

乱流の修正準正規分布理論

京大 理・物理 巽 友正
水島 二郎

§ 1. Introduction

3次元等方的な乱流の問題を解く方法の一つに、速度相関の方程式をたてて、解く方法がある。この場合、2次の相関の時間変化を記述する方程式には3次の相関が現われ、3次の相関の時間変化を記述する方程式には4次の相関が現われ、いつまでも閉じた方程式系が作られない。この方程式系を閉じた形の方程式系とするために提案された近似の一つに0-4次キュムラント近似あるいは準正規分布理論という近似 (Proudman and Reid [1954], Tatsumi [1954], [1952]) がある。この近似は速度が正規結合確率分布をしているときに4次の相関と2次の相関の間に成り立つ関係を用いて4次の相関を2次の相関の積で表わし、閉じた方程式系を作ろうとするものである。速度が正規結合確率分布をしているときには3次の相関はゼロとなるが、この仮定のもとでは3

次の相関はゼロとしない。ただ4次の相関を2次の相関で表わすときにのみ正規結合確率分布の関係をを用いる。この仮定はまた、速度の分布の確率を表わす特性関数の対数を Taylor 展開し、この4次の項をゼロとおく近似、すなわち3次まで打ち切った近似と同じである。この意味で0-4次キュムラント近似とよばれている。この近似は物理的あるいは数学的な意味が明確であり、モーメントを打ち切る理論よりも比較的高い Reynolds 数まで正しい結果を与えるだろうということが期待される。

ところが、この近似の下に立てた方程式系を Ogura [1963] がある初期条件の下に数値計算したところ、高 Reynolds 数においては負エネルギースペクトルが発生することがあきらかになった。一方、この近似を一次元の Burgers 方程式に対して適用し、3次元の場合と同様に相関に対する閉じた方程式系を作り、数値計算したところ (Meecham et al. [1966]) 3次元の場合と同様負のエネルギースペクトルが発生した。その後 Kawahara [1968] が Burgers 方程式に対して、4次のキュムラントまで残し、5次以降のキュムラントを打ち切る0-5次キュムラント近似をこころみだが、負のエネルギーが発生するまでの時間がいくぶん長くなるだけで大した改良とはならないことをあきらかにした。このため、0-4

次キュムラント近似はその近似の意味が明確ではあるが、高 Reynolds 数の乱流に対しては不適当な近似であるとされてきた。

しかし、最近 Malfliet (1969) がこの 0-4 次キュムラント近似を用いた方程式系に対し、Bogoliubov の多時間展開の手法を適用することにより、負エネルギースペクトルの発生という欠点を改良した。Malfliet の仕事の主な点は 0-4 次キュムラント近似を用いた方程式系が双曲型の微分方程式系であるのに対して、この方程式系を一度時間で積分し、放物型の方程式系にしたということである。この Malfliet の着眼点は正しい。なぜなら、明らかに双曲型の微分方程式系は振動解を持つのにに対して、放物型の方程式系は振動解をもたない。しかも、0-4 次キュムラント近似を用いた方程式系が双曲型になるということは乱流の構造に本質的なことではなく、キュムラントを3次で打ち切った近似からの帰結にすぎない。それゆえに 0-4 次キュムラント近似はそれ自身単独で用いることができず、方程式系を放物型の方程式系にする近似あるいは仮定と共に用いなければならないと考えるべきである。その着眼点の正しさにかかわらず、Malfliet は各モーメントのオーダーを決定する際に物理的に誤まった決めかたをしている。我々は Malfliet が行なっ

た操作を物理的に意味のある近似のもとに行ない、用いた放物型の微分方程式系を得る。簡単のための基礎方程式は Burgers 方程式を用いたが、Navier-Stokes 方程式系に対しても同様にこの手法を適用することができる。

§ 2. スペクトル方程式

0-4次キュムラント近似のもとで、Burgers乱流に対するスペクトル方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \phi(k, t)}{\partial t} + 2\nu k^2 \phi(k, t) = -k \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k, k', t) dk' \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(k, k', t)}{\partial t} + 2\nu(k^2 + k'^2 + kk') \psi(k, k', t) \\ = (k+k') \phi(k, t) \phi(k', t) - k \phi(k', t) \phi(k+k', t) \\ - k' \phi(k, t) \phi(k+k', t) \end{aligned} \quad (2)$$

②式の両辺に $\exp\{2\nu(k^2 + k'^2 + kk')t\}$ をかけると次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\psi(k, k', t) \exp\{2\nu(k^2 + k'^2 + kk')t\}] \\ = \{(k+k') \phi(k, t) \phi(k', t) - k \phi(k', t) \phi(k+k', t) \\ - k' \phi(k, t) \phi(k+k', t)\} \exp\{2\nu(k^2 + k'^2 + kk')t\} \end{aligned} \quad (3)$$

③式の右辺は $\{(k+k') \phi(k, t) \phi(k', t) - k \phi(k', t) \phi(k+k', t) - k' \phi(k, t) \phi(k+k', t)\}$ という因子と $\exp\{2\nu(k^2 + k'^2 + kk')t\}$ という因子の

積である。今、慣性小領域あるいはそれよりも波数の大きい粘性領域に着目した場合、これらの領域においては、より小さい波数領域からのエネルギーの流入は、より大きい波数へのエネルギーの流出と粘性によるエネルギーの消散との和に釣り合っており、エネルギースペクトルは時間的にあまり変化しない“定常的”な状態があるだろうと考えられる。

その意味で③式の右辺の2つの因子を比較したとき、エネルギースペクトルを含む因子は $\exp\{2\nu(k^2+k'^2+k^2)t\}$ という因子に比べて、ずっとゆるやかにしか時間的に変化せず、③式を時間積分するときには、エネルギースペクトルは時間に対して定数であるとみなして積分を実行することができる。

この近似の下で③式を積分すると次の式を得る。

$$\psi(k, k', t) = \frac{1 - e^{-2\nu(k^2+k'^2+k^2)t}}{2\nu(k^2+k'^2+k^2)} \left\{ (k+k')\phi(k, t)\phi(k', t) - k\phi(k', t)\phi(k+k', t) - k'\phi(k, t)\phi(k+k', t) \right\} \quad (4)$$

ただし、初期条件 $\psi(k, k', t=0) = 0$ を用いた。この近似は波数が大きいほど正しく、エネルギースペクトルが時間的にゆるやかに変化する波数領域・時間間隔ほど正しい近似である。

§3. 高 Reynolds 数における Burgers 乱流の漸近的性質

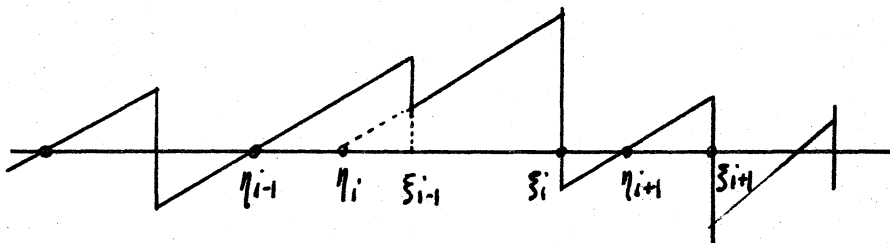
高 Reynolds 数における Burgers 乱流の漸近的性質を明らかにするために Burgers 方程式をまず無次元化する。代表的な速度を u_0 , 代表的な長さを l_0 とし、Reynolds 数を $R = \frac{u_0 l_0}{\nu}$ と定義すると、Burgers 方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

と書ける。Tatsumi and Kida [1972] は (5) の方程式の厳密解を用いて、(5) の方程式の解は $t \gg 1$, $R \gg 1$ 2 次の式で表わされることを示した。 $(\xi_{i-1} + \xi_i)/2 < x < (\xi_i + \xi_{i+1})/2$ において

$$u(x, t) = \frac{1}{t} \left[x - \frac{1}{2} (\eta_i + \eta_{i+1}) \right] - \frac{1}{2t} (\eta_{i+1} - \eta_i) \tanh \left[\frac{R}{4t} (\eta_{i+1} - \eta_i) (x - \xi_i) \right] \quad (6)$$

ここで、 ξ_i はショックの位置を示し、 η_i は速度がゼロになる点を示している。



ξ_i , η_i は初期条件から決まる量である。Burgers 乱流の場は上図のようなランダムなショックの集まりとして記述さ

れる。このような速度場のスペクトルは ξ_i, η_i の分布を求めなければ求まらないが、今、我々は $(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})/2 \gg 1/k$ なる波長 k に着目する限り、エネルギー・スペクトルは ξ_i, η_i の分布に依存せず、一つ一つのジョットの形すなわち⑥式の形によって決定される。 $V = \eta_{i+1} - \eta_i, x - \xi_i = x$ とおき、 $u(x+r, t) - u(x, t)$ を求めると、

$$u(x+r, t) - u(x, t) = \frac{r}{t} - \frac{V}{2t} \left\{ \tanh \frac{RV}{4t} (x+r) - \tanh \frac{RV}{4t} x \right\} \quad \textcircled{7}$$

$\langle (u(x+r, t) - u(x, t))^2 \rangle$ を計算する。ただし、平均は $(-\xi_i + \xi_{i-1})/2 \leq x \leq (\xi_{i+1} - \xi_i)/2$ での空間平均をとる。
 $-L_1 = (-\xi_i + \xi_{i-1})/2, L_2 = (\xi_{i+1} - \xi_i)$ とおく、 $R \gg 1, t \gg 1$ において $\langle (u(x+r, t) - u(x, t))^2 \rangle$ は次のように書ける。

$$\langle (u(x+r, t) - u(x, t))^2 \rangle = \frac{1}{L_2 + L_1} \frac{V^2}{t^2} \left[r \coth \frac{RV}{4t} r - \frac{4t}{RV} \right] \quad \textcircled{8}$$

エネルギー・スペクトル $E(k)$ は

$$E(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x+r, t) u(x, t) \rangle e^{ikr} dr \quad \textcircled{9}$$

で表わされる。⑨式を部分積分し、⑧式を用いると、

$$E(k) = \frac{1}{2\pi k^2} \frac{1}{L_2 + L_1} \frac{V^2}{t^2} \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dr^2} \left[r \coth \frac{RV}{4t} r - \frac{4t}{RV} \right] \cos kr dr$$

$$= \frac{1}{L_2 + L_1} \frac{\pi}{R^2} \operatorname{cosech}^2 \frac{2\pi t}{RV} k \quad (10)$$

となる。

$k \ll \frac{RV}{2\pi t}$ に対して

$$E(k) = \frac{1}{L_2 + L_1} \times \frac{V^2}{4\pi t^2} k^{-2} \quad (11)$$

$k \gg \frac{RV}{2\pi t}$ に対して

$$E(k) = \frac{1}{L_2 + L_1} \frac{4\pi}{R^2} e^{-\frac{4\pi t}{V} \frac{k}{R}} \quad (12)$$

となる。

また、Tatsumi and Kida はエネルギー減衰法則を
しらべ次の結果を得ている。

$$J = \int_0^\infty \langle u(x, t) u(x+r, t) \rangle dr = E(0) \quad (13)$$

は時間に対して不変である。全エネルギー $\mathcal{E}(t)$ を次の式
で定義する。

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^\infty E(k, t) dk \quad (14)$$

$J \neq 0$ のときには

$$\mathcal{E}(t) \sim t^{-\frac{2}{3}} \quad (15)$$

$J=0$ のときには

$$\xi(t) \sim t^{-1}$$

⑩

で変化する。

§4. 数値計算

方程式を無次元量で書く。

波数 $s = k/k_0$

時間 $\tau = \nu k_0^2 t$

Reynolds数 $R = \left(\frac{E_0}{\nu^2 k_0}\right)^{\frac{1}{2}}$

2次のスペクトル関数 $E(s, \tau) = \phi(k, t)/E_0$

$$\frac{\partial E(s, \tau)}{\partial \tau} + 2s^2 E(s, \tau)$$

$$= -\frac{R^2}{2} s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2(s^2 + s'^2 + ss')}}{(s^2 + s'^2 + ss')} \left\{ (s+s') E(s, \tau) E(s', \tau) \right.$$

$$\left. - s E(s', \tau) E(s+s', \tau) - s' E(s, \tau) E(s+s', \tau) \right\} ds' \quad (17)$$

この式を差分式に書きかえる。

$$\tau = k(\Delta\tau) \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$s = i(\Delta s) \quad i = -I, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, I$$

$$s' = j(\Delta s) \quad j = -I, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, I$$

$$\frac{E_i^{k+1} - E_i^k}{\Delta \tau} = -2(\Delta S)^2 i^2 E_i^k$$

$$-\frac{R^2}{2} \times \frac{\Delta S}{3} \sum_{j=-I}^I \{j - (-1)^j\} i \frac{1 - \exp\{-2(i^2 j^2 + i \cdot j)(\Delta S)^2 (\Delta \tau) k\}}{i^2 + j^2 + i \cdot j}$$

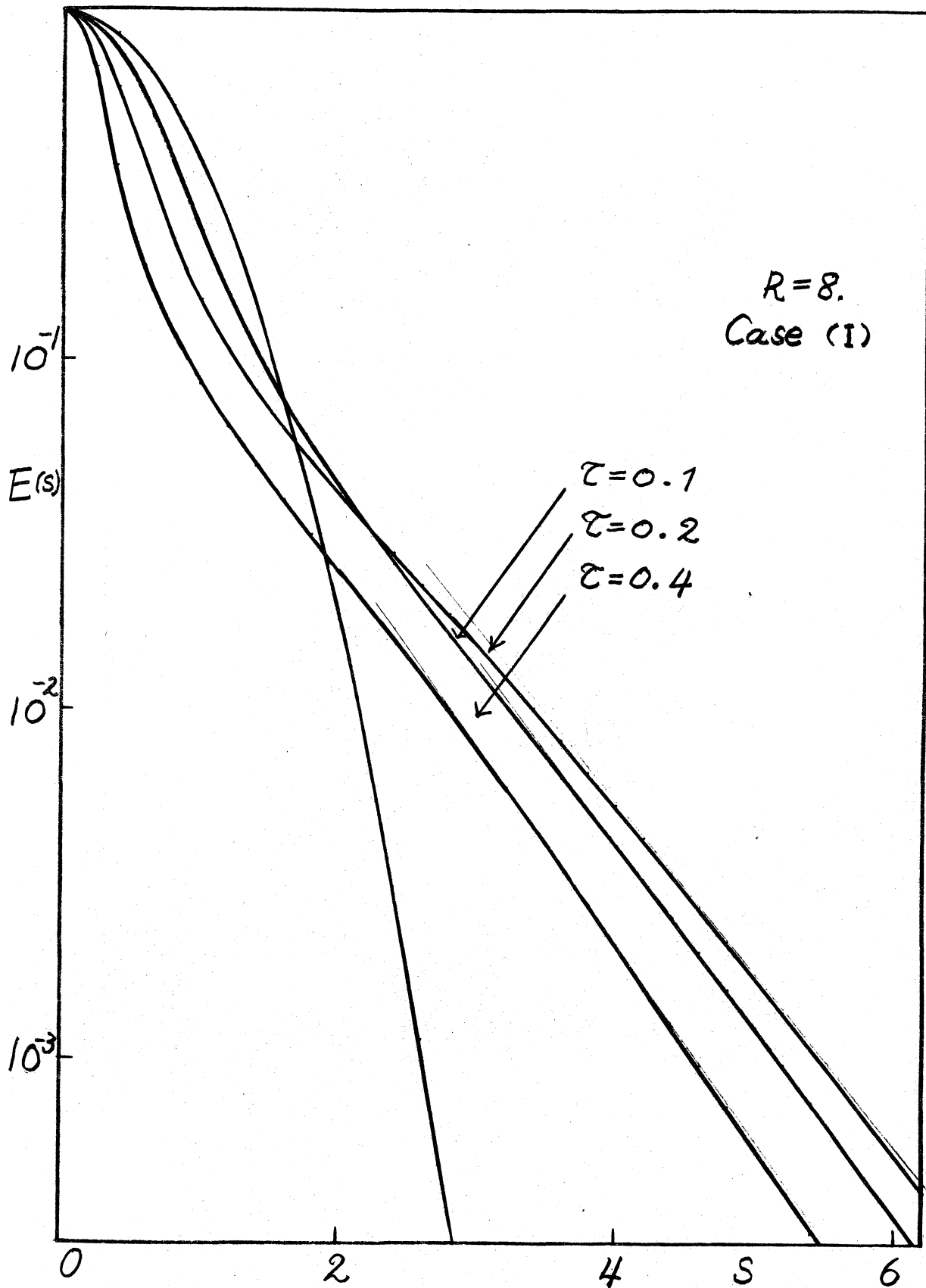
$$\times \{(i+j) E_i^k E_j^k - i E_j^k E_{i+j}^k - j E_i^k E_{i+j}^k\} \quad (18)$$

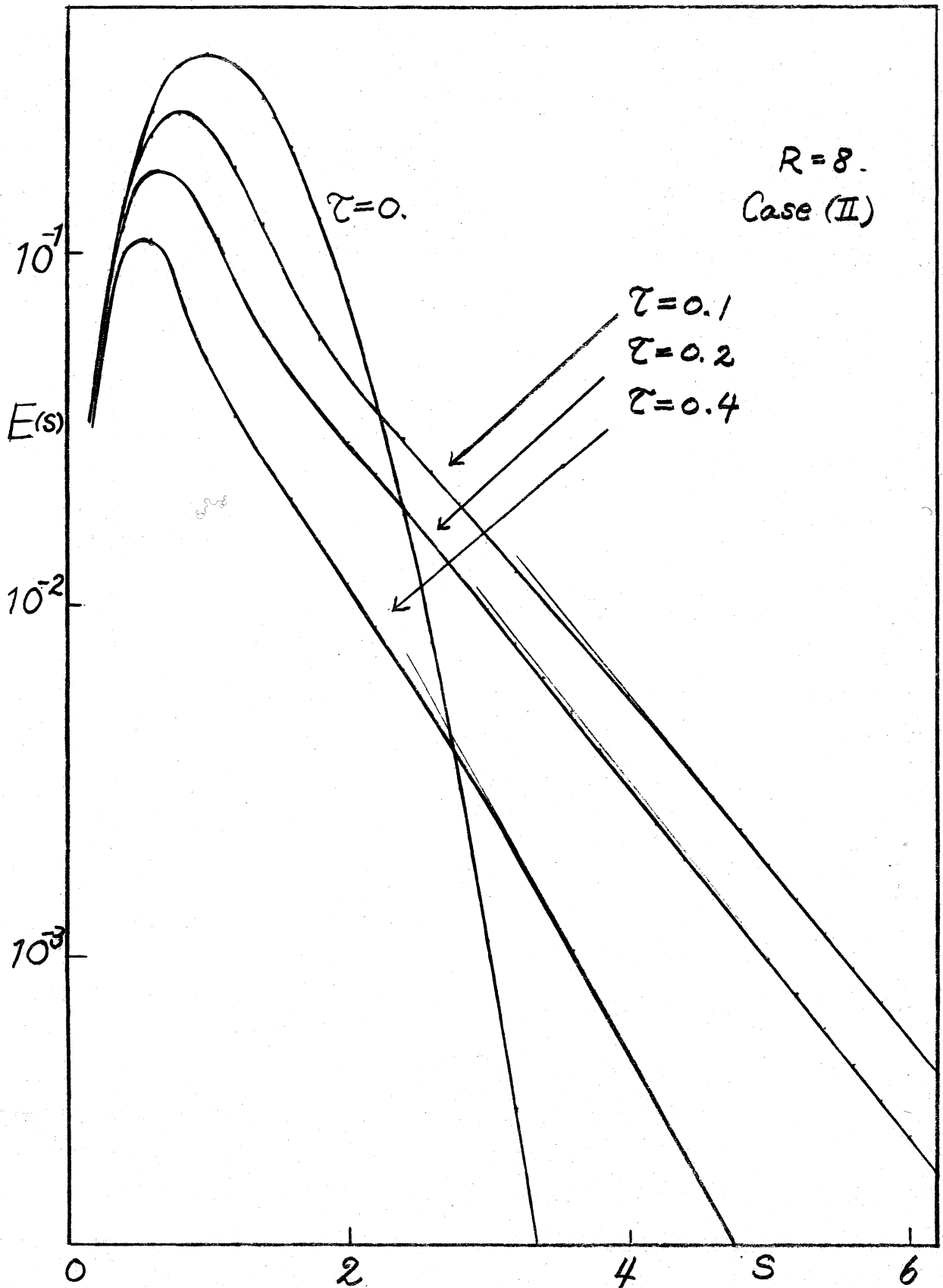
この差分方程式をつくる際に、⑬式の $-\infty$ から $+\infty$ までの積分を有限区間 $-I$ から I までで打ち切り、Simpsonの積分公式を用いた。積分の打ち切り誤差は、 I を2倍にしても有効数字の範囲内で結果が変わらないことから、無視できることを確かめた。時間微分は前進差分でおきかえた。

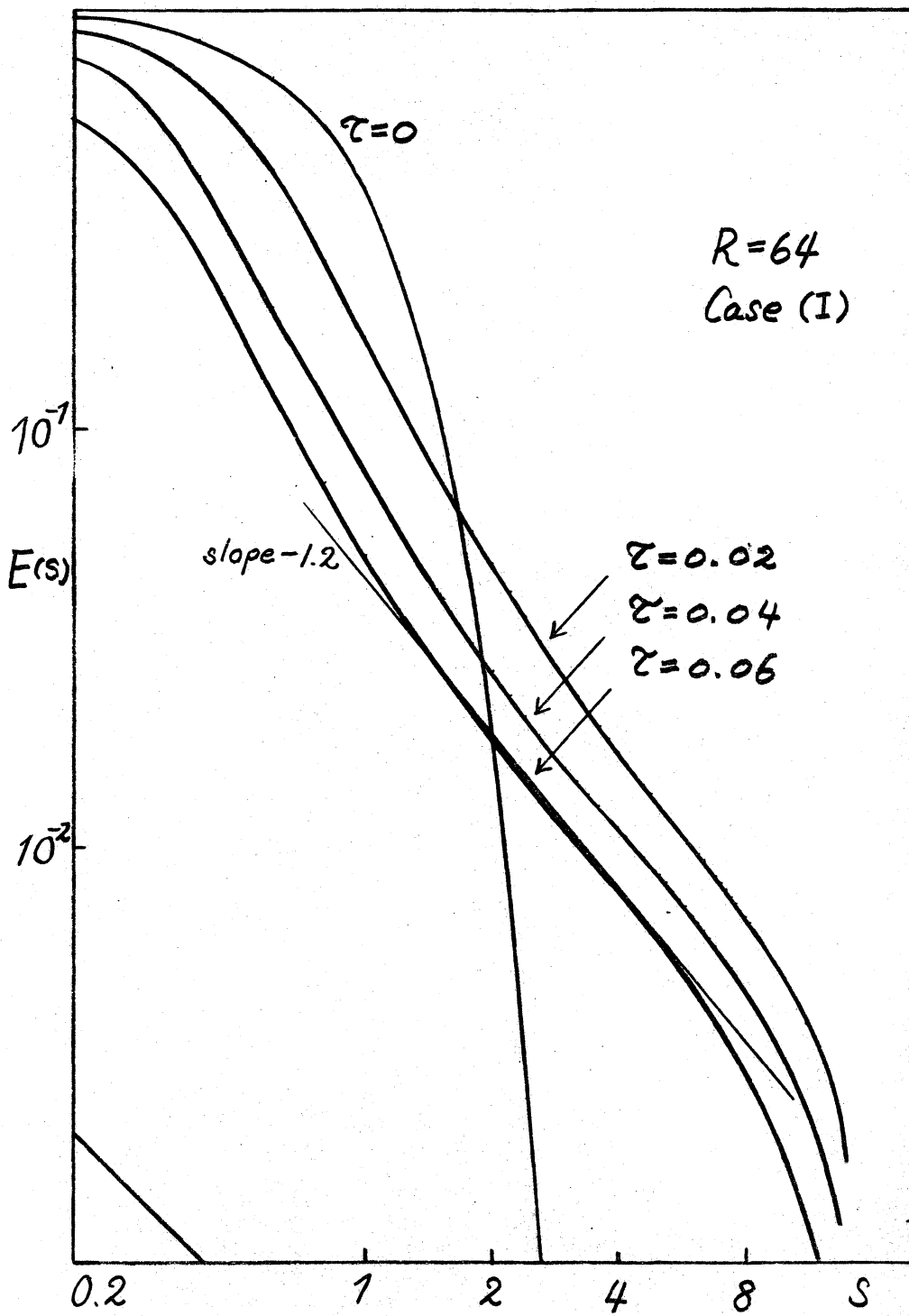
§5. Results

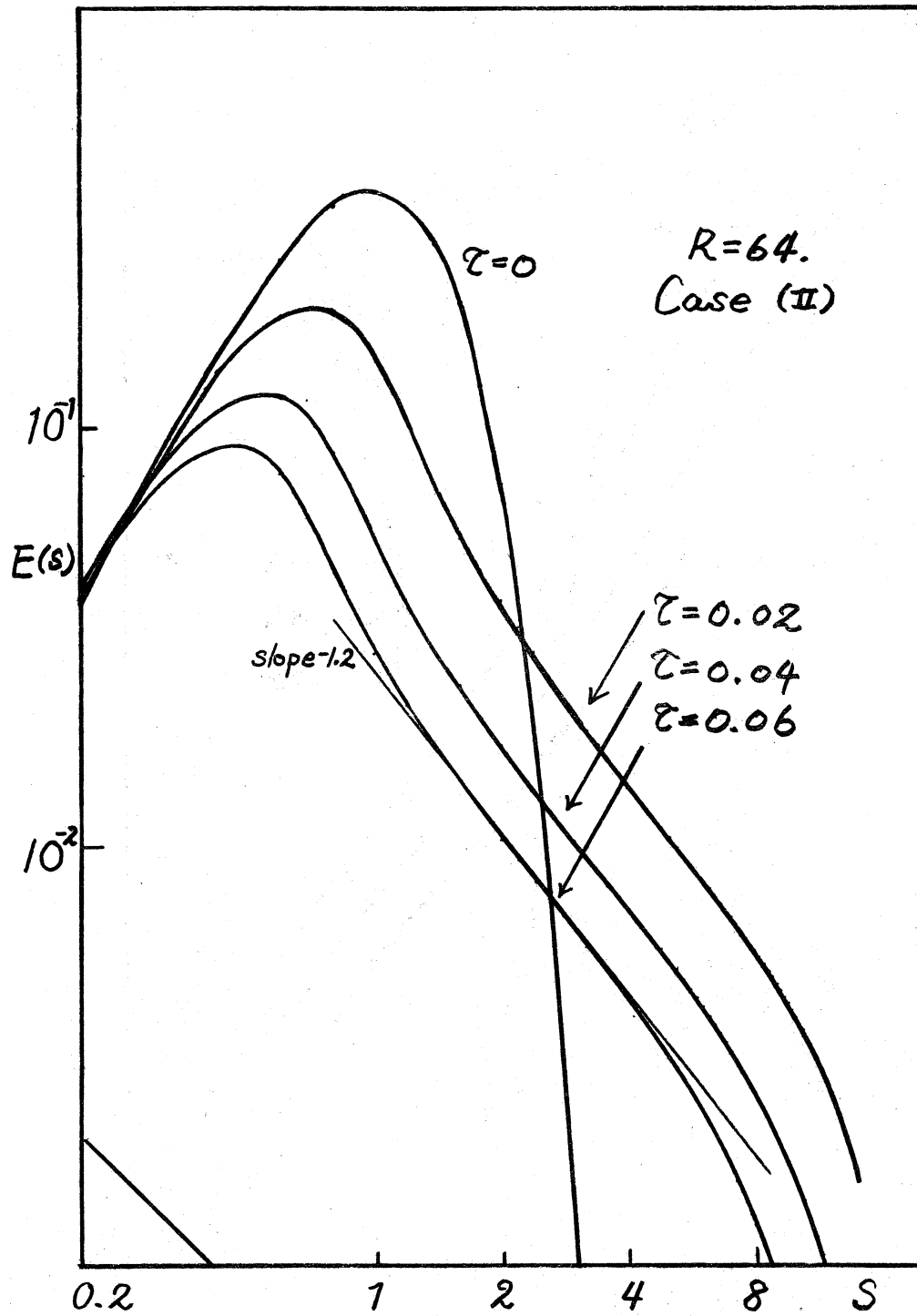
二種類の初期条件、(I) $E(s, 0) = e^{-s^2}$, (II) $E(s, 0) = s^2 e^{-s^2}$ に対して数値計算を行なった。(I)は $J \neq 0$ の場合に対応し、(II)は $J = 0$ の場合に対応している。(I)、(II)の場合共に、Reynolds数 $R = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ に対して計算を実行した。得られた結果は次の通りである。

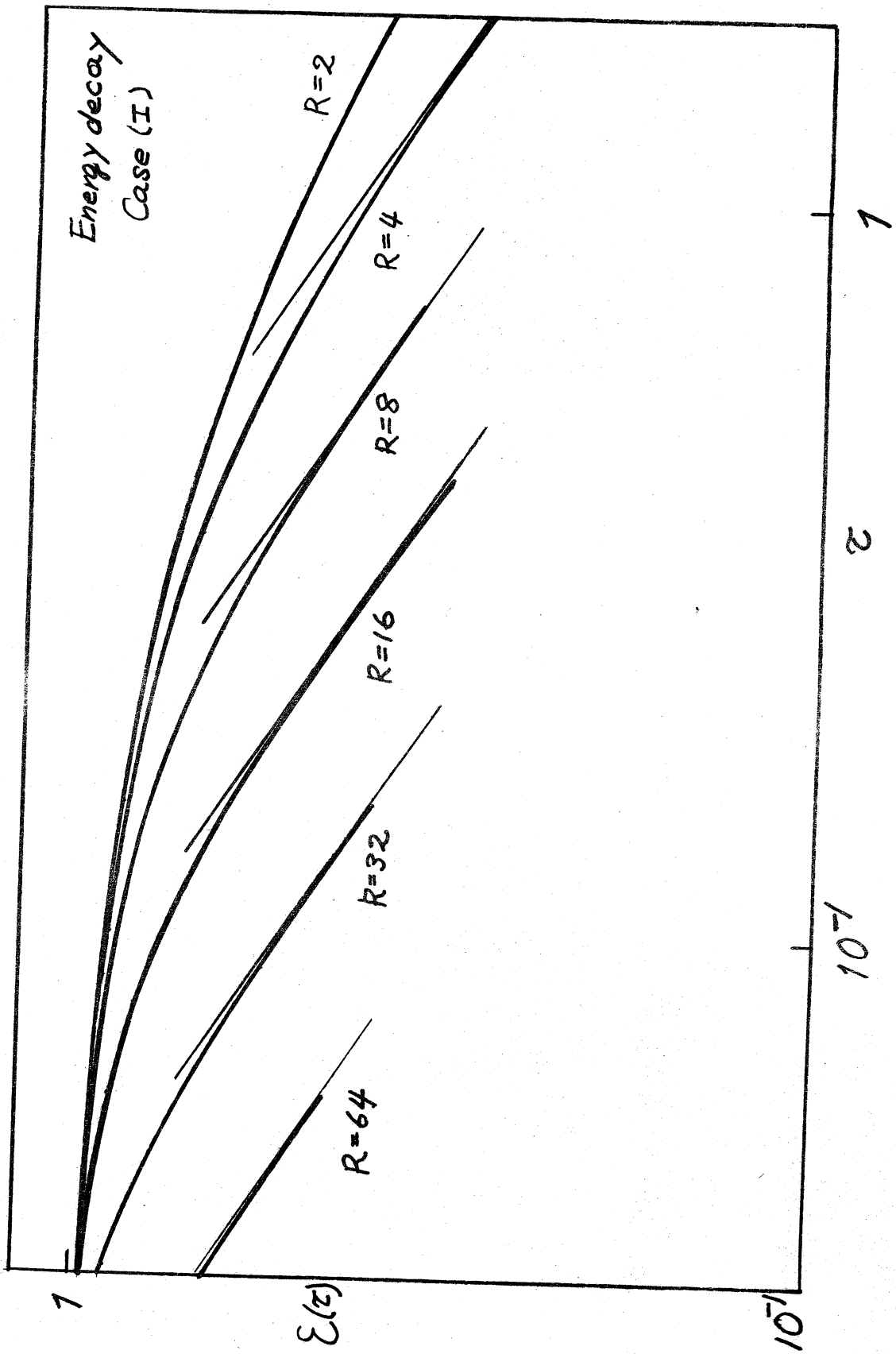
- (i) (I)、(II)の場合共に、全てのReynolds数において負エネルギーは発生しない。
- (ii) エネルギー $\mathcal{E}(\tau)$ の減衰法則は

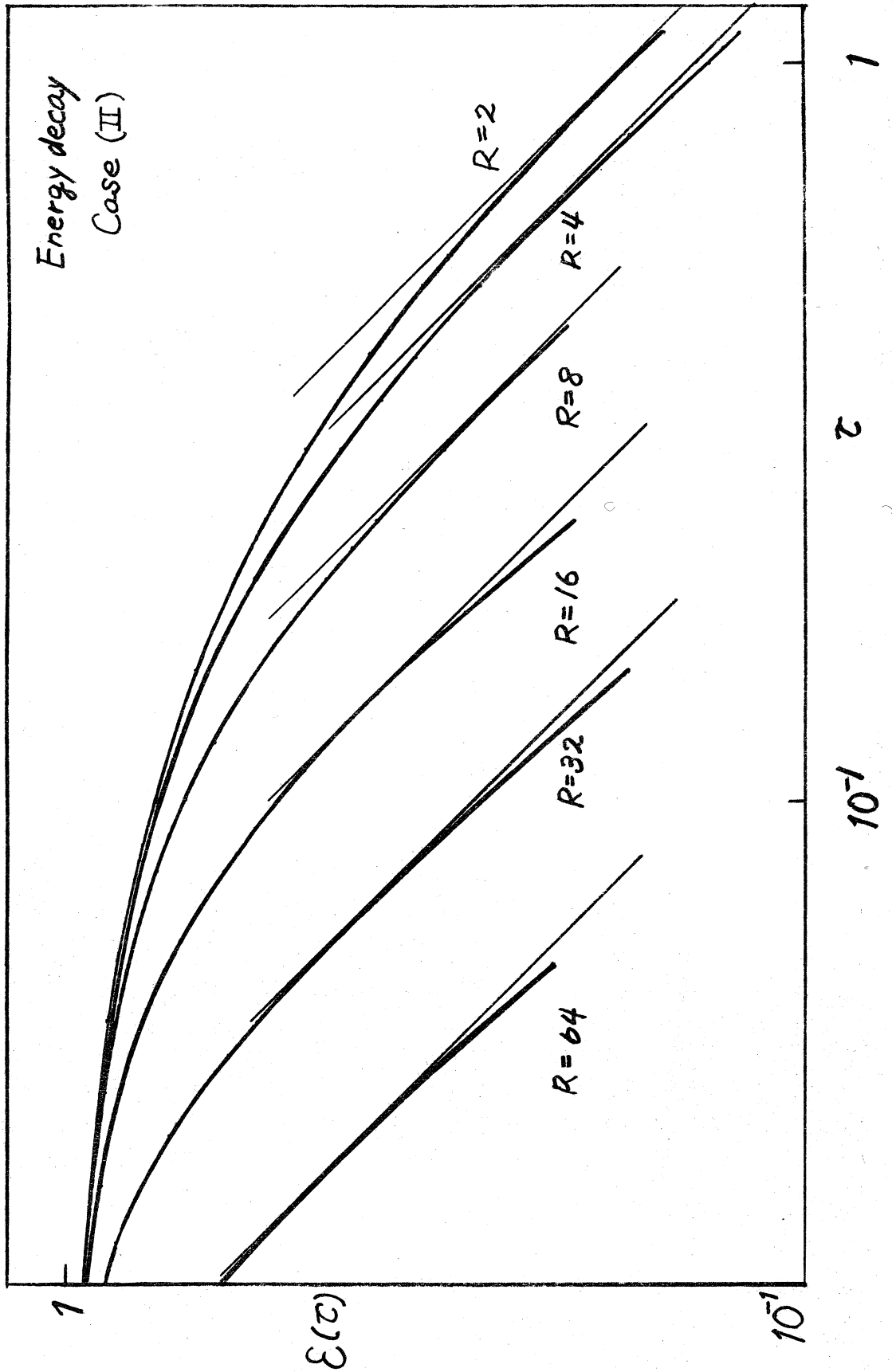












$$(I) \quad E(\tau) \sim \tau^{-\frac{2}{3}}$$

$$(II) \quad C(\tau) \sim \tau^{-1}$$

である。

- (iii) (I), (II) の場合共に $R < 16$ においてはべきのスペクトル法則は現われず、そのスペクトル形は、

$$E(s, \tau) \sim e^{-\frac{a}{R}s} \quad (a: \text{const.})$$

である。

- (iv) $R \geq 16$ においては、(I), (II) の場合共にべきのスペクトル部分が現われ、その部分より大きい波数においてはやはり上に述べた $e^{-\frac{a}{R}s}$ のスペクトルを示す。

このとき現われるエネルギー・スペクトルのべきは R が大きくなるにしたがって -1 に近づく。すなわち

$$E(s, \tau) \sim s^{-1} \quad (R \rightarrow \infty)$$

§ 6. Discussion

数値計算の結果得られたエネルギー減衰法則を見ると、

- (I) の場合、これは $E(s=0) \neq 0$ であるから $J \neq 0$ に対応し、§3. の (15) 式 $E(\tau) \sim \tau^{-\frac{2}{3}}$ と完全に一致している。(II) の場合、これは $E(s=0) = 0$ であるから $J = 0$ に対応し、§3. の (16) 式

$\mathcal{E}(t) \sim t^{-1}$ と完全に一致している。また、Crow and Canavan (1970) の数値計算とも一致している。数値計算で得られたスペクトル形 $E(s) \sim e^{-R^a s}$ は広い波数領域で、しかも、 R の広い領域で成り立っている。このスペクトル形は δ_3 で $R \gg RV/2\pi t$ に対して求めたエネルギー・スペクトルの形と同じである。 R をさらに大きくしていったときに現われるべきスペクトルのべきの値は -1 に近づく。 δ_3 の①式の -2 のべきは計算途中の一瞬現われるだけで、時間がたつと、 -1 に近づく。 s^{-2} のスペクトルは $t \rightarrow \infty$ で漸近的に現われるスペクトルではなく、 $t \rightarrow \infty$ で実際に現われるのは s^{-1} のスペクトルである。これは δ_3 の①式を求めたとき各々のシュックを考え、シュックの統計を考慮に入れなかったため、シュックの統計も考慮に入れば s^{-1} のスペクトルが得られるであろうと思われる。

これらの結果から次のことがわかった。0-4次キュムラント近似は比較的小さい Reynolds 数の乱流に対してのみ正しい近似であると思われてきたが、本稿のような修正を行なうと、負エネルギーが発生することなしに、高波数のエネルギー・スペクトルに対して、十分大きい Reynolds 数まで正しい結果を与える。

ここで用いられた近似は3次元の Navier-Stokes 方程式

に対しても同様に適用できる。

References

- 1) I. Proudman and W. H. Reid : *Phil. Trans.* A247
(1954) 163
- 2) T. Tatsumi : *Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* (1954) 307
- 3) T. Tatsumi : *Proc. Roy. Soc.* A 239 (1957) 16
- 4) Y. Ogura : *J. Fluid Mech.* 16 (1963) 33
- 5) D. T. Jeng, R. Foerster, S. Haaland and W. C. Meecham : *Phys. of Fluids* 9 (1966) 2114
- 6) T. Kawahara : *J. Phys. Soc. Japan* 25 (1968) 892
- 7) W. P. M. Malfliet : *Physica* 45 (1969) 257
- 8) S. C. Crow and G. H. Canavan : *J. Fluid Mech* 41
(1970) 387