数理解析研究所講究録
233 巻 1975 年 1-8

Special involutions and B-conjecture
(Prof. Thompson の講演記録)

東大教養　近藤　武

Cambridge 大学の Thompson 教授は，1974年9月10，11日の両日にわたって京大数理研において開催された有限群論の研究集会において，上記の標題で講演された。その内容は，有限単純群の分類問題の最も基本的な部分に関係したものであり，講演は非常に格調高いものであった。しかるにその数学的内容の難解さのために（またそれを英語で聞かねばならぬと云う理由も加えて）その講演内容をこゝで再現することは筆者には不可能である。くわしくは講演に際し Thompson 教授の作られた講演原稿のコピーが東大 阪大 北大等の主要大学に存在するので興味のある方はそれを見て頂くことにして，こゝでは，問題の意味の解説を簡単に記すにとどめる。

§1 B-conjecture.

いくつかの言葉の定義から始める。X を有限群とするとき通常のように

$X' =$ X の交換子群

$Z(X) =$ X の中心

$O(X) =$ X の最大の奇数位数正規部分群

とする。他にも慣用の記号は、断りなしに用いる。

(1) X : quasi-simple $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $X' = X$

(ii) $X/Z(X) =$ nonabelian simple

(2) X : semi-simple $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $X = X_1 X_2 \cdots X_n$

(ii) X_i quasi-simple

(iii) $[X_i, X_j] = 1$ $(i \neq j)$

便宜上 単位群も quasi-simple, semi-simple group の仲間に入れる。

(3) 任意の有限群 X に対して、極大 semi-simple normal subgroup が只一つ存在する。それを $E(X)$ で表わす:

$$E(X) = X の最大の \text{ semi-simple } 正規部分群.$$

(4) semi-simple な群の準同型像は、semi-simple であるから、

$$E(X/O(X)) \supseteq E(X)O(X)/O(X)$$

は、明らかである。しかし一般には、等号は明らかに成立しない。

さて G を偶数位数の群、C を G の involution の中心化群 (i.e. $C = C_G(t)$, $t =$ involution) とするとき、

$$(*) \quad O(G)=1 \implies E\left(C/O(C)\right) = \frac{E(C)O(C)}{O(C)}$$

が成り立つか?. これが,標題の B-conjecture の実質的内容である。B-conjecture の正確な定式化は,後に述べる。既知の単純群では,もちろん(*)は成立しており,実例では,$O(C)$ の構造とか,$O(C)$ の C における embedding に関しては,(*)よりは,はるかに強いことが成立っている。一般の有限単純群の構造の分析において,実例で見られるよりもはるかに弱い(*)が成り立つかどうかを確めることが,議論を進行させ得るための最低の条件であることが,近年の Aschbacher, Gorenstein-Walter の仕事から見られる。とくに,Aschbacher は,(*)のもとで単純群のある involution に対して,その中心化群の性質をみごとに記述する一つの結果を 札幌における会で報告している.

(5) B-conjecture. 定義を続ける。有限群 X に対し,
$L_0(X)$ を

$$\frac{L_0(X)}{O(X)} = E\left(X/O(X)\right)$$

によって定義し,

$$L(X) = L_0(X)^{\infty}$$

とおく。こゝで $L_0(X)^{\infty}$ は $L_0(X)$ の交換子群列の極限である:

$$L_0(X)^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_0(X)^{(i)}$$ ($L_0(X)^{(i)}$ = $L_0(X)$ の i 番目の交換子群)

明らかに

$$L_0(X) = L(X)\,l(X)$$

であり, (*)における (*) は,

" $l(G)=1 \Rightarrow E(C)=L(C)$ "

なる命題と同値である。さらに

$$B(X) = L(C_X(E(X)))$$

とおくと, 容易に分るように

$$L(X)=E(X)B(X) \quad , \quad E(X)\cap B(X) \leq Z(E(X))$$

である。したがって, $B(X)$ は $L(X)$ の "non-semi-simple part" と見ることが出来る。さて B-conjecture とは

" G : 偶数位数の群

T : G の 1 でない位数 2 巾の部分群

このとき $B(C_G(T)) \subseteq B(G)$ であるか? "

なる命題をいう。$O(G)=1$ ならば $B(G)=1$ であり, したがって B-conjecture が真ならば, $L(C_G(T)) = E(C_G(T))$ となり とくに, (*)の(*)が成立する。次の§でふれるように, Thompson 教授は, 現在この B-conjecture の証明を試みられている最中であるが, 先に進むまえに次の Gorenstein-Walter の定理 ([2] Th 3.1) に注意して欲しい。

" G, T を上の通りとするとき, $L(C_G(T)) \subseteq L(G)$。"

とくに $B(C_G(T)) \subseteq E(G)B(G)$ が成り立つ。したがって

上記 B-conjecture は この Gorenstein-Walter の定理の非常に強い精密化と考えられる。この G-W の定理は, B-conjecture に比べはるかに弱い結果であるとはいえ, 有益な結果であり証明体難しくはない。

§2. Special involutions.

(1). 群 G の involution (j) が special とは,

$$m\left(C_G(F(O(C_G(j))))\right) = 1$$

なることを云う。ここで $m(X)$ は, X の 2-rank を表わし, $F(X)$ は X の Fitting 部分群である。
$m(X)=1$ は X の 2-Sylow 群が 巡回群または一般四元数群であることを意味することに注意してほしい。

(2) $\mathcal{S}$ を次の性質をもつ有限群のクラスとする:

$$\mathcal{S} \ni G \iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & G = G'\langle j\rangle \\ \text{(ii)} & j : \text{special in } G \\ \text{(iii)} & G' : \text{quasi-simple} \end{array}$$

次の命題を S-conjecture と云う:

> (S)-conjecture.
>
> $\mathcal{S} \ni G$ は次の群の一つであるか?
>
> I　$G/O(G) \cong PGL_2(q)$,　q odd >3,
>
> II　$G/O(G) \cong PSL_2(q)$,　q odd　$q \equiv \varepsilon \bmod 4$

$\varepsilon = \pm 1 \quad q-\varepsilon \neq 2^n$

III	$G/O(G) \cong PSL_3(4)\langle t\rangle$	t は unitary involution
IV	$m(G) = 1$.	

(3). G を B-conjecture に対する minimal counter example とするとき，比較的容易な reduction と Aschbacher による tightly embedded subgp をもつ群に関する結果 ~~故~~によって $G \in \mathcal{S}$ が分る。~~をある群に対するとは~~ 上の4つの Type の群に対しては，B-conjecture は真であるから，結局 B-conjecture は上記 S-conjecture に帰着されたことになる。講演では，この S-conjecture の現在試みられている証明の方針を解説されたのであるが，それをここで再現することは出来ないので，興味のある方は最初に述べた Thompson 教授の手書きの原稿のコピーを参照して頂きたい。

§3. 最後に Thompson 教授の講演内容とは関係無いのであるが，§1 (4) でふれた Aschbacher 教授の結果について簡単に述べる。一般に

G : a group of component type

$\overset{\Longleftrightarrow}{\scriptstyle def}$ $\exists t$ involution of G s.t.

$$E\left(C_G(t)/O(C_G(t))\right) \neq 1.$$

component type の有限単純群の実例において次の事実を見るのは易しい：（G はそのような実例）

$$\exists A : \text{quasi-simple subgroup of } G \text{ s.t.}$$

(i) $|C_G(A)| = \text{even}$

(ii) $C_G(A)$ の各 involution $\underline{a}$ に対して $E(C_G(a)) \triangleright A$.

（実際 t を G の involutions を動かして、$E(C_G(t))$ の components 達の中で位数最大のものを見よ！ 容易に (i) (ii) が検証される。）

さて、Aschbacher は、[1] §9 において、"偶数位数の群 G が §1 (4) の (*) をみたせば G は上の (i) (ii) をみたす A をもつ。" を証明した。この命題は、[1] の主定理 (Th 1) の部分的主張であるが、これだけでも注目すべき結果と云える。さらにこの命題の証明はむしろ elementary であることにも注目すべきである。すなわち §1 で定義した $E(X)$, $L(X)$ $F^*(X) = F(X)E(X)$ などの基本性質にもとずくものであって、"高級な" 群論は、全然必要ない。[1] の §2 と §9 の一読をおすゝめする。このように、$E(X)$, $L(X)$, $F^*(X)$ の基本性質は、これからの群論の理解のために必修であるように見えるので（上の Aschbacher の結果のほかにも、Bender の abelian paper, Goldschmidt の 2-fusion paper などが重要

な応用例である），下記の［1］§2，［2］§1～§3をお読みになることをおすゝめする。最後に云うまでもないことであるが，上に述べたAschbacherの結果を見ても，B-conjectureが有限単純群論の基本的部分にかかわっているかは，御理解頂けると思う。

[1]. M. Aschbacher : a Group of Component type
[2] D. Gorenstein and J. Walter : Balance and Generation in Finite Groups.

いずれもpreprintが存在する。