

## 2次元出口付近の粘性流体の流れ

慶大物理 杉信八<sup>†</sup>男

1. 序論 管またはみぞの中の粘性流体の定常な流れを調べる場合、境界の形状に応じて流速分布や圧力勾配が典型的なポアズイユ流からどれほどずれるかを知らることが基本的に重要である。外部領域から一様な断面積または幅をもつ管路内に流体が流れ込む場合は、入口流の問題としてこれまでに多くの研究がなされている<sup>1), 2)</sup>。その際、ほとんどが外部の条件とは無関係に管路の入口において流速分布が一様であると仮定し、ポアズイユの速度分布に十分近づくためにはどれほどの入口距離 (inlet length) が必要であるかを評価する目的で解析が行なわれている。レイノルズ数が1に比べて十分小さければ、慣性項を無視したストークス方程式が使え、流れの可逆性から出口流と入口流を区別する必要はない。そう考えると、管路の入口で一様な流入速度分布を仮定することは、出口流の場合に出口で一様な流出速度分布を仮定したことに

なり，不自然と言わなければならぬ。

ここでは，管路から垂直に半無限領域に流出する粘性流体の運動を解析する。とくに出口においてポアズイユ流速分布からどれほどずれるかと逆似的に見積る方法について述べる。

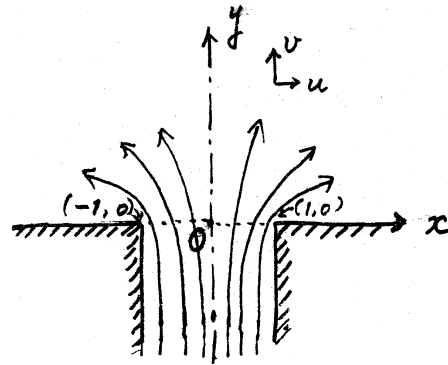


図 1. 2次元出口付近の流れ

## 2. 問題設定と解析の概要

流れの場を2次元と仮定し，幅2の管路から半無限領域に流れ出る粘性流体の定常流を以下のように解析する。図1に示すように， $x, y$ 座標軸をとり，対応する速度成分を $(u, v)$ とする。管路 $(|x| \leq 1, y \leq 0)$ の無限上流 $(y = -\infty)$ では流速はポアズイユの速度分布をとり，無限の下流 $(y \geq 0, x^2 + y^2 = \infty)$ では流速は0になるものと仮定する。すなわち，境界条件は

$$y > 0, \quad x^2 + y^2 = \infty \quad \text{で} \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (2.1)$$

$$y = 0, \quad |x| \geq 1 \quad \text{で} \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (2.2)$$

$$y \leq 0, \quad |x| = 1 \quad \text{で} \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (2.3)$$

$$y = -\infty, \quad |x| < 1 \quad \text{で} \quad u = 0, \quad v = \frac{3}{2}Q(1-x^2) \quad (2.4)$$

と書くことができる。(2.4)の $Q$ は定数で，管内流量の1/2を与える。さらに，流れの場は $y$ 軸に関して対称である：

$$u(-x, y) = -u(x, y), \quad v(-x, y) = v(x, y) \quad (2.5)$$

ことを要求する。

流れがいたるところ十分遅く、慣性の効果を無視すれば、流れの場はストークス方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \nabla^2 u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \nabla^2 v \quad (2.7)$$

によって支配される。ここで、 $\nabla^2 \equiv (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2$ 、 $p$  は圧力、 $\mu$  は粘性率である。周知のまじりに、(2.6) の代わりに

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.8)$$

となるような流れの関数  $\psi(x, y)$  を導入するのが便利である。そうすれば (2.7) は

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.9)$$

と書くことができる。渦度の唯一の成分  $\omega$  は

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\nabla^2 \psi \quad (2.10)$$

で与えられる。

条件 (2.1) ~ (2.4) を  $\psi$  を用いて書きかえ、それを境界条件として方程式 (2.9) を解けば問題は解決されたことになる。しかし、図1のように流れの場を制限する境界が角をもつ場合、(2.9) を解くことは一般的に極めて困難である。ここでは、以下に述べる方法にしたがって、近似的な解を求めるこ

とにする。

まず、出口 ( $|x| < 1, y = 0$ ) における流速  $u(x, 0), v(x, 0)$  を適当に仮定する。これと、(2.1) および (2.2) を境界条件として上半面 ( $y \geq 0$ ) の流れを決定する。§3 で述べるようにこれは比較的容易である。このようにして得られた解から、 $u(\pm 1, y), v(\pm 1, y)$  ( $y \geq 0$ ) を知るであろう。

つぎに、幅が2で  $y$  軸の方向に無限に長い管路 ( $|x| \leq 1, -\infty < y < \infty$ ) と考え、その内部の流れ  $\tilde{u}, \tilde{v}$  を決定する (§4)。そのとき、 $y \leq 0$  では境界条件 (2.3) と (2.4) を、 $y \geq 0$  では条件

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(\pm 1, y) &= u(\pm 1, y), \quad = \pm U(y) \\ \tilde{v}(\pm 1, y) &= v(\pm 1, y), \quad = V(y) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

を用いる。言いかえれば、この仮想管路の上流側 ( $y \leq 0$ ) は実在の固体壁をもつが、下流側 ( $y > 0$ ) では吸い込みとすり (slip) が連続的に分布するような仮想的な壁をもつものと考えるのである。したがって無限上流ではポアズイユ流であるが、下流にくると壁から流体がしみ出して、無限遠では静止することになる。

このようにして求めた解から、出口の流速  $\tilde{u}(x, 0), \tilde{v}(x, 0)$  を再評価すると、はじめに仮定した  $u(x, 0), v(x, 0)$  と異なるものになるであろう。しかし、もしはじめに適当な  $u(x, 0), v(x, 0)$  を仮定すれば、 $\tilde{u}(x, 0), \tilde{v}(x, 0)$  はそれらに十分近

くなるものと予想するのである。さらに精度をあげようと思えば、 $\tilde{u}(x, 0)$ ,  $\tilde{v}(x, 0)$  から出発して前述の手続きを繰返せばよいであろう。出口の流速を  $|x| \leq 1$  で直交関数系を用いて展開することにより、それが可能となることを以下に示そう。

### §3. 上半面におけるストークスの解

出口における速度を

$$u(x, 0) = g(x), \quad v(x, 0) = h(x) \quad |x| < 1 \quad (2.1)$$

とおく。  $g(x)$ ,  $h(x)$  はそれぞれ  $x$  の奇関数および偶関数で、さし当り与えられた関数と見なす。そうすれば、上半面の流れの場は (2.1), (2.2) および (3.1) を境界条件として、ストークス方程式 (2.9) を解けば得られる。そのために、フーリエ変換を使うのが有利である。ここでは、任意の関数、たとえば  $\psi(x, y)$  のフーリエ変換  $\bar{\psi}(\xi, y)$  を

$$\bar{\psi}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) e^{i\xi x} dx \quad (3.2)$$

のように定義する。そうすれば、逆変換は

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (3.3)$$

で与えられる。ストークス方程式 (2.9) を変換されて

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \xi^2\right)^2 \bar{\psi}(\xi, y) = 0 \quad (3.4)$$

となる<sup>3)</sup>。この一般解は

$$\psi(\xi, y) = (A + yB)e^{-|\xi|y} + (C + yD)e^{|\xi|y} \quad (3.5)$$

で与えられる。ここで、 $A, B, C, D$  は $\xi$  の任意関数である。

$g(x), h(x)$  のフーリエ変換を  $G(\xi), H(\xi)$  とすれば、境界条件 (3.1) のフーリエ変換は

$$[\partial\psi/\partial y]_{y=0} = G(\xi)$$

$$i\xi\psi(\xi, 0) = H(\xi)$$

となる。これと、 $y \rightarrow \infty$  で  $\psi$  が有限であることとを考慮すれば  $A, B, C, D$  は次のように決定される:

$$A = -iH(\xi)/\xi, \quad B = G(\xi) - i|\xi|H(\xi)/\xi$$

$$C = D = 0$$

これらと (3.5) に代入し、逆変換 (3.3) を施せば

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [yG(\xi) - \frac{i}{\xi}(1 + |\xi|y)H(\xi)] e^{-|\xi|y - i\xi x} d\xi \quad (3.6)$$

が得られる。さらに、たたみこみの定理を使えば (3.6) は

$$\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{y^2 g(t)}{(x-t)^2 + y^2} - h(t) \left\{ \tan^{-1} \frac{x-t}{y} + \frac{(x-t)y}{(x-t)^2 + y^2} \right\} \right] dt \quad (3.7)$$

となる (付録 I)。

速度成方は (2.8) にしたがって (3.7) を微分すれば得られる:

$$u = \frac{2y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(x-t)g(t) + y h(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^2} (x-t) dt \quad (3.8)$$

$$v = -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(x-t)g(t) + y h(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^2} dt \quad (3.9)$$

これらの式は一見、すべての  $x$  に対して  $y \rightarrow 0$  で  $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0$  となるように思われるが、実際はそうはならない。また、圧力および渦度は (2.7) と (2.10) を使って

$$p = \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{2(x-t)yg(t) - [(x-t)^2 - y^2]h(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^2} dt \quad (3.10)$$

$$\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[y^2 - (x-t)^2]g(t) - 2(x-t)yh(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^2} dt \quad (3.11)$$

で表わされる。

座標  $x, y$  の代わりに複素変数

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

を導入すれば、2次元のストークスの解はもっと簡単な表式で表わされ、とくに、 $p - i\mu\omega$  は  $z$  だけの解析関数で与えられることが知られている<sup>4)</sup>。実際、(3.10) と (3.11) は

$$p - i\mu\omega = \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ig(t) - h(t)}{(z-t)^2} dt \quad (3.12)$$

の形にまとめられ、このことが確認される。出口の角のところでもすべりなしの条件が成立することを要求すれば

$$g(\pm 1) = h(\pm 1) = 0 \quad (3.13)$$

となるので、部分積分の結果、(3.12)は

$$p - i\omega c = \frac{2u}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{-ig'(t) + h'(t)}{z-t} dt \quad (3.14)$$

と書くことができる。ただし、 $g'$ 、 $h'$ は $t$ に関する微分を意味する。式(3.14)は Neumann の公式<sup>5)</sup>

$$Q_n(z) = \frac{1}{z} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt \quad (3.15)$$

が利用できることを示唆する。ここで  $P_n(t)$  は  $n$  次のルジャンドルの多項式、 $Q_n(z)$  は第2種ルジャンドル関数であり(付録II)、 $z$  が区間  $[-1, 1]$  の外の複素数値をとるときにこの公式は有効である。

対称性(2.5)および条件(3.13)を考慮して、 $g(x)$ 、 $h(x)$ が

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \alpha_3 C_3(x) + \alpha_5 C_5(x) + \dots \\ h(x) &= \alpha_2 C_2(x) + \alpha_4 C_4(x) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

のよりに展開されるものとしよう。ここで  $\alpha_n$  は定数であり、 $C_n(x)$  は  $n$  次の Gegenbauer の多項式であり、 $C_n^{-1/2}(x)$  と書かれるものの略号である(付録II)。とくにルジャンドル多項式  $P_n(x)$  とは  $n \geq 2$  の場合、

$$C_n(x) = \int_x^1 P_{n-1}(t) dt \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{2n-1} [P_{n-2}(x) - P_n(x)] \quad (3.18)$$



の関係式で結ばれている。(3.17)はまた、 $C_n'(z) = -P_{n-1}(z)$ とも書けるので、(3.16)の両式を $z$ で微分して(3.14)に代入し、さらに公式(3.15)を利用すれば、(3.14)は積分されて

$$\rho - i\mu c_0 = \frac{4\mu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [-\alpha_{2n} Q_{2n-1}(z) + i\alpha_{2n+1} Q_{2n}(z)] \quad (3.19)$$

が得られる。

式(3.16)のよき展開はこのよき解析的に扱えるべき形式と等しくなく、 $h(x)$ の展開の第1項が $\alpha_2 C_2(x) = \frac{1}{2}\alpha_2(1-x^2)$ となつてポアソン分布の流速分布を与えるという利点がある。

実際、(3.17)、(3.18)から

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 C_n(t) dt &= \frac{1}{2n-1} \int_{-1}^1 [P_{n-2}(t) - P_n(t)] dt \\ &= \frac{1}{2n-1} [-C_{n-1}(t) + C_{n+1}(t)]_{-1}^1 = \begin{cases} \frac{2}{3} & (n=2) \\ 0 & (n \geq 3) \end{cases} \end{aligned}$$

となるので、流量に関するものは $h(x)$ の展開の第1項のポアソン分布流だけである。したがって、

$$\alpha_2 = 3Q \quad (3.20)$$

である。

さて、速度成分 $u, v$ も複素数 $z, \bar{z}$ で表示できることか

さて、

$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_{2n+1} y \operatorname{Re} Q_{2n}(z) - \alpha_{2n} y \operatorname{Im} Q_{2n-1}(z) - \frac{\alpha_{2n+1}}{4n+1} \operatorname{Im} \{ Q_{2n-1}(z) - Q_{2n+1}(z) \} \right] \quad (3.21)$$

$$v = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_{2n+1} y \operatorname{Im} Q_{2n}(z) + \alpha_{2n} y \operatorname{Re} Q_{2n-1}(z) + \frac{\alpha_{2n}}{4n-1} \operatorname{Im} \{ Q_{2n-2}(z) - Q_{2n}(z) \} \right] \quad (3.22)$$

となる。上式中、 $\operatorname{Re}$ ,  $\operatorname{Im}$  はそれぞれ実数部分および虚数部分をとることを意味する。

$z \rightarrow \infty$  のとき、 $Q_n(z)$  は  $0$  に収束し

$$Q_n(z) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} z^{-n-1} + O(z^{-n-3})$$

となるので、出口における流速  $\alpha_n C_n(x)$  のうち無限遠でもっとも卓越した効果を持つのは  $n=2$  のポアズイユ分布であることに注意したい。

#### 4. 仮想管路内のストークスの解

さて、 $y$  軸に沿って無限に長い幅  $2$  の仮想管路内の流れの場合、 $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  を決定することを考えよう。  $y > 0$ ,  $|x| = 1$  における境界条件 (2.11) および  $y < 0$ ,  $|x| \leq 1$  における境界条件 (2.3), (2.4) と完全に満たすストークスの解を求める前に、出口の角にあたる点  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$  に 1 対の点吸い込み (point sink) と、1 対の点すべり (point slip) が対称におかれた場合の剛体管路内の二次元の流れと決定しよう。その際、残りの壁面上ではいたるところ粘着の条件を満たすようにする。吸い込みの流量は左右ともに  $Q$  であるとすると、

$y = \pm \infty$  では  $y = 0$  に何かし反対向きのポアズアイユ速度分布をとることになる (図 2)。すなわち境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(\pm 1, y) &= \pm U_0 \delta(y) \\ \tilde{v}(\pm 1, y) &= V_0 \delta(y) \end{aligned} \right\} (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(x, \pm \infty) &= 0 \\ \tilde{v}(x, \pm \infty) &= \mp \frac{3}{4} Q (1-x^2) \end{aligned} \right\} (4.2)$$

(複号同順)

で表わされる。ここで,  $U_0, V_0$  は定数,  $\delta(y)$  は Dirac のデルタ関数で,  $y \neq 0$  では  $\delta(y) = 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0 \delta(y) dy = Q$$

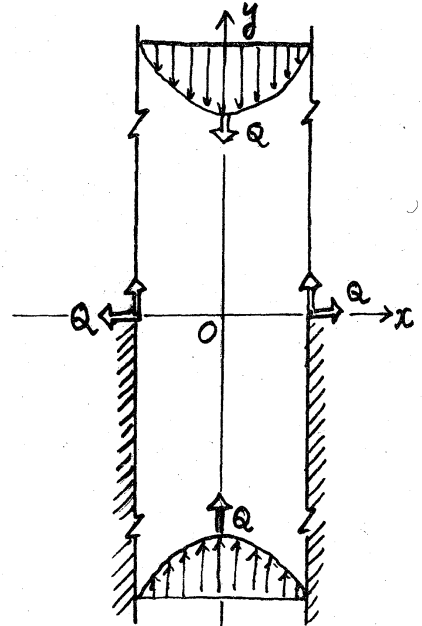


図 2 点  $(\pm 1, 0)$  に点吸い込みと点すべりのあるときの管路の流れ (4.3)

とあると定義する。

境界条件のうち (4.1) だけと考慮し, 任意の関数, たとえば  $\tilde{\psi}(x, y)$  の  $y$  方向のフーリエ変換

$$\tilde{\Psi}(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(x, y) e^{i\xi y} dy$$

(4.4)

およびその逆変換

$$\tilde{\psi}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(x, \xi) e^{-i\xi y} d\xi$$

を使ってこの問題はつぎのように解決される。今度はストークス方程式 (2.9) および境界条件 (4.1) の変換は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \xi^2\right)^2 \tilde{\Psi}(x, \xi) = 0 \quad (4.5)$$

$$-i\xi \tilde{\Psi}(\pm 1, \xi) = \pm Q, \quad -[\partial \tilde{\Psi} / \partial x]_{x=\pm 1} = V_0 Q / U_0 \quad (4.6)$$

となる。(4.5)の解は

$$\tilde{\Psi}(x, \xi) = [\tilde{A} + x\tilde{B}] \sinh \xi x + [\tilde{C} + x\tilde{D}] \cosh \xi x \quad (4.7)$$

の形に書くことができる。 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ は $\xi$ の任意関数であり、(4.6)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{Q}{U_0} \frac{iU_0(\xi \sinh \xi + \cosh \xi) + 2V_0 \xi \cosh \xi}{\xi(\sinh 2\xi - 2\xi)} \\ \tilde{D} &= \frac{Q}{U_0} \frac{-iU_0 \cosh \xi - 2V_0 \sinh \xi}{\sinh 2\xi - 2\xi} \\ \tilde{B} &= \tilde{C} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

のように決定できる。(4.8)を(4.7)に代入し、逆変換(4.4)を施せば $\tilde{\psi}(x, y)$ が得られるが、前節で述べたように積分を単純化することはできない。それは $\tilde{A}, \tilde{D}$ の分母にある $\sinh 2\xi - 2\xi$ に原因がある。しかし、 $y \rightarrow \pm\infty$ の解の挙動から、境界条件(4.2)が自動的に満足されていることが確かめられる。

われわれは $y = +\infty$ で静止し、 $y = -\infty$ で $y$ の正の向きに流量 $2Q$ のポアズイユ流になる解を要求する。そのためには、上で求めた解に、 $y$ の正の向きに流量 $Q$ のポアズイユ流を重ね合わせればよい。すなわち、 $\tilde{\psi}$ および $\tilde{v}$ の逆変換の式にそれぞれ $-\frac{3}{4}Qx(1-\frac{x^2}{3})$ および $\frac{3}{4}Q(1-x^2)$ を加えればよい。

さらに、仮想壁面 ( $y > 0, |x| = 1$ ) 上に吸い込みとすばりと対称に分布させて、しかも境界条件 (2.3), (2.4) および (2.11) と同時に満たすような流れを求めることは容易である。すなわち、上述の解に含まれる定数  $U_0, V_0$  を  $y$  の連続関数  $U(y), V(y)$  に置き換え、さらに  $Q = U(y) \delta y$  とおけば、解の形は  $U(y) \delta y$  および  $V(y) \delta y$  と  $x, y$  の関数との積の和で表わされよう。そこで、特異点の位置を  $x = \pm 1, y = \eta$  ( $\eta > 0$ ) に移しておいて、 $\eta$  について 0 から  $\infty$  まで積分すればよい。結局、境界条件 (2.3), (2.4) および (2.11) と完全に満たすストークスの解は、 $U$  を含む 'しみ出し' の解 (I) と、 $V$  を含む 'すばり' の解 (II) とに別けて以下のまうに与えられる。

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_I + \tilde{\psi}_{II} \quad (4.9)$$

$$\tilde{\psi}_I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\eta) \sin \xi (y - \eta) d\eta \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} F_I(\xi, x) d\xi - \frac{3}{4} Q x \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \quad (4.10)$$

$$\tilde{\psi}_{II} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} V(\eta) \cos \xi (y - \eta) d\eta \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} F_{II}(\xi, x) d\xi \quad (4.11)$$

$$\tilde{u} = \tilde{u}_I + \tilde{u}_{II} \quad (4.12)$$

$$\tilde{u}_I = \frac{\partial \psi_I}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\eta) \cos \xi (y - \eta) d\eta \int_0^{\infty} F_I(\xi, x) d\xi \quad (4.13)$$

$$\tilde{u}_{II} = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial y} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} V(\eta) \sin \xi (y - \eta) d\eta \int_0^{\infty} F_{II}(\xi, x) d\xi \quad (4.14)$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}_I + \tilde{v}_{II} \quad (4.15)$$

$$v_I = -\frac{\partial \psi_I}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\eta) \sin \xi (y - \eta) d\eta \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \frac{\partial F_I}{\partial x} d\xi + \frac{3}{4} Q (1 - x^2) \quad (4.16)$$

$$v_{II} = -\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} V(\eta) \cos \xi (y-\eta) d\eta \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \frac{\partial F_{II}}{\partial x} d\xi \quad (4.17)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_I + \tilde{p}_{II} \quad (4.18)$$

$$\tilde{p}_I = -\frac{4\mu}{\pi} \int_0^{\infty} U(\eta) \cos \xi (y-\eta) d\eta \int_0^{\infty} G_I(\xi, x) d\xi - \frac{3}{2} \mu Q y \quad (4.19)$$

$$\tilde{p}_{II} = \frac{4\mu}{\pi} \int_0^{\infty} V(\eta) \sin \xi (y-\eta) d\eta \int_0^{\infty} G_{II}(\xi, x) d\xi \quad (4.20)$$

ここで、

$$F_I(\xi, x) = \frac{2[(\xi \sinh \xi + \cosh \xi) \sinh \xi x - \xi x \cosh \xi \cosh \xi x]}{\sinh 2\xi - 2\xi} \quad (4.21)$$

$$F_{II}(\xi, x) = \frac{2\xi [\cosh \xi \sinh \xi x - x \sinh \xi \cosh \xi x]}{\sinh 2\xi - 2\xi} \quad (4.22)$$

$$G_I(\xi, x) = \frac{\xi \cosh \xi \cosh \xi x}{\sinh 2\xi - 2\xi} \quad (4.23)$$

$$G_{II}(\xi, x) = \frac{\xi \sinh \xi \cosh \xi x}{\sinh 2\xi - 2\xi} \quad (4.24)$$

であり、 $\xi$  の値によらず  $F_I(\xi, \pm 1) = \pm 1$ ,  $F_{II}(\xi, \pm 1) = 0$  に注目する必要がある。これによって  $|x|=1$  における境界条件 (2.3), (2.11) が保証されるからである。また、 $y \rightarrow -\infty$  とすると、 $u_I, u_{II}, v_{II}$  はいずれも 0 に収束するが、 $v_I$  は  $\frac{3}{2} Q(1-x^2)$  に近づき、境界条件 (2.4) も満たされていることが確認される。

## 5. 出口における速度分布の近似計算

これまでに導かれた結果を利用して，§3 の展開式 (3.16) の係数  $\alpha_n$  をすべて決定できれば問題は解決されたことになる。ここでは簡単のため，出口において純粹なポアズイユの速度分布をとるものと仮定し，§3 の結果から  $U(y)$ ,  $V(y)$  と導いて §4 の  $\tilde{u}_I$ ,  $\tilde{u}_{II}$ ,  $\tilde{v}_I$ ,  $\tilde{v}_{II}$  を計算することにする。その結果得られた  $\tilde{u}(x, 0)$ ,  $\tilde{v}(x, 0)$  とはじめに仮定したポアズイユの速度分布との差が十分小さいことを示し，それらをポアズイユ速度分布に対する零次近似とみなすことにしよう。

前節で求めた二重積分表示による解は， $U(\eta)$ ,  $V(\eta)$  が与えられれば， $\eta$  についての定積分は実行可能であり，解析関数で表わすことができる。まず，

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) = 0 \\ v(x, 0) &= h(x) = \alpha_2 C_2(x) \end{aligned} \right\} (5.1)$$

から出発し，(3.21), (3.22) から上半面における速度成分  $u$ ,  $v$  を求めると，

$$u = \frac{\alpha_2}{\pi} y \left[ x \left( \tan^{-1} \frac{x+1}{y} - \tan^{-1} \frac{x-1}{y} \right) - \frac{y}{2} \log \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \right] \quad (5.2)$$

$$v = \frac{\alpha_2}{\pi} \left[ y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) \left( \tan^{-1} \frac{x+1}{y} - \tan^{-1} \frac{x-1}{y} \right) \right] \quad (5.3)$$

また，圧力  $p$  は (3.23) から

$$p = -\frac{4\mu}{\pi} \alpha_2 \left[ \frac{x}{4} \log \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{2} y \left( \tan^{-1} \frac{x+1}{y} - \tan^{-1} \frac{x-1}{y} \right) - 1 \right] \quad (5.4)$$

と作り,  $y = 0$  とおくと

$$p(x, 0) = \frac{4\mu}{\pi} \alpha_2 \left[ 1 - \frac{x}{2} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right] \quad (5.4')$$

と作るので, 出口の角のところでは  $p = -\infty$  と作ることもわかる。

(5.2), (5.3) で  $x=1, y=\eta$  とおけば

$$U(\eta) = \frac{\alpha_2}{\pi} \eta \left[ \tan^{-1} \frac{2}{\eta} - \frac{1}{2} \eta \log \left( 1 + \frac{4}{\eta^2} \right) \right] \quad (5.5)$$

$$V(\eta) = \frac{\alpha_2}{\pi} \left[ \eta - \frac{1}{2} \eta^2 \tan^{-1} \frac{2}{\eta} \right] \quad (5.6)$$

が得られ, これを (4.12) ~ (4.17) に入れて  $\tilde{u}, \tilde{v}$  を求めることができる。そのとき,

$$\left. \begin{aligned} U_c(\xi) &= \int_0^\infty U(\eta) \cos \xi \eta d\eta, & U_s(\xi) &= \int_0^\infty U(\eta) \sin \xi \eta d\eta \\ V_c(\xi) &= \int_0^\infty V(\eta) \cos \xi \eta d\eta, & V_s(\xi) &= \int_0^\infty V(\eta) \sin \xi \eta d\eta \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

は下記のように計算される:

$$U_c(\xi) = \alpha_2 \left[ \frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{2\xi^2} - \left( \frac{1}{\xi^3} + \frac{3}{2\xi^2} + \frac{1}{\xi} \right) e^{-2\xi} \right] \quad (5.8)$$

$$U_s(\xi) = \frac{\alpha_2}{\pi} \left[ (\gamma + \log 2\xi) \frac{2}{\xi^3} + \frac{3}{\xi^2} E_s(2\xi) - \left( \frac{2}{\xi^3} + \frac{2}{\xi} \right) E_c(2\xi) \right] \quad (5.9)$$

$$V_c(\xi) = \frac{\alpha_2}{\pi} \left[ -\frac{2}{\xi^2} - \left( \frac{1}{\xi^3} + \frac{2}{\xi} \right) E_s(2\xi) + \frac{2}{\xi^2} E_c(2\xi) \right] \quad (5.10)$$

$$V_s(\xi) = \alpha_2 \left[ \frac{1}{2\xi^3} - \left( \frac{1}{2\xi^3} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} \right) e^{-2\xi} \right] \quad (5.11)$$



ここで,  $E_c(x)$ ,  $E_s(x)$  は積分指数関数  $\overline{Ei} x$ ,  $Ei(-x)$  から

$$E_c(x) = \frac{1}{2} [e^x Ei(-x) + e^{-x} \overline{Ei} x] \quad (5.12)$$

$$E_s(x) = \frac{1}{2} [e^x Ei(-x) - e^{-x} \overline{Ei} x] \quad (5.13)$$

によって作られる実変数関数であり,  $\gamma$  は Euler の定数 (= 0.57721...) である。(  $E_c$ ,  $E_s$  については付録 IV を参照のこと。)

さし当り,  $y = 0$  における流速分布に興味があるので, (4.12) ~ (4.17) で  $y = 0$  とおき, (5.8) ~ (5.11) を代入して  $\xi$  についての定積分を実行する。この積分を解析的に求めることはできないので,  $\xi = \tan \phi$  とおき, 有限区間  $[0, \frac{\pi}{2}]$  に変換して数値積分を行なった。その際,  $\xi = 0$  および  $\xi = \infty$  における  $U_c(\xi)$ ,  $U_s(\xi)$ ,  $V_c(\xi)$ ,  $V_s(\xi)$  および  $F_I(\xi, x)$ ,  $F_{II}(\xi, x)$  の振舞いを調べておく必要がある。  $\xi \rightarrow 0$  とすると

$$\left. \begin{aligned} U_c(\xi) &\rightarrow \frac{1}{3} \alpha_2, & U_s(\xi) &\rightarrow -\frac{4\alpha_2}{3\pi} \xi \log 2\xi \\ V_c(\xi) &\rightarrow -\frac{4\alpha_2}{3\pi} \log 2\xi, & V_s(\xi) &\rightarrow \frac{2}{3} \alpha_2 \end{aligned} \right\} (5.14)$$

$$F_I(\xi, x) \rightarrow \frac{1}{2} (3x - x^3), \quad F_{II}(\xi, x) \rightarrow \frac{1}{2} (x - x^3) \xi \quad (5.15)$$

となり,  $\xi \rightarrow \infty$  <sup>( $|x| \neq 1$ )</sup> ではいずれも  $O(\xi^{-2})$  となる。したがって,  $|x| = 1$  の近傍を除けば  $\xi \rightarrow \infty$  の収束性には問題は無い。(  $|x| = 1$  では境界条件は満足されていることに注意。)

数値積分の際の困難は  $U_s(\xi)$  を含む (4.16) において現われる。この被積分関数  $U_s(\xi) (\partial F_I / \partial x) / \xi$  は  $\xi \rightarrow 0$  で対数的に

発散するからである。それを避けるために、(4.16)の被積分関数から、同じ特異性をもつ関数  $-\frac{2}{\pi} \alpha_2 (1-x^2) E_c(2\xi)$  を引いておけばよい。すなわち、

$$\int_0^{\infty} E_c(2\xi) d\xi = 0 \quad (5.16)$$

であることを考慮して、(4.16)を

$$\tilde{v}_I(x, 0) - \frac{3}{4} Q (1-x^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ U_0(\xi) \frac{1}{\xi} \frac{\partial F_I}{\partial x} + \frac{2\alpha_2}{\pi} (1-x^2) E_c(2\xi) \right] d\xi \quad (5.17)$$

と書きなおせば、数値積分は容易になる。

数値積分は  $0 \leq x \leq 1$  の区間を 10 等分し、各分点の  $x$  の値について行った。  $\xi$  については  $[0, \frac{\pi}{2}]$  を 20 等分し、シンプソンの公式を用いて数値積分された。結果は図 3 に示す。

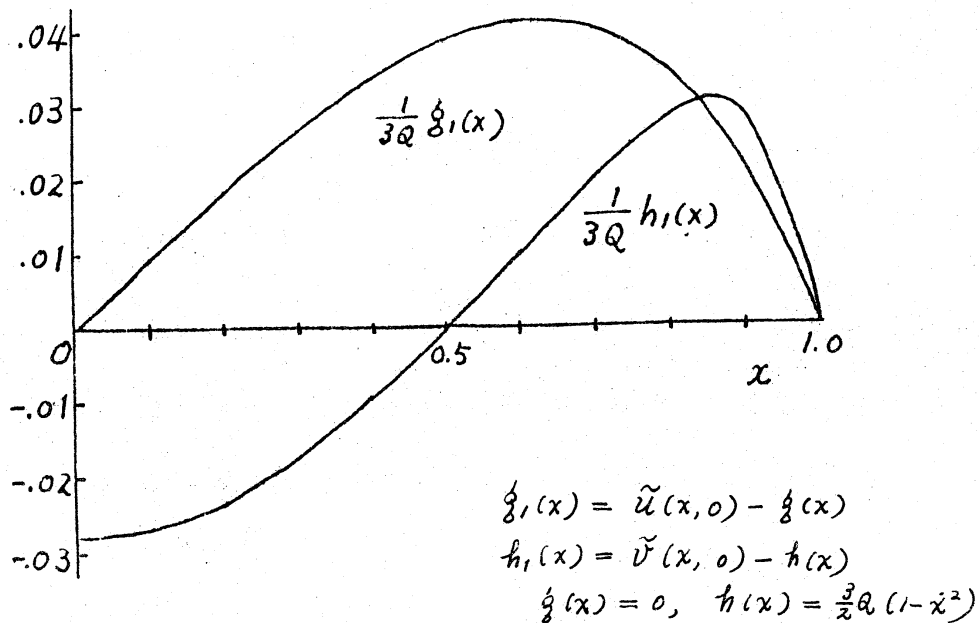


図 3. 出口においてはじめて設定したポアズイユの流速分布からのずれ。

## 6. 結 論

前節で述べた方法で，出口における流速分布と近似的に導いた。結果は，修正された速度分布とはじめに仮定したポアズイユの速度分布の差は十分小さく，たかだか数%程度の差である。したがって， $\delta$ で述べた予想は妥当であることが確かめられた。

さらにこの点を十分に検討しようと思えば，出発の速度分布として展開式(3.16)を採用し，(4.13)以下の式から $\tilde{u}$ ， $\tilde{v}$ を導いて， $\tilde{u}(x,0)$ ， $\tilde{v}(x,0)$ がそれぞれ $g(x)$ ， $h(x)$ に一致するように係数 $\alpha_n$ を決定する必要がある。そうすれば流れの場がもっと精密に評価されるであろう。しかし，その計算は多大の困難が予想される。現在，その計算が進行中であり，その結果は別の機会に発表する予定である。

なお，この研究を行うに当たり，慶応大学教授川口光年氏に種々の貴重な御助言を戴いた。厚く感謝の意を表した。

## 文 献

- 1) H. S. Lew and Y. C. Fung: *J. Biomech.* 3, 23-38 (1970)
- 2) D. Fargie and B. W. Martin: *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 321, 461-476 (1971).
- 3) I. N. Sneddon: *Fourier Transform*, McGraw-Hill, New York 1951.
- 4) 今井 功: 流体力学(前), 裳華房 1974.
- 5) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式III, 岩波, 1959 (p112)

付録 I.

$\sigma(x), \tau(x)$  のフーリエ変換を  $S(\xi), T(\xi)$  とする:

$$S(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) e^{i\xi x} dx, \quad T(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) e^{i\xi x} dx$$

そうすれば,  $S(\xi)T(\xi)$  の逆変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\tau(x-t) dt \quad \text{または} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x-t)\tau(t) dt$$

で与えられる (たたみこみの定理)。

式(3.6) は  $G(\xi) y e^{-|\xi|y}$  と  $-i(1+|\xi|y) H(\xi) \xi^{-1} e^{-|\xi|y}$  の逆変換の和であると考え、前者に対しては

$$S(\xi) = G(\xi), \quad T(\xi) = y e^{-|\xi|y}$$

とあって上の定理を使えば

$$\sigma(x) = g(x), \quad \tau(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

であり, 後者に対しては

$$S(\xi) = H(\xi), \quad T(\xi) = -i(1+|\xi|y) e^{-|\xi|y} \xi^{-1}$$

とあって

$$\sigma(x) = h(x), \quad \tau(x) = -\frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2+y^2} \right]$$

が導かれる。したがって, (3.6) は (3.7) に書きかえられる。ただし,  $g(x), h(x)$  は  $|x| \geq 1$  に対しては 0 であるものとする。

付録 II.

ここで用いた Gegenbauer 関数  $C_n(x)$  は母関数

$$(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)t^n \quad |t| \leq 1$$

によって定義される,  $n$  次の多項式である. ふつうには  $C_n^{1/2}(x)$  と書かれ, 常微分方程式

$$(1-x^2)u''(x) + n(n-1)u(x) = 0$$

の  $x = \pm 1$  における正則な解でもある. 具体的に示すと,

$$C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = -x, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)$$

$$C_3(x) = \frac{1}{2}x(1-x^2), \quad C_4(x) = \frac{1}{8}(1-x^2)(5x^2-1),$$

$$C_5(x) = \frac{1}{8}x(1-x^2)(7x^2-3), \quad C_6(x) = \frac{1}{16}(1-x^2)(21x^4-14x^2+1)$$

.....

### 付録 III.

第 2 種 Legendre 関数  $Q_n(z)$  は Legendre の多項式  $P_n(z)$  と同じく, 常微分方程式

$$(1-z^2)u''(z) - 2zu'(z) + n(n+1)u(z) = 0$$

の解であり,  $z \rightarrow \infty$  で正則な解を与える. 具体的には,

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}P_0(z) \log \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1(z) = \frac{1}{2}P_1(z) \log \frac{z+1}{z-1} - 1,$$

$$Q_2(z) = \frac{1}{2}P_2(z) \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{3}{2}z,$$

$$Q_3(z) = \frac{1}{2}P_3(z) \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{5}{2}z^2 + \frac{2}{3}, \dots$$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1)$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3-3z), \dots$$

## 付録 IV

積分指数関数  $\bar{E}_i x$ ,  $E_i(-x)$  は正の実数  $x$  に対してつぎの各式で表わされる:

$$\begin{aligned}\bar{E}_i x &= \gamma + \log x + \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt \\ &= \gamma + \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \\ &= \gamma + \log x - e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \right) (-x)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_i(-x) &= \gamma + \log x - \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \gamma + \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n \cdot n!} \\ &= \gamma + \log x - e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \right) x^n\end{aligned}$$

ここで,  $\gamma = 0.57721 \dots$  は Euler の定数である.  $x \rightarrow \infty$  の漸近展開は

$$\bar{E}_i x \sim e^x \left( \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots \right), \quad E_i(-x) \sim e^{-x} \left( -\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} - \frac{2!}{x^3} + \dots \right)$$

これらを用いて (5.12), (5.13) で定義される  $E_c(x)$ ,  $E_s(x)$  は

$$\begin{aligned}E_c(x) &= \frac{1}{2} [e^x E_i(-x) + e^{-x} \bar{E}_i x] \\ &= (\gamma + \log x) \cosh x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left( \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{r} \right) x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\log x - \psi(2n+1)] \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_s(x) &= \frac{1}{2} [e^x E_i(-x) - e^{-x} \bar{E}_i x] \\ &= (\gamma + \log x) \sinh x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \left( \sum_{r=1}^{2n-1} \frac{1}{r} \right) x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\log x - \psi(2n)] \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

のまじに表わされる. ここで  $\psi(x)$  はディガンマ関数で

正の整数  $n$  に対し

$$\psi(n) = \gamma - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}, \quad \psi(1) = \gamma$$

である。  $x \rightarrow \infty$  のときは

$$E_c(x) \sim \frac{1!}{x^2} + \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} + \dots, \quad E_s(x) \sim -\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} - \dots$$

となる。図 A-1 に  $E_c(2 \tan \phi)$ ,  $E_s(2 \tan \phi)$  のグラフを示す。

また,  $a$  を正の定数とすると

$$\frac{d}{dx} E_s(ax) = a E_c(ax), \quad \frac{d}{dx} E_c(ax) = \frac{1}{x} + a E_s(ax)$$

が成立する。

ここで,  $E_c, E_s$  を定義する理由は, 積分 (5.7) の  $U_s(\xi)$ ,  $V_c(\xi)$  を求めるとき, つぎの定積分が現われるからである:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x^2 + a^2} dx = -\frac{1}{a} E_s(ay)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos xy}{x^2 + a^2} dx = -E_c(ay)$$

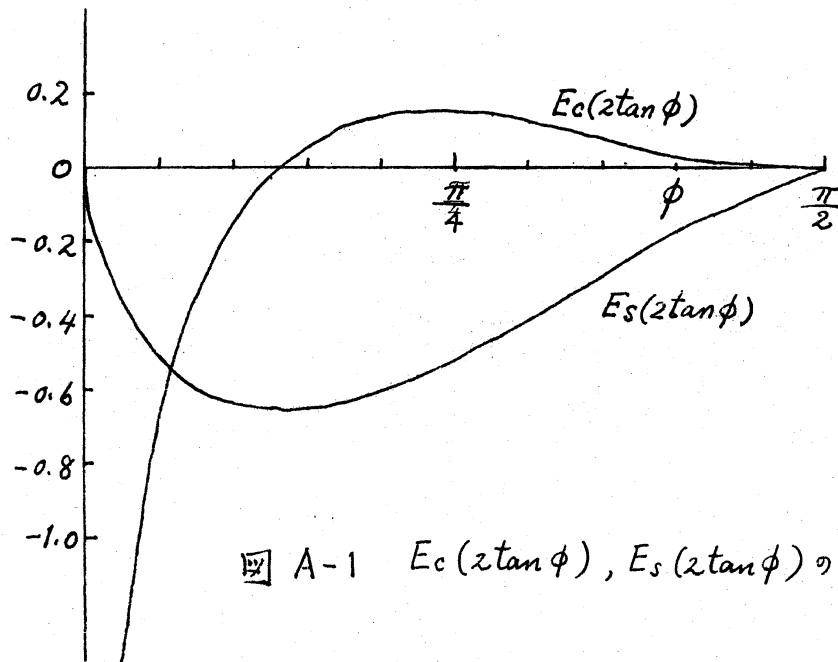


図 A-1  $E_c(2 \tan \phi)$ ,  $E_s(2 \tan \phi)$  のグラフ