

可換環上のある Galois object について

岡山大 理 中島 信

§ 1. 序.

ここでは, [1] において定義された可換環上の Galois object をある条件のもとで構成し, さらに Galois object の Frobenius 性について考へる (定理 2, 5).

以下 R は単位元をもつ可換環, $\otimes = \otimes_R$, $H \in \text{Hopf } R\text{-algebra}$ とし, その comultiplication $\in \Delta$, counit $\in \varepsilon$ で表わすことにする. また Hopf algebra 等に関する記号は Sweedler [6] に従うものとする.

はじめにここで使われる定義について述べよ.

定義 1. $S \in R\text{-algebra}$ とする. S が left $H\text{-module algebra}$ であり, S が left $H\text{-module}$ であり, 次の条件を満足するときをいう.

$$(i) \quad h(xy) = \sum_{(h)} (h_{(1)}x)(h_{(2)}y), \quad (h \in H; x, y \in S).$$

$$(ii) \quad h \cdot 1 = \varepsilon(h) \cdot 1.$$

定義 2. S を R -algebra とする. S が right H -comodule algebra とは, R -algebra homomorphism $\alpha: S \rightarrow S \otimes H$ で次の条件をみたすものが存在するときをいう.

$$(i) \quad (\alpha \otimes 1)\alpha = (1 \otimes \Delta)\alpha.$$

$$(ii) \quad (1 \otimes \varepsilon)\alpha = 1.$$

S が Galois H -object であるとは, S が right H -comodule algebra であり, さらに

(iii) S は faithfully flat R -module.

(iv) $S \otimes S \ni x \otimes y \xrightarrow{\gamma} (x \otimes 1)\alpha(y) \in S \otimes H$ が R -algebra isomorphism であるときをいう.

H を f. g. projective R -module かつ antipode $\lambda \in H$ をとしよう (このような Hopf R -algebra を finite Hopf R -algebra と呼ぶことにする). このとき R -module S に対して次の自然な同型がある.

$\text{Hom}_R(S, S \otimes H^*) \cong \text{Hom}_R(S, \text{Hom}_R(H, S)) \cong \text{Hom}_R(H \otimes S, S)$
ただし $H^* = \text{Hom}_R(H, R)$ とする. この同型により次のことは容易にわかる.

S : right H^* -comodule algebra, $\alpha(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in S \otimes H^*$

$\Rightarrow S$: left H -module algebra, $h \cdot x = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes h x_{(2)}$,
 $(x \in S, h \in H)$.

S : left H -module algebra

$\Rightarrow S$: right H^* -comodule algebra, $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n h_i x \otimes h_i^*$,
 \therefore に $\{h_i, h_i^*\}_{i=1}^n$ は H の R -projective coordinate system
とす。

以下において, right H^* -comodule algebra \in left H -
module algebra とみる場合, 又は逆に left H -module
algebra \in right H^* -comodule algebra とみる場合は上
記の見方で考へるものとする。

定義3. Galois H^* -object S が left H -module と
して H と同型であるとき, $S \in$ Galois H -algebra とす。

§2. Galois H -object の構成.

$H \otimes H$ は comultiplication Δ によつて left H -module
であるから, left H -module algebra S に対応して $F(S) =$
 $\text{Hom}_H(H \otimes H, S)$ とおき, $[(h_1 \otimes h_2) f](x \otimes y) = f(x h_1 \otimes$
 $y h_2)$ ($x, y, h_i \in H, f \in F(S)$) とおけば, $F(S)$ は left
 $H \otimes H$ -module となる。さらに

$$\varphi: S \otimes S \longrightarrow F(S)$$

を $\varphi(x \otimes y)(h_1 \otimes h_2) = (h_1, x)(h_2, y)$ ($x, y \in S, h_i \in H$) とすれば, φ は $H \otimes H$ -module homomorphism である.

補題 1. $H \in$ finite Hopf R -algebra, $S \in$ faithfully flat R -module とする. このとき次は同値である.

- (i) S は Galois H^* -object である.
- (ii) S 上で定義した φ が同型を与えるような H -module algebra である.

証明. $S \in H$ -module algebra とし次の図式を考へる.

$$\begin{array}{ccc} S \otimes S & \xrightarrow{\varphi} & F(S) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \psi \\ S \otimes H^* & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}_R(H, S) \end{array}$$

ここで $\gamma(x \otimes y) = \sum_{i=1}^n x(h_i y) \otimes h_i^*$, $\psi(f)(h) = f(1 \otimes h)$,
 $\delta(x \otimes h^*)(h) = h^*(h)x$ ($x, y, \lambda \in S, f \in F(S), h \in H$,
 $h^* \in H^*$, $\{h_i, h_i^*\}_{i=1}^n$ は H の R -projective coordinate system).
 このときこの図式は可換であり, δ は isomorphism である.
 さらに $\psi': \text{Hom}_R(H, S) \longrightarrow F(S)$ を $\psi'(g)(h \otimes h') = \sum_{\omega} h_{\omega} g(\lambda(h_{\omega})h')$ ($g \in \text{Hom}_R(H, S), h, h' \in H$) とすれば
 ψ' は ψ の逆写像である. 従って φ が isomorphism であること

α が isomorphism であることは同値。よって前に注意した right H^* -comodule と left H -module の見方から、補題は成立する。

さて Hopf R -algebra H に対して次のような条件を考える。

(F) H は finite, commutative, cocommutative Hopf algebra であり, ${}_H H \cong {}_H H^*$ が成立する。ここで H^* の H -module structure は $(hf)(x) = f(\lambda(h)x)$ ($h, x \in H, f \in H^*$) で考える。

S が Galois H -algebra とすれば, ${}_H S \cong {}_H H \cong {}_H H^*$ より H -module isomorphism $\eta: S^* = \text{Hom}_R(S, R) \rightarrow H$ が存在する。従って次の H -module homomorphism を得る:

$$D: H \xrightarrow{\eta^{-1}} S^* \xrightarrow{\mu^*} (S \otimes S)^* \cong S^* \otimes S^* \xrightarrow{\eta \otimes \eta} H \otimes H$$

(μ は S の multiplication である)。 μ の associativity から, D は coassociative, すなわち, $(D \otimes 1)D = (1 \otimes D)D$ である。そこで $H(D) = H^*$ (R -module として) とおくと, $H(D)$ は次の演算によって algebra となる。

$$(f \cdot g)(x) = (f \otimes g) \Delta(x) D(1) \quad (f, g \in H(D), x \in H).$$

さらに次が成立する.

定理 2. H は条件 (F) を満足するものとする. S が Galois H -algebra ならば, Galois H^* -object として $S \cong H(D)$ である.

証明. D の定義から, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} S^* & \xrightarrow{\mu^*} & (S \otimes S)^* \cong S^* \otimes S^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \otimes \eta \\ H & \xrightarrow{D} & H \otimes H \end{array}$$

従って $\eta^* D^* = \mu(\eta^* \otimes \eta^*)$. $H(D)$ の乗法は D によってきまり, η は H -module isomorphism であるから, $\eta^*: H(D)$ S は H -module isomorphism から R -algebra isomorphism である. よって定理は証明された.

定理 2 では $H \in$ finite, commutative, cocommutative Hopf R -algebra とし, ${}_H H \cong {}_H H^*$ のもとで, Galois H -algebra を構成した. そこで ${}_H H \cong {}_H H^*$ なる Hopf algebra について考えてみる. Larson-Sweedler [3] によって (一般的には Endo [2], Pareigis [5]) 次のことが知られて

いす。

$H \in$ finite Hopf R -algebra とすると, left H -module と
して $H^* \cong H \otimes P$, P は projective rank 1 の R -module.

従って $\text{Pic}(R) = 0$ ならば, left H -module として $H^* \cong H$
である. 同様にして $H^* H^* \cong H^* H$ (ここで $H \cong H^{**}$ とみて H^* -
module structure を入れる). $\text{Pic}(R) \neq 0$ であっても次のよ
うな具体的な例がある.

(1) G を有限アベル群, RG をその group ring とする.
このとき RG は自然な構造で, finite, commutative,
cocommutative Hopf R -algebra となる. さらに RG -
module として $(RG)^* \cong RG$ である.

(2) $R \in GF(p)$ ($p \neq 0$, 素数) 上の algebra とし $H = R d_0 \oplus$
 $R d_1 \oplus \dots \oplus R d_{p-1}$, $\{d_0 = 1, d_1, \dots, d_{p-1}\}$ は R -free basis,
とおく. H は次の演算によって finite, commutative,
cocommutative Hopf R -algebra である.

$$d_i d_j = \binom{i+j}{i} d_{i+j},$$

$$\Delta(d_n) = \sum_{i=0}^n d_i \otimes d_{n-i},$$

$$\varepsilon(d_i) = \delta_{i,0},$$

$$\lambda(d_i) = (-1)^i d_i.$$

$d_i^* \in d_i$ の dual basis とするとき, $H^* = R d_0^* \oplus R d_1^* \oplus \dots \oplus R d_{p-1}^*$
は finite, commutative, cocommutative Hopf R -algebra

である. $f = \sum_{i=1}^{p-1} d_i^*$ とおくと, f は H^* の H -module としての free basis になる. 実際 $h_i = \sum_{j=1}^{p-1} r_{ij} d_j$ ($r_{ij} \in R$) とおき, $h_i f = d_i^*$ となる h_i を求めることができればよいが, これは r_{ij} についての連立方程式とみたとき, その係数の行列式が $GF(p)$ の non-zero element であることよりわかる. 従って ${}_H H \cong {}_H H^*$ である.

上で与えられた Hopf R -algebra について, その Galois object は

(1) の場合. S が commutative Galois $(RG)^*$ -object.

$\iff S$ は Galois group G をもつ R の Galois 拡大.

(Chase-Sweedler [1]).

(2) の場合. S が commutative H -algebra.

$\iff S \cong R[x]/(x^p - a)$ ($a \in R$).

証明. H -module として $\psi: H \rightarrow S$ なる isomorphism があるから, $\psi(1) = x \in S$ とおくと, $\{x, d_1(x), \dots, d_{p-1}(x)\}$ は S の free basis であり, $d_{p-1}(x)$ は R の unit element である. これより $d_1(y) = 1$ となる $y \in S$ が存在する. このとき $\{1, y, \dots, y^{p-1}\}$ で生成される S の R -subalgebra T とおくと, $\{1, y, \dots, y^{p-1}\}$ は R -free basis であり, T は Galois H^* -object である. 従って $S = T \cong R[x]/(x^p - y^p)$

$(y^p \in R)$.

§3. Galois object の Frobenius 性.

§2 において考えた例においては, $H^* H^* \cong H^* H$ も成立している. H が antipode をもてば, H^* も antipode をもつ, 従って H^* は Galois H^* -object となる. このことより Galois H^* -object が R のどんな拡大であるかを調べるには " H^* が R のどんな拡大であるか?" ということが一つの目安になるものと思われる. 例えば

$H \in$ finite cocommutative Hopf R -algebra, $S \in$ commutative Galois H^* -object とする. このとき H^* が separable R -algebra であれば, S は separable R -algebra である. 一般に Galois object が separable R -algebra であっても, それは必ずしもガロア拡大ではない.

例. $G \in$ 位数 n の有限群, n が R の unit element であるとする. このとき group ring RG は separable R -algebra であるが, R のガロア拡大にならないことがある.

$H \in$ finite cocommutative Hopf R -algebra, $S \in$ commutative R -algebra とする. S が left H -module ならば, S と H の smash product $S \# H$ が定義される,

すなわち, R -module として $S \# H = S \otimes H$ ($S \# H$ の元 ε $s \# h$ とかくことにする.), $S \# H$ における積 ε

$$(x \# g)(y \# h) = \sum_{(g)} x(g_{(1)} y) \# g_{(2)} h \quad (x, y \in S; g, h \in H)$$

と定義すれば, $S \# H$ は R -algebra である. また S は

$(s \# h)(x) = s(hx)$ ($s, x \in S; h \in H$) によって left $S \# H$ -module である.

定理 3 (Chase-Sweedler [1]). $H \in$ finite cocommutative Hopf R -algebra, $S \in$ commutative R -algebra とする.

このとき次は同値である.

(i) S は Galois H^* -object である.

(ii) S は left H -module algebra であり

$$S \# H \ni s \# h \xrightarrow{\tilde{\gamma}} (x \mapsto s(hx)) \in \text{Hom}_R(S, S)$$

が R -algebra isomorphism である.

定理 4. S は commutative R -algebra であり, R -module として f. g. projective faithful であるとする. このとき次は同値である.

(i) S は R の Frobenius 拡大である.

(ii) $S^* = \text{Hom}_R(S, R)$ は free S -module である.

(iii) $\text{Hom}_R(S, S)$ は free $S \otimes S$ -module である. \square

て $\text{Hom}_R(S, S)$ の $S \otimes S$ -module structure は次のものとする。
 $[(s \otimes t) \varphi](x) = s(\varphi(xt))$ ($s, t, x \in S, \varphi \in \text{Hom}_R(S, S)$).

証明. (i) \Leftrightarrow (ii) は Frobenius 拡大の定義から自明.

(ii) \Leftrightarrow (iii) を示す. $(s \otimes t)(x \otimes f) = sx \otimes tf$ ($s, t, x \in S, f \in S^*$, $(tf)(x) = f(xt)$) により $S \otimes S^*$ は $S \otimes S$ -module であり, $S \otimes S$ -module として $\text{Hom}_R(S, S) \cong S \otimes S^*$ である. これより (ii) \Leftrightarrow (iii) を得る.

さて, $H \in$ finite cocommutative Hopf R -algebra, $S \in$ commutative R -algebra とする. H^* は commutative R -algebra であるから, H^* は (H^* の乗法により) H^* -module である. 従って $H^{**} \cong H$ は H^* -module である. その構造は次で与えられている.

$$(f \cdot h)(g) = h(f \cdot g) = (f \otimes g) \Delta(h) \quad (h \in H; f, g \in H^*).$$

よって $S \otimes H$ は $S \otimes H^*$ -module である. $S \in$ left H -module algebra とすると, 前に注意したことから, S は right H^* -comodule algebra であり, 従って次の algebra homomorphism がある.

$$\gamma: S \otimes S \rightarrow s \otimes t \longmapsto \sum_{i=1}^m s(h_i \cdot t) \otimes h_i^* \in S \otimes H^* \quad (s, t \in S)$$

ただし $\{h_i, h_i^*\}_{i=1}^m$ は H の R -projective coordinate system.

この γ により $S \otimes H$ は $S \otimes S$ -module となる. さらに H

の H^* -module structure から, $h^*h = \sum_{(h)} h^*(h_{(1)})h_{(2)}$ ($h^* \in H^*$, $h \in H$) となること及び, S が commutative R -algebra かつ H -module algebra であることに注意すれば

$$\tilde{\gamma}: S \otimes H \longrightarrow \text{Hom}_R(S, S)$$

は $S \otimes S$ -module homomorphism である. これらのことより次の定理を得る.

定理 5. $S \in$ commutative R -algebra, $H \in$ finite, cocommutative Hopf R -algebra で, $H^*H \cong H^*H^*$ であるとする. このとき S が Galois H^* -object ならば, S は R の Frobenius 拡大である.

証明. $S \in$ Galois H^* -object とすれば, 定理 3 から $\tilde{\gamma}: S \otimes H \longrightarrow \text{Hom}_R(S, S)$ は isomorphism である. 仮定 $H^*H \cong H^*H^*$ より $S \otimes H^*$ -module として $S \otimes H \cong S \otimes H^*$. さらに R -algebra として $S \otimes S \cong S \otimes H^*$ であり, $S \otimes H$ の $S \otimes S$ -module structure はこの同型によって定められているから, $S \otimes H \cong \text{Hom}_R(S, S)$ は free $S \otimes S$ -module である. よって定理 3 から S は R の Frobenius 拡大である.

この証明は Yokogawa [7] における方法と同様である.

References

- [1] S. U. Chase and M. E. Sweedler; Hopf algebras and Galois theory, Springer Lecture Notes 97, 1969.
- [2] S. Endo; Hopf algebra の構造について, 数理解析研究所講究録94, "Derivations & ω Algebra の Cohomology 研究会報告集(1970), 76-92.
- [3] R. G. Larson and M. E. Sweedler; An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Amer. J. Math. 91 (1969), 75-94.
- [4] A. Nakajima; On generalized Harrison cohomology and Galois object, Okayama Math. J. to appear.
- [5] B. Pareigis; When Hopf algebras are Frobenius algebras, J. Alg. 18(1971), 588-596.
- [6] M. E. Sweedler; Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.
- [7] K. Yokogawa; On S_R -module structures of S/R -Azumaya algebras, to appear.