

## The Schur Multiplier Revisited

D. M. Goldschmidt

五味健作・記

この講演は飛び入りで行われたものである。内容は題名の示すように Schur multiplier を新しい視点から見直すというもので、新事実を含むものではない。30分という短い講演時間のため、紹介されたのは理論のさわりの部分だけである。以下、講義ノートをもとに講演の内容をまとめてみる。

$G$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}G$  でそれぞれ群, 有理整数環,  $G$  の  $\mathbb{Z}$  上の群環を表わす。  $g, h, \dots$  で  $G$  の元を表わす。  $\varepsilon$  を augmentation map:  $\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\Delta(G)$  を augmentation ideal ( $\Delta(G) = \ker \varepsilon$ ) とすれば、  $\Delta(G)$  は  $\{1-g \mid g \in G\}$  上の自由可換群である。

$\hat{g} = 1-g$  とおけば、

$$* \quad \hat{g}\hat{h} = \hat{g} + \hat{h} - \hat{gh}$$

が直ちに確かめられる。これは基本等式であり、以後の展開で重要な役割を演じる。\* を使って次の良く知られた補題が証明される。

補題。  $0 \rightarrow \Delta(G)^2 \hookrightarrow \Delta(G) \rightarrow G/G'$  は完全系列。  
 $\hat{g} \mapsto G'g$

$\Delta^{(2)}(G) = \Delta(G) \otimes_{\mathbb{Z}(G)} \Delta(G)$  とおき、  $\pi: \Delta^{(2)}(G) \rightarrow \Delta(G)$  を product map ( $\pi: \hat{g} \otimes \hat{h} \mapsto \hat{g}\hat{h}$ ) とし、  $M(G) = \ker \pi$  と定義する。  $\Delta$ 、  $\Delta^{(2)}$ 、  $M$  は群で定義され、可換群に値をとる functor である。また  $M(G)$  は自然に  $H_2(G, \mathbb{Z})$  と同型になる。  $\text{Im } \pi = \Delta(G)^2$  は自由可換群だから、  $M(G)$  は  $\Delta^{(2)}(G)$  の直和因子となる。

$A$  を自明な  $G$  加群、  $Z^2(G, A)$  を 2-cocycle、  $B^2(G, A)$  を 2-coboundary、  $H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A)$  とする。理論の "Main point" は次の補題である。

補題。  $f \in Z^2(G, A)$  とすれば  $\hat{f}(\hat{g} \otimes \hat{h}) = f(g, h)$  なる  $\hat{f}: \Delta^{(2)}(G) \rightarrow A$  があり、対応  $f \leftrightarrow \hat{f}$  は  $Z^2(G, A)$  と  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta^{(2)}(G), A)$  との同型を与える。さらに、  $f \in B^2(G, A)$  なるためには、ある  $\varphi: \Delta(G) \rightarrow A$  によって  $\hat{f} = \varphi \circ \pi$  となることが必要かつ十分。

これにより  $Z^2(G, A)$  と  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta^{(2)}(G), A)$  を同一視する。この同型から準同型  $\rho: H^2(G, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A)$  が得られる。

定理1。自然な完全系列

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G/G', A) \rightarrow H^2(G, A) \xrightarrow{\rho} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A) \rightarrow 0$$

が存在する。この完全系列は分解する。

とくに  $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{C}^*$  とすれば  $H^2(G, A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A)$  が得られる。

定義.  $R(G) = \{(x, g) \mid x \in \Delta^{(2)}(G), g \in G\}$  とし、 $R(G)$  の中に  $(x, g)(x_1, g_1) = (x + x_1 + \hat{g} \otimes \hat{g}_1, gg_1)$  により積を定義する。そのとき  $R(G)$  は群となる。 $\Delta^{(2)}(G)$  を  $\{(x, 1) \mid x \in \Delta^{(2)}(G)\}$  と同一視し、 $r(g) = (0, g)$  とおく。このとき、

$$0 \longrightarrow \Delta^{(2)}(G) \hookrightarrow R(G) \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は中心拡大であり、 $R(G) = \langle r(g) \mid g \in G \rangle$ 。

定理 2.  $(x, g)$  に  $\pi(x) + \hat{g}$  を対応させる  $R(G)$  から  $\Delta(G)$  への写像は群の全準同型であり、 $\ker = R(G)'$ 。

系.  $M(G) = \Delta^{(2)}(G) \cap R(G)'$ 。

定義. 中心拡大  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\tau} X \rightarrow G \rightarrow 1$  が essential であるとは  $\text{Im } \tau \subseteq X'$  なることをいう。 $\tilde{R}$  が  $G$  の representation group であるとは essential な中心拡大  $0 \rightarrow M(G) \rightarrow \tilde{R} \rightarrow G \rightarrow 1$  が存在することをいう。

系. 任意の  $G$  に対して、representation group が存在する。すなわち、 $\Delta^{(2)}(G) = M(G) \oplus K$  とすれば  $R(G)/K$  が  $G$  の representation group である。

定理 3.  $0 \rightarrow A \hookrightarrow X \rightarrow H \rightarrow 1$  を中心拡大とする。

$f: G \rightarrow H$  が準同型ならば、可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Delta^{(2)}(G) & \longrightarrow & R(G) & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \varphi & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H \longrightarrow 1
 \end{array}$$

で次の(1)(2)を満たすものが存在する。(1)  $f=1$  のときは

$\text{Im } \psi / M(G) = A \cap X'$  であり、 $A \subseteq X'$  ならば  $\varphi$  は onto であり、 $\varphi$  は  $G$  の rep. group を継由して得られる (factor through).

(2) もし  $E_{\mathbb{Z}}^1(G/G', A) = 0$  で  $\tilde{R}$  が  $G$  の rep. group なら、 $\varphi$  は  $\tilde{R}$  を継由するように選べる。

定理4.  $1 \rightarrow N \rightarrow F \xrightarrow{\rho} G \rightarrow 1$  を完全系列とせよ。中心拡大  $0 \rightarrow N/[N, F] \rightarrow F/[F, N] \rightarrow G \rightarrow 1$  が  $\alpha \in H^2(G, N/[N, F])$  に対応するとせよ。そのとき、

$$M(F) \xrightarrow{M(\varphi)} M(G) \xrightarrow{\rho(\alpha)} N/[N, F] \rightarrow F/F' \rightarrow G/G' \rightarrow 0$$

は完全系列である。