数理解析研究所講究録
232巻 1975年 1-14

Weak-*Dirichlet algebras の maximality について

北大 応電研　　中路 貴彦

A を $L^\infty(m)$ の weak-*Dirichlet algebra とする。$H^\infty(m)$ を含む $L^\infty(m)$ の subalgebra の形を決定する。Muhly は特別な場合に、$H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の maximal な weak-*閉 subalgebra であること、すなわち $H^\infty(m)$ を含む $L^\infty(m)$ の subalgebra は $H^\infty(m)$ と $L^\infty(m)$ のみであることを示した。更に、torus 上のある weak-*Dirichlet algebra $H^\infty(d\theta d\varphi)$ を不変部分空間によって特長づける。Merrill は circle 上の古典的な $H^\infty(d\theta)$ を、不変部分空間によって特長づけた。

§1. 準備

A が weak-*Dirichlet algebra であるとは、(i) A が確率測度空間 ($X, \mathcal{M}, m$) の上の $L^\infty(m)$ の subalgebra である、(ii) $A+\bar{A}$ は $L^\infty(m)$ で weak-*稠密である、(iii) m は A 上

multiplicative である、ことである。
抽象的な Hardy 空間 H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ とは、$1 \leq p < \infty$ のときは H^p は A の $L^p(m)$-閉包でありかつ H^∞ は A の $L^\infty(m)$ における *weak-** 閉包である。$H_0^p = \{ f \in H^p : \int f\,dm = 0 \}$ とする。M を $L^\infty(m)$ の部分集合とするとき、$[M]_2$ は M の $L^2(m)$-閉包である。X 上の可測集合 E に対して、χ_E はその特性関数である。$f \in L^p(m)$ に対して、χ_f は f の *support set* E_f の特性関数である。

(a) M は $L^\infty(m)$ の *weak-** 閉な不変部分空間とするとき、$M = [M]_2 \cap L^\infty(m)$。

§2. Torus 上の $H^\infty(d\theta d\varphi)$ の特長づけ

A を torus $T^2 = \{(z,w) : |z| = |w| = 1\}$ 上で $z^n w^m$ (n、m は整数で $(n.m) \in \Gamma$) の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。ここで、$\Gamma = \{(n.m) : m > 0\} \cup \{(n.0) : n \geq 0\}$。$d\theta d\varphi / 4\pi^2$ を T^2 上の正規 Haar 測度とし、$d\theta d\varphi$ と書くことにする。このとき、A は $L^\infty(d\theta d\varphi)$ における *weak-*Dirichlet algebra* となる。H^p を $H^p(d\theta d\varphi)$ と書くことにする。

Aを一般的に weak-$*$ Dirichlet algebra とする。そして、mをA上の multiplicative な関数と考えたときの Gleason part はmのみではないとする。このとき、H^∞のある inner 関数 Z を用いて $H_0^\infty = ZH^\infty$ とできる。

(b) 次の(1)〜(4)は同値である。

(1) H^∞ は古典的な circle 上の $H^\infty(d\theta)$ に等距離同型である。

(2) H^∞ は L^∞ における Z の多項式の weak-$*$閉包の全体である。

(3) MはH^∞の任意の weak-$*$閉不変部分空間で、$M \neq \{0\}$とする。このとき、Mのある inner 関数Fを用いて、$M = FH^\infty$ と書ける。

(4) H^∞ は L^∞ の maximal な weak-$*$閉 subalgebra である。

(1)と(2)の同値性は下の(d)による。Merrill[3]は(2)、(3)、(4)が同値であることを示した。

この節では、circle 上の $H^\infty(d\theta)$ の特長づけに対応して、torus 上の $H^\infty(d\theta d\varphi)$ の特長づけをする。

$J^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{Z}^n H^\infty$ の weak-$*$閉包、$I^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} Z^n H_0^\infty$ とする。

$\boxed{\text{定理1}}$　(1)　J^∞はH^∞を本当に含む最小の *weak*-* 閉 *subalgebra* である。

(2)　I^∞はH^∞におけるJ^∞の最大の *weak*-*閉イデアルである。

$\mathcal{H}^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ はZの多項式の$L^p(m)$における閉包とする($p = \infty$ のときは *weak*-*閉包)。$\mathcal{L}^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ はZと$\bar{Z}$の多項式の$L^p(m)$における閉包する。I^pは$L^p(m)$におけるI^∞の閉包で、$\mathcal{I}^p$は$L^p(m)$における$I^p + \bar{I}^p$の閉包とする。J^pはJ^∞の$L^p(m)$における閉包とする。

次の事が知られている[4. *Lemma* 5]。

(c)　$H^p = \mathcal{H}^p + I^p$　、　$L^p = \mathcal{L}^p + \mathcal{I}^p$　、

$J^p = \mathcal{L}^p + I^p$　、　$L^2 = J^2 + I^2$　。

ここで、+は代数的な直和であり、$p = 2$のときは直交分解である。

次は *Lummer* の等距離[2]である。

(*d*)　$1 \leq p \leq \infty$ で、*circle* 上の$L^p(d\theta)$と$\mathcal{L}^p$(*circle* 上の$H^p(d\theta)$に対しては$\mathcal{H}^p$)とが、等距離*-同型となる。

ここで＊－同型とは、複素共役は複素共役に写っていることである。

この節における主定理を証明するために、上の２つの事実に対応するものとして（e）と（f）を述べる。証明は上の（c）と（d）にほとんど同じである。g を I^∞ の定数ではない inner 関数とする。$\mathbb{H}^p$（$1 \le p \le \infty$）は $L^p(m)$ での $z^n g^m$（$(n, m) \in \Gamma$）の多項式の $L^p(m)$－閉包とする。このとき、$zI^p = I^p$ から、$\mathbb{H}^p$ は H^p の部分空間でありかつ $\mathbb{H}^\infty$ は H^∞ の subalgebra である。$\mathbb{L}^p$（$1 \le p \le \infty$）は $L^p(m)$ での z、$\bar{z}$、g、$\bar{g}$ の多項式の閉包とする。

$$S^p = \{ f \in H^p : \int z^n g^m f \, dm = 0 , (n, m) \in \Gamma \}$$

とする。$\mathcal{S}^p$ は $S^p + \bar{S}^p$ の $L^p(m)$ における閉包である。

（e）　$1 \le p \le \infty$ とする。このとき、torus 上の $L^p(d\theta d\varphi)$ と $\mathbb{L}^p$（torus 上の $H^p(d\theta d\varphi)$ に対しては $\mathbb{H}^p$）とが、等距離に＊－同型となる。

（f）　$1 \le p \le \infty$ とする。このとき、

$$H^p = \mathbb{H}^p + S^p , \quad L^p = \mathbb{L}^p + \mathcal{S}^p 。$$

ここで、やはり $p = 2$ のときは直交分解である。

$\boxed{\text{補題}}$ $I^\infty = gJ^\infty$ とする。このとき、この *inner* 関数に対して定義される S^∞ は J^∞-不変部分空間となり、$gS^\infty = S^\infty$ である。

今は、(b) に対応して、次の定理を証明できる。

$\boxed{\text{定理2}}$ H^∞ の次の性質は同値である。

(1) H^∞ は *torus* 上の $H^\infty(d\theta d\varphi)$ に等距離同型である。

(2) H^∞ は L^∞ における $z^n g^m$ ($(n, m) \in \Gamma$) の多項式の *weak*-* 閉包の全体となる。ここで、g は H^∞ の *inner* 関数である。

(3) J^∞ は *doubly*-不変部分空間を含まない。M を H^∞ の *weak*-* 閉な J^∞-不変部分空間で $M \neq \{0\}$ とする。このとき、*unimodular* 関数 F とある $\chi_E \in J^\infty$ が存在して、

$$M = \chi_E F J^\infty$$

とかける。

<u>証明</u> (1) ⇔ (2) は (e) である。(2) ⇒ (3) は [4、P 473] にある。(3) ⇒ (2) を示す。仮定からある $\chi_E \in J^\infty$ と *unimodular* 関数があって、$I^\infty = \chi_E F J^\infty$ とできる。もし、$m(E) < 1$ なら、(c) から J^∞ は *doubly*-不変部分空間を含んでしまう。よって $I^\infty = FJ^\infty$ とできる。補題の g と

してこのFをとると、S^∞はH^∞のJ^∞-不変部分空間となりかつ仮定から$FS^\infty = S^\infty$とできる。もし$S^\infty \neq \{0\}$なら、仮定より、ある*inner*関数Gとある$\chi_F \in J^\infty$があり、

$$S^\infty = \chi_F G J^\infty 。$$

$\chi_F G \in \chi_F G J^\infty$と$\bar{F} S^\infty = S^\infty$より、$\chi_F G \bar{F} \in \chi_F G J^\infty$。よって$\chi_F \bar{F} = \chi_F g$となる$g \in J^\infty$がある。だから、$\chi_F = \chi_F F g$。$F \in I^\infty$から$Fg \in I^\infty$よって$\chi_F \in I^\infty$となる。特性関数に関しては$\chi_F \in \mathcal{L}^\infty$と$\chi_F \in J^\infty$は同値だから、$\chi_F \in \mathcal{L}^\infty$である。$\chi_F \in I^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$から、$\chi_F = 0$ *a.e.* となり、$S^\infty \neq \{0\}$に反する。よって$S^\infty = \{0\}$となり、(*f*)により$H^\infty = \mathbb{H}^\infty$となる。これは(2)である。

(*b*)の(4)に対応するH^∞の性質は何であり、その性質は定理2の(1)と同値となるかを考えるのは自然である。これは次の節にゆずる。

§3. H^∞を含む *subalgebra*

Aは$L^\infty(m)$の *weak-* Dirichlet algebra* とする。特に断わらない限りは、mを含む *Gleason part* はmのみであってもかまわない。

Muhly〔5〕は、$\forall f\in H^\infty$ なら $|f|>0$ a.e. であることと H^∞ が $L^\infty(m)$ の maximal な weak－＊閉 subalgebra であることが同値であることを示した。しかし、一般的には、H^∞ の恒等的に零ではない関数で、正測度の集合上で零である関数が存在する。よって H^∞ と $L^\infty(m)$ との間に、weak－＊閉な subalgebra が存在する。そんな subalgebra がどんな形をしているか、そして H^∞ の関数の support set とどのような関係にあるかを知りたい。

定理3　V は H^∞ を含む $L^\infty(m)$ の weak－＊閉な subalgebra とする。そのとき、次の事は同値である。

（1）　すべての $f\in V$ に対して、$\chi_f\in V$ 。

（2）　すべての $f\in H^\infty$ に対して、$\chi_f\in V$。

（3）　B が L^∞ の V を含む weak－＊閉 subalgebra ならば、ある $\chi_E\in V$ があって、次の形をしている。

$$B=\chi_E V+\chi_{E^c}L^\infty \ .$$

このとき、$\chi_E V$ は doubly－不変部分空間を含まない。

系　（Muhly〔5〕）　H^∞ についての次の性質は同値である。

（1）　すべての $f\in H^\infty$ に対して、$|f|>0$ a.e. 。

（2） H^∞ は L^∞ の *maximal* な *weak*－＊閉 *subalgebra* である。

<u>定理3の証明</u>　（1）⇒（2）は明らか。（2）⇒（3）。K を L^2 での B の直交補空間とする。$K \neq \{0\}$ としてよい。

E を K の *support set* とすると、$\chi_E \in V$ となる。何故なら、$H^\infty \subseteq B$ から、$K \subset \overline{H_0^2}$〔6、p226〕。$f \in H^2$ なら、H^∞ に関数 g があり、$\chi_f = \chi_g$ とできる〔5〕。よって $\forall f, g \in K$ ならば、$F = E_f \setminus E_g$ とすると、$\chi_F \in V$ である。$\chi_F B \subseteq B$ だから、$\chi_F K \subseteq K$ である。よって $h = g + \chi_F f$ は K に属する。これは、$\forall f, g \in K$ なら、関数 $h \in K$ で $E_h = E_f \cup E_g$ となるものがあることを示している。$F_\alpha \subseteq E$ かつ $\chi_{F_\alpha} \in V$ となる集合に対して、$F_0 = \bigvee F_\alpha$ とすると、$\chi_{F_0} \in V$ かつ $F_0 \subseteq E$。$m(F_0) = m(E)$ を導びくことができる。

$\chi_{E^c} K = \{0\}$ から、$B \supseteq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となる。E は K の *support set* であり、K は B の直交補空間であるから、$\chi_E V$ は *doubly*－不変部分空間を含まない。

今は、$B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となることを示す。$B \neq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ とする。そのとき、*Muhly*〔5〕のようにして、定数でない *unimodular* 関数 g で、g、$\bar{g} \in B$ だが $\bar{g} \notin \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となるものがある。このとき、$\chi_E \bar{g} \notin \chi_E V$ となっている。

Nをg、$\bar{g}$とVに属するすべての特性関数χ_Fの多項式のweak-*閉包とする。そのとき、NはL^2上の作用素の作るalgebraとして可換なvon Neuman algebraとなりBに含まれる。$\chi_E\bar{g}\notin V$によりVは$\chi_E N$の全体を含むことはできない。これを用いて、Nの中にχ_{E_0}があり、$\chi_{E_0\cap E}\neq 0$ a.e. かつ$\forall\chi_F\in V$かつ$\chi_F\neq 0$ a.e. のとき、

$$\chi_{E_0\cap E}\cdot\chi_F\neq\chi_F$$

とできることを示すことができる。$\chi_{E_0\cap E}\in B$から$\chi_{E_0\cap E}K\subseteq K$である。もし$\chi_{E_0\cap E}K\neq\{0\}$なら、$\chi_{E_0\cap E}\cdot\chi_{F_0}=\chi_{F_0}$となる零でない$\chi_{F_0}\in V$があることを示すことができる。この矛盾により、$\chi_{E_0\cap E}K=\{0\}$でなければならない。$m(E_0\cap E)>0$だからEがKのsupport setであることに反する。かくして、$B=\chi_E V+\chi_{E^c}L^\infty$となる。

(3)⇒(1)。fをVの任意の関数とする。$\chi_f\neq 0$ a.e. としてよい。$D=D(f)=\{f\cdot g : g\in V\}$のweak-*閉包とすると、$D\subseteq V$でDのsupport setは$E_f$と一致する。

$$B=\{v\in L^\infty : vD\subset D\}$$

とすると、BはVを含む。(3)の条件より、$\chi_f\in V$を導びくことができる。

もし、mを含むGleason partがmのみではないとすると、

VとしてJ^∞を考えることができる。J^∞は定理1よりH^∞を含む最小の*weak*−∗閉 *subalgebra* であった。
§2 の終りで触れた(b)の(4)に対応するH^∞の性質として定理3の(2)を考えるのは自然である。しかし、次の定理4と§4 の例(2)は、その条件が *torus* 上の$H^\infty(d\theta d\varphi)$の特長づけとはならないことを示している。

$\boxed{\text{定理4}}$　H^∞についての次の性質は同値である。

(1)　すべての$f\in H^\infty$に対して、$\chi_f\in J^\infty$。

(2)　BがL^∞のH^∞を含む*weak*−∗閉 *subalgebra* ならば、ある$\chi_E\in J^\infty$があって、次の形をしている。

$$B=\chi_E J^\infty+\chi_{E^c}L^\infty .$$

このとき、$\chi_E J^\infty$は*doubly*−不変部分空間を含まない。

$\boxed{\text{系}}$　もしすべての$f\in H^\infty$に対して、$\chi_f\in J^\infty$となっているなら、H^∞を含むL^∞のL^∞と一致しない*weak*−∗閉 *subalgebra* で、*maximal* なものはない。

§4. 例

（1） Aを§2の初めに定義した、*torus* 上の *weak*-* *Dirichlet algebra* とする。このとき、$d\theta d\varphi$を含む *Gleason part* は$d\theta d\varphi$のみではない。この$H^\infty(d\theta d\varphi)$は *Merrill* [3] が *maximal* でない *weak*-*閉 *subalgebra* の例として述べたものである。しかし、すべての$f\in H^\infty(d\theta d\varphi)$に対して、$\chi_f \in J^\infty$を示すことができるから、定理4によって$H^\infty(d\theta d\varphi)$を含む$L^\infty(d\theta d\varphi)$の *weak* − * 閉な *subalgebra* の形がわかる。更に、[1, *p* 303] によりAを含む *torus* 上の複素数値連続関数の全体$C(T^2)$の一様に閉な *maximal subalgebra* が存在するが、定理4の系により$H^\infty(d\theta d\varphi)$を含む$L^\infty(d\theta d\varphi)$の *weak*-*閉 *sub-algebra* の中に *maximal* なものはない。

（2） Kを実数直線の *Bohr* コンパクト化とする。Aを$T\times K$上で$z^n\chi_\tau$の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、χ_τはK上の *character* で、$(n,\tau)\in\Gamma$、$\Gamma=\{(n,\tau):\tau>0\}\cup\{(n,0):n\geq 0\}$であるとする。$m$を$T\times K$上の正規 *Haar* 測度とする。このとき、$m$の *Gleason part* は$m$のみではない。すべての$f\in H^\infty$に対して、$\chi_f\in J^\infty$を示すことができる。しかし、$H^\infty$は *torus* 上の$H^\infty(d\theta d\varphi)$に等距離同型ではない。

(3)　Kを(2)と同じとする。AをK×K上で$\chi_{\tau_1}\chi_{\tau_2}$の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、χ_{τ_i}はK上の character で、$(\tau_1, \tau_2)\in\Gamma$で、$\Gamma=\{(\tau_1, \tau_2): \tau_2>0\}\cup\{(\tau_1, 0): \tau_1\geq 0\}$であるとする。

mをK×K上の正規 Haar 測度とする。このとき、mの Gleason part はmのみである。

$V=\bigcup_{\tau_1\geq 0}\overline{\chi}_{\tau_1}H^\infty$ の weak-*閉包

とすると、$H^\infty \subsetneq V \subsetneq L^\infty(m)$ かつVは subalgebra である。よってH^∞は$L^\infty(m)$の maximal weak-*閉 subalgebra ではない。しかしすべての$f\in H^\infty$に対して、$\chi_f\in V$となっているから、定理3を用いて、Vを含むすべての weak-*閉な subalgebra の形がわかる。

文献

1.　K. Hoffman, Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Amer. J. Math., 79(1957), 295-305.

2.　G. Lumer, H^∞ and the imbedding of the classical H^p spaces in arbitrary ones, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras (Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III., 1966, 285-286.

3. S. Merrill, Maximality of Certain Algebras $H^\infty(dm)$, Math. Zeit., 106(1968), 261-266.

4. S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras, Pacific J. Math., 30(1969), 463-474.

5. P. S. Muhly, Maximal weak-*Dirichlet algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), 515-518.

6. T.P. Srinivasan and Ju-kwei Wang, Weak*-Dirichlet algebras, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras. (Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III., 1966, 216-249.