

Function space における Local maximum
modulus principle

九大 理 平下幸雄

早大 教育 和田淳藏

Function algebra に関する Rossi [6] の Local maximum modulus principle はよく知られている。その後、この principle は Banach algebra においても考えられている ([1])。ここでは function space において、もっとくわしく言えば function system \mathcal{F} において Local maximum modulus principle を考察する。Rossi の principle における Shilov 境界と同じ役割をなす $LMM(\mathcal{F})$ -boundary の存在を示すと共に、 $LMM(\mathcal{F})$ -boundary の性質および Rossi の principle との関係について述べる。

§ 1. $LMM(\mathcal{F})$ -boundary.

X をコンパクト Hausdorff 空間とし、 X の部分集合の上で定義された有界な複素値連続関数からなる 1 つの族を \mathcal{F} とする。 \mathcal{F} が \mathcal{F} に対して \mathcal{F} の定義域を $D(\mathcal{F})$ で表わす。

\mathcal{F} が X の上の function system であるとは、つぎの条件をみたすときとする。

(1) $f, g \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ なら $D(f) \cap D(g)$ で定義された $\alpha f + \beta g$ は \mathcal{F} に属する。

(2) $\mathcal{F}_X = \{f \in \mathcal{F} : D(f) = X\}$ は X の点を分離し、定数関数を含む。

いま \mathcal{F} を X の上の function system とする。 $X \supset E$ が $LMM(\mathcal{F})$ -principle をみたすとは、 $U \cap E = \emptyset$ となる X の開集合 U と $D(f) \supset \bar{U}$ となる $f \in \mathcal{F}$ に対して $\|f\|_{\bar{U}} = \|f\|_U$ となることとする。ここで \bar{U} は U の topological boundary, $\|f\|_{\emptyset} = 0$ とする。もし $LMM(\mathcal{F})$ -principle をみたす X の閉集合の中で最小のもの F_0 が存在するとき、それを $LMM(\mathcal{F})$ -boundary と呼び $F_0 = LMM(\mathcal{F})$ とかくことにする。

定理 1.1 任意の X の上の function system \mathcal{F} に対して、 $LMM(\mathcal{F})$ -boundary が存在する。

証明は Bear [2] の証明に似ているが、多少複雑である。

§ 2. $LMM(\mathcal{F})$ -Boundary と Shilov Boundary

$C(X)$ の線型部分空間 A が X の上の function space であるとは、 A が X の点を分離し、定数関数を含むときにいう。

A を X の上の function space とする. $S \subset X$ の上で定義された関数 f が $(A-)$ holomorphic であるとは, $\forall x \in S$ に対して, X における x の近傍 V が存在して f は A の関数によって $S \cap V$ の上で一様に近似されることをいう. S の上の holomorphic function 全体を $\mathcal{H}_A(S)$ で表わす. また S の上で A の関数によって一様近似できる関数全体を $\mathcal{H}'_A(S)$ で表わす.

A を X の上の function space とするとき, つぎの 3 つは X の上の function system となる.

$$(I) \quad \mathcal{F}(A) = A.$$

$$(II) \quad \mathcal{F}(\mathcal{H}'_A) = \bigcup_{S \subset X} \mathcal{H}'_A(S)$$

$$(III) \quad \mathcal{F}(\mathcal{H}_A) = \bigcup_{S \subset X} \mathcal{H}_A(S)$$

つぎが証明できる.

$$\text{定理 2.1} \quad \partial A \subset \text{LMM}(\mathcal{F}(A)) = \text{LMM}(\mathcal{F}(\mathcal{H}'_A)) \subset \text{LMM}(\mathcal{F}(\mathcal{H}_A))$$

ここで ∂A は A の Shilov 境界である.

Rickart [5] の corollary 2.3 と類似の結果が つぎのように得られる.

定理 2.2 X の開集合 U が $U \cap \text{LMM}(\mathcal{F}(\mathcal{H}_A)) = \emptyset$ をみたすとき, 任意の $f \in \mathcal{H}_A(U)$ に対して $\epsilon > 0$ が存在して, δ の任意の開近傍 V に対して $\|f\|_U = \|f\|_{U \cap V}$ となる.

§ 3. Singular point

A を X の上の function space とし、 $\phi: X \rightarrow A^*$ を X から dual space A^* (weak*-topology をもつた) への canonical mapping とする: すなわち $x \in X$ に対して $\phi(x) \in A^*$ は $\langle \phi(x), f \rangle = f(x)$ ($x \in X, f \in A$) をみたす. ここで X と $\phi(X)$ は同一視することができる. $S \subset X$ に対して $\phi(S)^\wedge$ は $\phi(S)$ の closed convex hull を表わす. $\phi(X)^\wedge$ は state space $\{L \in A^*: L(1) = 1 = \|L\|\}$ に等しい. ここで $\phi(S)^\wedge$ の代りに \hat{S} とかく (cf. [4]).

定義. X 上の x が singular であるとは、 x のある開近傍 V に対して $x \in \text{ex } \hat{V}$ となることであるとする. ここで $\text{ex } \hat{V}$ は \hat{V} の extreme point 全体を表わす. Singular point 全体の集合を S_A で表わす.

定理 3.1 $\text{LMM}(\mathcal{F}(A))$ は S_A の closure \bar{S}_A に等しい.

一般には $\partial A \subset \bar{S}_A$ であるが、 $\bar{S}_A = \partial A$ のとき、つぎが成り立つ.

定理 3.2 $\bar{S}_A = \partial A$ ならば $\partial A = \text{LMM}(\mathcal{F}(A))$.

X 上の x_0 が (*) をみたすとは、 x_0 の開近傍 W が存在して、 $W \supset U$ となる任意の x_0 の開近傍に対して $f \in A$ が存在して $U \supset \{x \in W; f(x) = \|f\|_W\}$ となることをいう.

定理 3.3 A を function space とする. そのとき S_A の任

意の点は (*) をみたす.

Rossi の principle はつぎのように書ける.

定理 3.4 A を maximal ideal space M_A の上の function algebra とする. そのとき $\overline{S_A} = \partial A$ である.

参 考 文 献

- [1] G. R. Allan : An extension of Rossi's local maximum modulus principle, J. London Math. Soc., 3 (1971) 39-43.
- [2] H. S. Bear : The Silov boundary for a linear space of continuous functions, Amer. Math. Monthly 68, (1961) 483-485.
- [3] G. M. Leibowitz : Lectures on Complex Function Algebras, Scott, Foresman and Company, 1970.
- [4] R. R. Phelps : Lectures on Choquet's Theorem, Van Nostrand, Princeton 1966.
- [5] C. E. Rickart : Analytic phenomena in general function algebras, Pacific J. Math. 18 (1966) 361-377.
- [6] H. Rossi : The local maximum modulus principle, Ann. of Math., 72 (1960) 1-11.
- [7] Y. Hirashita and J. Wada : The local maximum modulus principle for function spaces (to appear).