ が定理の条件を満たすことを示すことである。そのために μ の持つ性質をもう少し調べる。

$d \in \Lambda$, $n \geq |d|$ に $\neq 1$ して

$\Lambda_n^d \equiv \{\beta \in \Lambda_n : \beta \wedge d = d\}$ $\Lambda^d \equiv \bigcup_{n \geq |d|} \Lambda_n^d$ とおく。

それ $\mu_n^d \equiv \sum_{\beta \in \Lambda_n^d} (\frac{1}{2})^n m_{G_\beta}$ for $n \geq |d|$ とおく。

すると $\mu_n^d \geq 0$, $\|\mu_n^d\| = (\frac{1}{2})^{n-|d|}$, $\mu_n = \sum_{d \in \Lambda_n} \mu_n^d$ である。



(これは μ_n を support G_d ($d \in \Lambda_n$) に α , α 分解したものである。)

μ_n の時と同じく, $\{\mu_n^d\}_{n=|d|}^\infty$ は 唯一の weak* cluster point $\mu^d \in M(\overline{\mathbb{R}})$ をもち, 次の性質をもつ。

補題 5. (1) $\|\mu^\alpha\| = (\frac{1}{2})^{|\alpha|}$ (2) $\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}_n} \mu^\alpha$ ($n \geq 0$)

(3) $\widehat{\mu^\alpha}(\gamma) = (\frac{1}{2})^{|\alpha|}$ for $\gamma \in H_\alpha$

(4) $\gamma \in H_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k} \setminus H_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}}$ ($k \geq |\alpha|$) $\Leftrightarrow \widehat{\mu^\alpha}(\gamma) = (\frac{1}{2})^k$ if $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathcal{L}^\alpha$ ($\beta \wedge d = d$)
 $= 0$ if $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \notin \mathcal{L}^\alpha$ ($\beta \wedge d \neq d$)

(5) $\widehat{\mu^\alpha}(\gamma) = 0$ for $\gamma \in R \setminus H_\alpha$ ($\forall \alpha \in \mathcal{L}$)

補題 6. (1) $\mu^\alpha \in M(\bar{R}/G_\alpha)$, $\mu^\beta \perp M(\bar{R}/G_\alpha)$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$.

(2) $\mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{|\alpha|+|\beta|} m_{G_\alpha \wedge \beta}$.

(証明)

(2) 補題 5 2) 次 E 得る.

$$\widehat{\mu^\alpha * \mu^\beta}(\gamma) = \widehat{\mu^\alpha}(\gamma) \widehat{\mu^\beta}(\gamma) = (\frac{1}{2})^{|\alpha|} (\frac{1}{2})^{|\beta|} \text{ if } \gamma \in H_{\alpha \wedge \beta}$$

$$= 0 \text{ if } \gamma \notin H_{\alpha \wedge \beta}.$$

$\therefore \mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{|\alpha|+|\beta|} m_{G_\alpha \wedge \beta}$ であることは示す。

(1) $\phi: \bar{R} \rightarrow \bar{R}/G_\alpha$ canonical homomorphism である。

$\lambda \in M(\bar{R}) \Leftrightarrow \widehat{\lambda} \in M(\bar{R}/G_\alpha)$

$\widehat{\lambda}(E) \equiv \lambda(\phi^{-1}(E))$ for every Borel subset E of \bar{R}/G_α である。

であることは $M(\bar{R}) \ni \lambda \rightarrow \widehat{\lambda} \in M(\bar{R}/G_\alpha)$ は homomorphism である。

また $\widehat{\lambda}(\gamma \circ \phi) = \widehat{\lambda}(\gamma)$ for $\gamma \in \widehat{\bar{R}/G_\alpha} = H_\alpha$ である。

よって補題 4 2) $\widehat{\mu} = \frac{1}{2} m_{D_{d_0}} + (\frac{1}{2})^2 m_{D_{d_0, d_1}} + \dots + (\frac{1}{2})^{|\alpha|} m_{D_{d_0, \dots, d_{|\alpha|-1}}} + (\frac{1}{2})^{|\alpha|} S_0$

を得る。ここで D_{d_0, d_1, \dots, d_j} は $H_{d_0, d_1, \dots, d_j} \subset H_\alpha$ の \bar{R}/G_α である。

の annihilator である。 S_0 は $0 \in \bar{R}/G_d$ の point mass である。
 次に $H_d / H_{d_0, d_1, \dots, d_j}$ が infinite group であることを注意
 すれば $m_{D_{d_0, d_1, \dots, d_j}}$ は \bar{R}/G_d 上の continuous measure である。
 又 μ_n^α ($n \geq |d|$) が G_d に concentrate (213) であることを注意す
 れば、 $\mu^\alpha = (\frac{1}{2})^{|d|} S_0$ である。 (以上より)
 $\sum_{\beta \neq d, |\beta| = |d|} \mu^\beta$ は continuous measure on \bar{R}/G_d である。
 $\mu^\alpha \in M(\bar{R}/G_d)$, $\mu^\beta \perp M(\bar{R}/G_d)$ for $\beta \neq d, |\beta| = |d|$ を得る。

(注意) $\mu^\alpha \perp \mu^\beta$ if $\alpha \neq \beta, |\alpha| = |\beta|$.

命題 1. $0 \mu(K_p) = 0$ for every maximal group K_p of S .

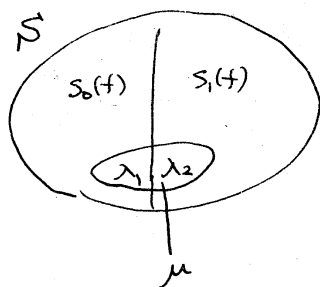
(証) 補題 5 の (1), 補題 6 の (1) より得られる。

補題 7. $f \in \hat{S}$, $f^2 = f$, $\hat{\mu}(f) \neq 0$ とする。すると次を満たす $d \in \mathcal{L}$ が存在する。

(1) $\mu^d \in M(S_1(f))$

(2) $\mu^\beta \in M(S_0(f))$ for $\beta \neq d, |\beta| = |d|$.

(証明)



$\hat{\mu}(f) \neq 0$ であるから $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$,
 $\lambda_1 \in M(S_0(f))$, $\lambda_2 \in M(S_1(f))$ と分解でき
 る。そこで μ^d の $n \geq 1$ に対して

$\mu_m \in M(S_0(+))$ と仮定する。すると $(\frac{1}{2})^{m_0} < \|\lambda_2\|$ なる自然数 m_0 に対して $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{m_0}$, $\mu^\alpha \notin \lambda_2$, $\mu^\beta \notin \lambda_2$ なるものが存在する。補題 6 の (2) より, $\mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{2m_0} m_{\mathbb{Q}_{\alpha, \beta}}$ と $\mu^\alpha * \mu^\beta \in M(S_0(+))$ を得る。しかし $M(S_1(+))$ は L -subalgebra であることより $\mu^\alpha * \mu^\beta \notin M(S_0(+))$ を得て矛盾を生ずる。

よって $\mu_m \notin M(S_0(+))$ なる自然数 m がある。そこで

$\mu_m \notin M(S_0(+))$ なる一番小さい自然数を m_1 とする。すると補題 2 の (3) より $\alpha \in \mathcal{L}_{m_1}$ が存在して $m_{\mathbb{Q}_\alpha} \in M(S_1(+))$, $m_{\mathbb{Q}_\beta} \in M(S_0(+))$ for $\beta \in \mathcal{L}_{m_1}$ ($\beta \neq \alpha$) が成立する。所て $M(\overline{R}_{\mathbb{Q}_\alpha}) \subset M(S_1(+))$ であるから, 補題 6 の (1) より $\mu^\alpha \in M(S_1(+))$ を得る (1) の証明終り)。そこで $\mu^\beta \notin M(S_0(+))$ for some $\beta \in \mathcal{L}_{m_1}$ ($\beta \neq \alpha$) とする。すると $\mu^\beta * \mu^\alpha \notin M(S_0(+))$ である。しかし補題 6 の (2) より $\mu^\beta * \mu^\alpha = (\frac{1}{2})^{|\beta|+|\alpha|} m_{\mathbb{Q}_{\alpha, \beta}}$ を得る。しかしこれは $\mu^\alpha * \mu^\beta \in M(S_0(+))$ を示す。よって矛盾である。

命題 2. $\theta\mu$ は K に concentrate してゐる。

(証明)

$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$, $f^2 = f$, $\tilde{\mu}(f) \neq 0$ とする。Proposition 3 より $h_f \in \hat{S}$ ($h_f^2 = h_f$) が存在して $\tilde{\mu}(h_f) \neq 0$ である。すると補題 7 をみたす $\alpha \in \mathcal{L}$ が存在して $\mu^\alpha \in M(S_1(h_f))$, $\mu^\beta \in M(S_0(h_f))$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$ である。所て

$M(\bar{R}_{G_d}) \subset M(S_1(h_f))$, $m_{G_d} \in M(S_1(g_f))$ であるから,
 $M(\bar{R}_{G_d}) \subset M(S_1(g_f))$, $\mu^d \in M(S_1(g_f))$ を得る。このことは
 μ が K に concentrate していることを示している。

以上により我々の定理が成立する。一般には次を得る。

定理' $G \in$ compact abelian group とする。もし \hat{G} が
 infinite independent set を含むならば $M_1(G) \neq \{0\}$ である。

系. $M_1(G) \neq \{0\}$ なる compact metrizable abelian group G
 が存在する。

(証明)

補題 1 $E_d \in$ countable set にとる。 $H \in \{H_d\}_{d \in \Lambda}$ から
 生成される subgroup とすると、 H は countable subgroup of
 \mathbb{R} である。 H^\perp を H の \bar{R} での annihilator とすると $H = \widehat{\bar{R}/H^\perp}$
 であるから \bar{R}/H^\perp は compact metrizable abelian group
 である。あとは同じ様に \bar{R}/H^\perp 上で話しを進めていけばよい。

$M_1(G) \neq \{0\}$ なる group G の存在はわかったのだが、一番簡単
 な group, \mathbb{R} , と \mathbb{T} (circle group) に関 (これはまだわかって
 いない)。予想としては、 $M_1(\mathbb{R}) = \{0\}$, $M_1(\mathbb{T}) = \{0\}$ である。

最後に、清水氏 ([6]) も同様の結果を得ています。idea はだいたい同じです。

参考 文献

1. K. Izuchi : On a problem of J. L. Taylor, to appear.
2. W. Rudin : Fourier analysis on groups, Interscience, New York, 1962.
3. J. L. Taylor : The structure of convolution measure algebras, Trans. A.M.S. 119 (1965), 150-166.
4. ——— : L-subalgebras of $M(G)$, Trans. A.M.S. 135 (1969), 105-113.
5. ——— : Measure Algebras, Regional conf. ser. Math. (Amer. Math. Soc.) No. 16 (1973).
6. T. Shimizu : Independent sets and measure algebras, to appear.