数理解析研究所講究録
234巻 1975年 87-101

円環（及び2円柱）を過ぎるおそい流れ

新潟大工　　脇屋 正一

§1. 序

粘性流体のおそい運動を記述するストークスの運動方程式を厳密に解く試みは古くからいろいろ工夫されている。[1)] 就中，物体のまわりの流れが軸対称で流れの関数が存在する場合，物体の形に則して適当な直交座標系を用いたいわゆる変数分離の方法で多くの問題が解かれた。流れに直角におかれた2球の非対称問題が双極座標を用いて解かれたのは比較的近年のことであるが，かくて残された数少ない問題の中に円環のまわりの流れがある。この場合，たとえ流れが軸対称でも円環表面上での流れの関数の値を予め指定（例えば0）できないことが問題の解決を困難にしていたと思われるが，Dean と O'Neill[2)] による上記非対称問題の取扱いと同様な考え方でこれを解くことができる。ここでは軸対称の場について述べるが一般の場合でも手続きはほぼ同様であろう。[3)]

円環に対応する2次元問題は平行2円柱であろう。これには2次元の双極座標を用いた類似の取扱いが一応期待される。これはまた2球に対応する2次元問題でもあり，既にRaasch[4)]はshear flowの中におかれた平面壁の近くの円柱，及びshear flow中での2円柱の振舞をこれによって論じている。双極座標による解は併しながら2円柱の一般の運動を表わすものではない。* ここではこの形の解の性質を考察して利用し得る2，3の問題を取上げてみることにする。

* 円柱とそれを囲む円筒との間の有限の領域では解が求まり，そこでの解がわかれば反転定理によって任意の領域での解が見出せることが会場で今井先生から指摘されたが，ここではその問題には立入らない。[5)]

§2. 円環をすぎる流れ[6)]

ストークスの方程式 $\nabla p=\mu\nabla^2 \mathbf{u}$ の解は一般に調和関数 $\mathbf{v}$ を用いて

$$\mathbf{u}=\frac{p}{2\mu}\mathbf{r}+\mathbf{v} \qquad (2.1)$$

（$\mathbf{r}$：位置ベクトル）の形に書くことができる。ここでは特に軸対称の流場を考えることにして，対称軸を極軸にとった円柱座標（z，r，φ）を導入すれば p，v_z 及び v_r の満すべき方程式は

$$\nabla^2 p = \nabla^2 v_z = 0, \quad (\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) v_r = 0, \qquad (2.2)$$

ただし，
$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} .$$

ここで，

$$r = \frac{c \sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta}, \quad z = \frac{c \sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta}, \qquad (2.3)$$

ただし　$0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$

により円環座標（ξ, η, φ）を導入すれば，一つの円 $\xi = \sigma$（：定数）を z 軸のまわりに回転することによって円環が得られる。円 $\xi = \sigma$ の半径及びその中心の座標原点よりの距離（円環の半径）は夫々

$$a = c \operatorname{cosech}\sigma, \quad b = c \coth\sigma . \qquad (2.4)$$

方程式（2.2）の円環座標による解の中で円環の外部に対応するものは半奇数次の才一種ルジャンドル関数，即ち円環関数を用いて次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\mu}{c}(s - \cos\eta)^{1/2} \sum_{n=1} C_n P_{n-1/2}(s) \sin n\eta , \\ v_z &= (s - \cos\eta)^{1/2} \sum_{n=0}' B_n P_{n-1/2}(s) \cos n\eta , \\ v_r &= (s - \cos\eta)^{1/2} \sum_{n=1} A_n P'_{n-1/2}(s) \sinh\xi \sin n\eta . \end{aligned}\right\} (2.5)$$

ここに $s = \cosh\xi$，また Σ' は $n=0$ に対する項には 1/2 を

乗ずべきことを示す。 $P_{n-1/2}(s)$ は円環関数でありダッシュは s に関する微分を表わす。 連続の式 $\nabla\cdot u=0$ は p, v_z, v_r の間に一つの関係を要求し，従って (2.5) の A_n, B_n, C_n の間には次の関係が存在すべきことが見出される。

$$5C_n-\frac{1}{2}(2n-1)C_{n-1}+\frac{1}{2}(2n+1)C_{n+1}+(4n^2-1)A_n$$
$$-\frac{1}{2}(2n-3)(2n-1)A_{n-1}-\frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)A_{n+1}$$
$$+4nB_n-(2n-1)B_{n-1}-(2n+1)B_{n+1}=0 \qquad (n\geq 1). \quad (2.6)$$

更に具体的に A_n, B_n, C_n の値を定めるには円環上の境界条件を指定しなければならないが，最も簡単な場合として静止した円環がその軸方向の一様流 U の中におかれているものとすれば，表面上で流速0の条件から

$$\frac{p}{\mu}=-\frac{2}{r}v_r \quad , \quad v_z=-U+\frac{z}{r}v_r \, . \qquad (2.7)$$

(2.5) を用い，かつ展開式：[7]

$$(s-\cos\eta)^{-1/2}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{0}^{\infty}{}' Q_{n-1/2}(s)\cos n\eta \qquad (2.8)$$

($Q_{n-1/2}$ は第二種円環関数）を利用すれば

$$\left.\begin{aligned}
Z_n=&\Big[\Big\{X_{n-1}-\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)X_n\Big\}P'_{n-3/2}\\
&+\Big\{X_{n+1}-\Big(1-\frac{1}{2n}\Big)X_n\Big\}P'_{n+1/2}\Big]\Big/P_{n-1/2} \quad (n\geq 1),\\
Y_n=&-\Big\{Q_{n-1/2}+\frac{1}{2}\big(X_{n-1}P'_{n-3/2}-X_{n+1}P'_{n+1/2}\big)\Big\}\Big/P_{n-1/2}\\
&(n\geq 0),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

ただし，

$$A_n = U\frac{2\sqrt{2}}{\pi}X_n\ ,\quad B_n = U\frac{2\sqrt{2}}{\pi}Y_n\ ,\quad C_n = U\frac{2\sqrt{2}}{\pi}Z_n\ , \qquad (2.10)$$

かつ　$X_0 = 0,\quad X_{-1} = -X_1$

とする。(2.9) を (2.6) に代入して X_n に関する方程式が得られる。

$$a_{n-1}X_{n-1} + b_n X_n + c_n X_{n+1} = f_n \qquad (n \geq 1)\ . \qquad (2.11)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
a_{n-1} &= (2n-1)\frac{P'_{n-5/2}}{P_{n-3/2}} - (2n-5)\frac{P'_{n-3/2}}{P_{n-1/2}}\ ,\quad a_0 = 0\ ,\\
c_n &= (2n+5)\frac{P'_{n+1/2}}{P_{n-1/2}} - (2n+1)\frac{P'_{n+3/2}}{P_{n+1/2}}\ ,\\
b_n &= (2n-1)\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{P'_{n+1/2}}{P_{n-1/2}} - \frac{P'_{n-1/2}}{P_{n-3/2}}\right\}\\
&\quad + (2n+1)\left\{\frac{P'_{n-1/2}}{P_{n+1/2}} - \left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{P'_{n-3/2}}{P_{n-1/2}}\right\}\ ,\\
f_n &= +4n\frac{Q_{n-1/2}}{P_{n-1/2}} - (2n-1)\frac{Q_{n-3/2}}{P_{n-3/2}} - (2n+1)\frac{Q_{n+1/2}}{P_{n+1/2}}\ .
\end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

連立方程式 (2.11) は $n=1$ に対して X_1, X_2 を，$n \geq 2$ に対しては X_{n-1}, X_n, X_{n+1} を含みかつ初めの数項を除けば $n \to \infty$ に対して $X_n > X_{n+1} \to 0$ となることが確められるので，数値的に解くことができる。即ち

$$G_n = b_n - a_{n-1}\frac{c_{n-1}}{G_{n-1}}\ ,\quad F_n = f_n - a_{n-1}\frac{F_{n-1}}{G_{n-1}} \qquad (2.13)$$

とおいて

$$X_n = \frac{F_n}{G_n} - \frac{C_n}{G_n} X_{n+1} \cdot \qquad (2.14)$$

適当な近似で $X_{n+1}=0$ とすれば $X_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ が定まり，更に (2.9) から Y_k, Z_k が求められる。ただし，$\sigma=0$ に対しては X_n は収束しなくなるから我々の解はこの場合には適用されない。実際の計算に当っては σ の値の大きい所では次の展開式を使うのが便利である。

$$\left.\begin{aligned}
P_{-1/2}(\cosh\sigma) &= \frac{2}{\pi} e^{-\sigma/2} \Big[\ln(4e^{\sigma}) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \ln(4e^{\sigma}) - \sum_{s=1}^{n} \Big(\frac{2}{2s-1} - \frac{1}{s} \Big) \Big\} \Big(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \Big)^2 e^{-2n\sigma} \Big], \\
P_{1/2}(\cosh\sigma) &= \frac{2}{\pi} e^{\sigma/2} + \frac{1}{\pi} e^{-3\sigma/2} \Big[\ln(4e^{\sigma}) - \frac{1}{2} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \ln(4e^{\sigma}) - \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \Big) - \sum_{s=1}^{n} \Big(\frac{2}{2s-1} - \frac{1}{s} \Big) \Big\} \times \\
&\qquad \cdot \frac{(2n-1)!!\,(2n+1)!!}{2^{2n} n!\,(n+1)!} e^{-2n\sigma} \Big].
\end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

充分に大きな σ に対してはこれから

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\pi^2}{4(1/2 + \ln[4e^{\sigma}])}, \quad \frac{1}{2} Y_0 = Z_1 = -X_1, \\
X_2 &= Y_1 = Y_2 = Z_2 = O(e^{-2\sigma}).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

流れが円環の切片 $r\,d\varphi$ に作用する力の r 成分はこの場合 0 になることが確められる。即ち円環を引伸す（あるいは縮める）ような作用は働かない。主流の方向の成分 f_z

は円環表面での応力を積分して結局

$$f_z = -2\sqrt{2}\mu c\, d\varphi \left(\sum_0{}' B_n + \sum_1 n C_n \right). \qquad (2.17)$$

この際,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\eta}{(s_0 - \cos\eta)^{1/2}}\, d\eta = 2\sqrt{2}\, Q_{n-1/2}(s_0) \qquad (2.18)$$

($s_0 = \cosh\sigma$) 及びこれを s_0 で微分した関係が使われる。更に (2.6) から

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' B_n = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \qquad (2.19)$$

の関係が見出せるから,結局円環のうける力は φ についての積分を行って

$$\left.\begin{aligned} F &= 8\mu U (a+b) D \\ D &= -4\sqrt{\frac{s_0-1}{s_0+1}} \sum_0{}' Y_n = -4\sqrt{\frac{s_0-1}{s_0+1}} \sum_1 n Z_n \end{aligned}\right\} \qquad (2.20)$$

で与えられる。 円環の受ける合力を直接求めるには積分計算は必ずしも必要ではなく,無限遠の解の性質を調べることによって容易にこれを見出すことができよう。[8)]

σ が充分大きい場合には (2.16) の X_1 の値を使って

$$F = 8\mu U b (4X_1), \quad b/a = e^{\sigma}/2 \qquad (2.21)$$

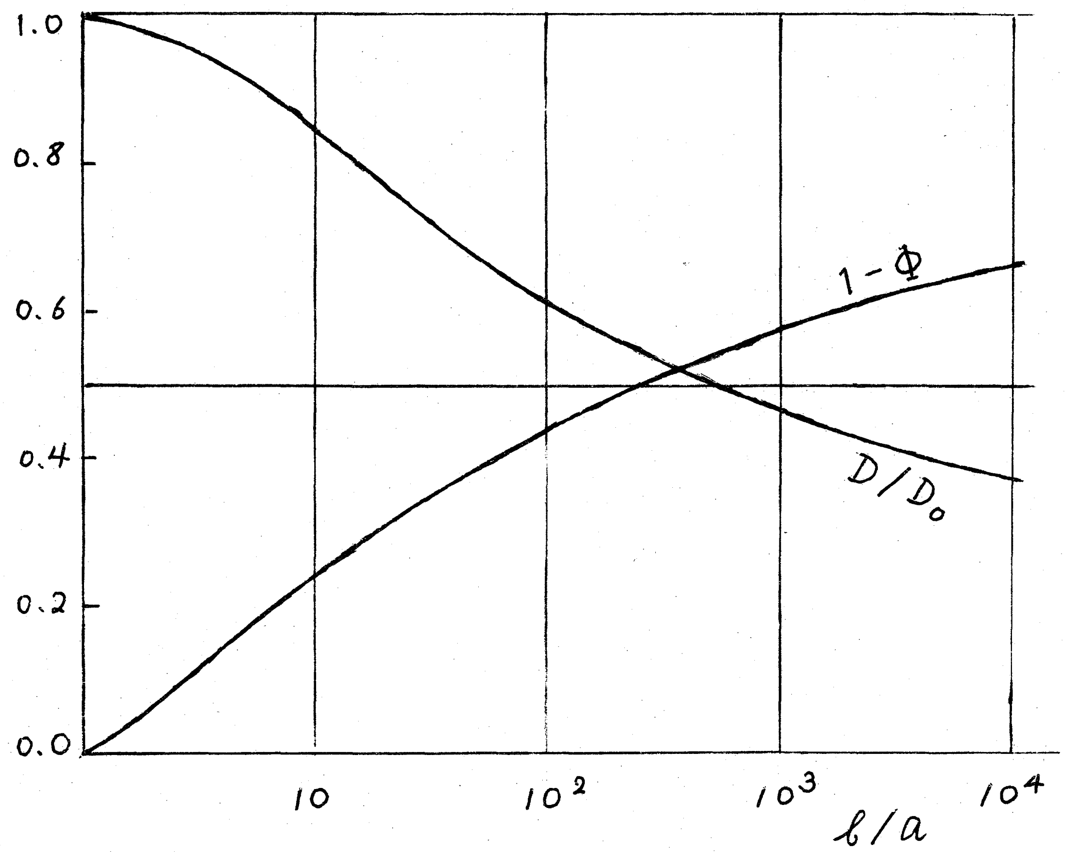
が得られるが,これは細いリングについて Masuda が得た式に他ならない。[9)] 一方 $\sigma = 0$ は中の空いていない特別な円環に対応するが,これは別に Takagi によって解かれていて今の表現に従えば $D \equiv D_0 = 2.204$ が見出されている。[10)]

円環の中を通り抜ける流量に対する円環の抵抗は意外に著しいことがMasudaにより指摘されている。我々の解を使ってこれを求めるにはz面$(\eta=\pi)$上で次の積分を計算すればよい。

$$\int_0^{b-a}(U+u_z)\,2\pi r\,dr=\pi U(b-a)^2(1-\Phi),$$

$$\Phi=-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{s_0+1}{s_0-1}\sum_{n=0}{}'(-1)^n Y_n\int_0^{s_0}\frac{P_{n-1/2}(s)}{(s+1)^{3/2}}ds \,. \qquad (2.22)$$

次図はD/D_0及び$1-\Phi$の変化を示す。$\sigma=7$以上の値に対しては充分な精度で(2.21)式の近似が適用でき、Masudaによって与えられた値に接続する。



§3. 2円柱の問題

2次元問題で双極座標(ξ, η):

$$x=\frac{c\sinh\xi}{\cosh\xi-\cos\eta},\quad y=\frac{c\sin\eta}{\cosh\xi-\cos\eta} \tag{3.1}$$

$(-\infty<\xi<\infty,\ 0\leq\eta<2\pi)$を用いるならば，2円柱のまわりの解が得られるであろうと考えられる。(3.1)をx軸あるいはy軸のまわりに回転したものが夫々3次元の双極座標あるいは円環座標であることを思えば，2次元問題のこのような取扱いから2球に対応して2円柱，あるいは渦輪に対応した渦対の問題が議論できることが期待される。

2次元の場合流れの関数ψの満すべき方程式は$\nabla^4\psi=0$であるが，任意の調和関数をϕとすれば$x\phi$, $y\phi$, $r^2\phi$ ($r^2=x^2+y^2$) 等の組合せによつてψが与えられることはよく知られたところである。さて(ξ, η)によれば

$$\nabla^2=\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right),\quad h=\frac{c}{\cosh\xi-\cos\eta} \tag{3.2}$$

であり，$\phi(\xi, \eta)$の変数分離を仮定すればその一般的な形は容易に知られる。かくてψ及び圧力pのηに関する一価性を要求すれば，ψの最も一般的な形を次の如く与えることができよう。

$$\psi / h = A\xi(\cosh\xi - \cos\eta) + (B + C\xi)\sinh\xi - D\xi\sin\eta$$
$$+\sum_{n=1}\Big[\{a_n\cosh(n+1)\xi + b_n\sinh(n+1)\xi + c_n\cosh(n-1)\xi$$
$$+ d_n\sinh(n-1)\xi\}\cos n\eta + \{a_n'\cosh(n+1)\xi + b_n'\sinh(n+1)\xi$$
$$+ c_n'\cosh(n-1)\xi + d_n'\sinh(n-1)\xi\}\sin n\eta\Big]. \qquad (3.3)$$

この形の解は Raasch の取扱つたものであつて速度成分，圧力は

$$v_\xi = \frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad v_\eta = -\frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \qquad (3.4)$$

及び

$$\frac{\partial p}{\partial\xi} = -\mu\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla^2\psi, \quad \frac{\partial p}{\partial\eta} = \mu\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi \qquad (3.5)$$

から求められるが，無限遠（$\xi=\eta=0$）で速度が 0 であるためには次の関係が要求される。

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1(a_n + c_n) = 0, \quad \sum_1 n(a_n' + c_n') = 0, \\ &B + \sum_1\{(n+1)b_n + (n-1)d_n\} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

このとき圧力は

$$p_\infty = -2\frac{\mu}{c}\{D + \sum_1(b_n' + d_n')\}. \qquad (3.7)$$

（3.3）から導かれる流れが2円柱（$\xi = \pm\alpha$）に及ぼす力は単位長さ当り

$$D_x = \pm 4\pi\mu D, \quad D_y = \pm 4\pi\mu C, \qquad (3.8)$$

その中心のまわりのモーメントは

$$M = -4\pi\mu a(C\cosh\alpha \pm A\sinh\alpha) \qquad (3.9)$$

（a：円柱の半径）で与えられる。この結果からも予想さ

れるように，(3.3)の形の解では全く任意な2円柱の状態を表わすことはできない。

簡単な場合として円柱($\xi=\alpha$)が速度U_x, U_y，中心のまわりの角速度Ωで静止流体中を運動するとしよう。このとき円柱表面での境界条件から次式が導かれる。

$$\left.\begin{aligned}
&-D\alpha+(a_1'\cosh 2\alpha+b_1'\sinh 2\alpha+c_1')=U_x\,,\\
&-D+2(a_1'\sinh 2\alpha+b_1'\cosh 2\alpha)=0\,,
\end{aligned}\right\}\quad(3.10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&(B+C\alpha)\sinh\alpha+(a_1\cosh 2\alpha+b_1\sinh 2\alpha+c_1)\cosh\alpha=-U_y\sinh\alpha,\\
&A\cosh^2\alpha+B+C(\alpha+\sinh\alpha\cosh\alpha)=-U_y+c\Omega\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha}\,,\\
&-A+2(a_1\sinh 2\alpha+b_1\cosh 2\alpha)=0\,,
\end{aligned}\right\}$$

および (3.11)

$$a_n=b_n=c_n=d_n=a_n'=b_n'=c_n'=d_n'=0\quad(n\geq 2).\quad(3.12)$$

y方向の運動及び回転とx方向の運動とは互に独立である。他の円柱に対する境界条件も同様に与えられるから，円柱表面の条件だけで全ての定数の値は定ってしまい一般には更に無限遠の条件(3.6)を満足することはできない。ただ，1. (3.6)を要求しない有限の領域，2. (3.6)が一つの円柱表面の境界条件と重複するとき即ち一つの円柱が平面壁となる場合(これは才一の場合のリミットケースでもある)，3. 2円柱を一対としたある種の運動，に対しては解を与えることができる。Raasch の問題は丁度このような条件を満す場合であ

った。以下夫々の場合の簡単な問題を取扱ってみよう。

(1) 静止した円筒($\xi=\beta$)の中で自分の中心のまわりに回する円柱($\xi=\alpha>\beta$)

円柱の角速度をΩとすれば円柱および外側の円筒がうける流体力学的な力は

$$D_x=0, \quad D_y/4\pi\mu=\mp\frac{c\Omega}{\Delta}\frac{\sinh\beta}{\sinh\alpha}\sinh(\alpha-\beta), \tag{3.13}$$

ここに

$$\Delta=(\alpha-\beta)(\sinh^2\alpha+\sinh^2\beta)-2\sinh\alpha\sinh\beta\sinh(\alpha-\beta).$$

ただし内外円筒の半径をa, bとすれば　$c=a\sinh\alpha=b\sinh\beta$.

また内円柱の中心に関するモーメントは

$$M_\alpha/4\pi\mu=-\frac{a^2\Omega}{\Delta}\sinh^2\alpha\left[\left\{(\alpha-\beta)\frac{\cosh(\alpha-\beta)}{\sinh(\alpha-\beta)}-1\right\}+\frac{\sinh^2(\alpha-\beta)}{\sinh^2\alpha}\right], \tag{3.14}$$

外円筒の中心のまわりのモーメントは

$$M_\beta/4\pi\mu=\frac{b^2\Omega}{\Delta}\sinh^2\beta\left\{(\alpha-\beta)\frac{\cosh(\alpha-\beta)}{\sinh(\alpha-\beta)}-1\right\}. \tag{3.15}$$

同心円筒の場合と異り$D_y\neq 0$, $M_\alpha+M_\beta\neq 0$である。αとβが近いときこの解は偏心した軸と軸受の問題に応用できるかも知れない。

(2) 平面壁の近くの円柱の運動

特に$\xi=\beta=0$は平面壁を表わす。このとき壁面上での粘着の条件:

$$\left.\begin{aligned} &a_n+c_n=0\,, \quad a_n'+c_n'=0 \quad (n\geq 1)\,, \\ &B+2b_1=0\,, \quad (n+1)b_n+(n-1)d_n=0 \quad (n\geq 2) \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

は(3、6)の要請を含むことになり解を決定することができる。

壁に沿って速度U_yで運動する角速度Ωの円柱($\xi=\alpha$)が流体から受ける力及びモーメントは単位長さ当り

$$D_y=-4\pi\mu U_y/\alpha\,, \quad M=-4\pi\mu a^2\Omega\coth\alpha\,. \qquad (3、17)$$

aは円柱の半径でその中心の壁からの距離をdとすれば$\tanh\alpha=\sqrt{1-(a/d)^2}$である。$a/d\ll 1$の場合は

$$\alpha=\cosh^{-1}(d/a)\doteqdot \ln(2d/a)-(2d/a)^{-2}\,. \qquad (3、18)$$

このときD_yの値はTakaisiによつて求められた近似値と一致する。[11] $\alpha=0$ 即ち円柱と壁とが接触している場合には，円柱を動かすには無限大の力あるいはモーメントが必要である。

この事実はRaaschの扱ったshear flow $u_0=\gamma x$ 中におかれた円柱の場合にも見られることで，このとき速度U_y，角速度Ωの円柱のうける力及びモーメントは

$$\left.\begin{aligned} &D_y=-4\pi\mu\frac{1}{\alpha}(U_y-\gamma d\tanh\alpha) \\ &M=-4\pi\mu a^2\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha}\left(\Omega-\frac{\gamma}{2}\tanh\alpha\right) \end{aligned}\right\} \quad (3、19)$$

で与えられ，$\alpha=0$ に対しては無限大の力及びモーメントが働かない限り $U_y=\Omega=0$ でなければならない。平面上に静止した円柱に対してはShubertの指摘したように，[12]

$$D_y = 4\pi\mu a\gamma, \quad M = 2\pi\mu a^2\gamma. \qquad (3.20)$$

（3） 渦対のモデル

$\xi=\alpha, -\alpha$ の同じ大さの2円柱が無限に拡った流体の中で運動する場合には（3.3）は2円柱の勝手な運動を表わすことができない。互の中心を結ぶ方向（x方向）の運動に対しては円柱の速度が $U_{1x}+U_{2x}=0$ である場合に限り解が存在し，$D_x=0$ は $U_{1x}=U_{2x}=0$ に対応する。y方向の運動及び回転には次のような相関が必要である。

$$\left.\begin{aligned} U_{1y}-U_{2y} &= -c(\Omega_1+\Omega_2)\frac{\alpha}{\sinh\alpha}, \\ U_{1y}+U_{2y} &= -c\frac{\Omega_1-\Omega_2}{\sinh 2\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

このとき，
$$D_y/2\pi\mu = \mp\frac{U_{1y}-U_{2y}}{\alpha} = \pm\frac{a(\Omega_1+\Omega_2)}{\sinh\alpha}. \qquad (3.22)$$

特に $\Omega_2=-\Omega_1$ の場合の解は2円柱の自由な運動（$D_y=0$）を表わし，中心間の距離を l とすれば

$$U_{1y}=U_{2y}=-\frac{c\Omega}{\sinh 2\alpha}=-a\Omega\frac{a}{l}, \qquad (3.23)$$

（$\Omega\equiv\Omega_1=-\Omega_2$）。また $\Omega_2=\Omega_1$ のときは2円柱が座標原点のまわりを角速度 $-2\Omega\alpha/\sinh 2\alpha$ で公転する解を与える。

References

1) H. Takagi: Nagare Vol.6, No.1 (1974) 1.

2) W.R. Dean and M.E. O'Neill: Mathematika 10 (1963) 13.

3) S. Wakiya: J. Phys. Soc. Japan 22 (1967) 1101.

4) J.K. Raasch: Ph.D. Thesis, Fac. Mech. Engg., Karlsruhe Technical Univ., Karlsruhe, Germany.

5) 今井 功: 数理解析研 研究集会講演 (関数論の流体力学への応用, 1973年7月).

6) S. Wakiya: J. Phys. Soc. Japan 37 (1974) to appear.

7) E.W. Hobson: The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics (Cambridge Univ., 1931) p.443.

8) 今井 功: 流体力学・前編 (裳華房, 1973) 325頁.

9) H. Masuda: Bull. Fac. Gen.ed., Utsunomiya Univ. (Japan) 3 (1970) 11.

10) H. Takagi: J. Phys. Soc. Japan 35 (1973) 1225.

11) Y. Takaisi: J. Phys. Soc. Japan 11 (1956) 1004.

12) G. Schubert: J. Fluid Mech. 27 (1967) 647.