数理解析研究所講究録
235巻 1975年 66-74

高次微分とその応用

福岡教育大学　石橋康徳

Rを algebraic variety V/k 上の点の local ring とし．$\Omega_k^1(R)$ をRの k-differentials のなす R-module とする。簡単のために k は perfect field とする．次のことはよく知られている．

(1) Y. Nakai [8], E. Kunz [5].

Rは regular local ring である．$\Longleftrightarrow$ $\Omega_k^1(R)$ は free R-module である．

したがって，$\mathrm{Der}^1(R/k) \cong \mathrm{Hom}_R(\Omega_k^1(R), R)$ を考えると，Rが regular ならば，$\mathrm{Der}^1(R/k)$ は free R-module である．この逆について，次のことが分っている．

(2) J. Lipman [6].

k の標数が0のときには，$\mathrm{Der}^1(R/k)$ が R-free ならば，Rは normal である．特に，$\dim V = 1$ ならば，Rは regular である．

$\dim V \geq 2$ のときにも，Rは regular であるだろうと予想されているが，未だ解決していない．この予想に関して，最も良い結果は次のものであろう．

(3) G. Scheja – U. Storch [10].

kの標数が0で、Vがhypersurfaceのときには、$\mathrm{Der}^1(R/k)$がR-freeならば、Rはregularである。

ところで、kの標数が$p>0$のときには、$\dim V=1$であっても、$\mathrm{Der}^1(R/k)$のR-freenessはRのregularityを意味しない。[6].

これらに対して、高次微分を使って、Rのregularityを特徴づけられないかと考える。現に、いくつかの結果が得られているが、それらについて述べる前に少し準備をしよう。

k, Rをcommutative ringsとし、Rをk-algebraとする。k-linear mapping $D: R \to R$が、n-th order derivationであるとは、$\forall x_0, x_1, \cdots, x_n \in R$に対して、

$$D(x_0x_1\cdots x_n) = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{i_1<\cdots<i_s} x_{i_1}\cdots x_{i_s} D(x_0\cdots\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_s}\cdots x_n)$$

となるときをいう。

$R/k \to R$なるn-th order derivations全体の集合を$\mathrm{Der}^n(R/k)$と表わすと、$\mathrm{Der}^n(R/k)$は、自然にleft R-moduleになる。

次のことが分っている。[9].

a) $m \geq n \Rightarrow \mathrm{Der}^n(R/k) \subset \mathrm{Der}^m(R/k)$.

$\mathrm{Der}^n(R/k) - \mathrm{Der}^{n-1}(R/k)$の元を、proper n-th order derivationという。

b) $D \in \mathrm{Der}^m(R/k)$, $E \in \mathrm{Der}^n(R/k) \Rightarrow DE \in \mathrm{Der}^{m+n}(R/k)$.

したがって.

$$\mathrm{Der}(R/k) = R \oplus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Der}^n(R/k)$$

とおくと、これは $\mathrm{Hom}_k(R, R)$ の subring になる. $\mathrm{Der}(R/k)$を R/k の derivation algebra という. 一方. $\mathrm{Der}^1(R/k)$によって生成される $\mathrm{Der}(R/k)$ の subalgebra を $\mathrm{der}(R/k)$ と表わす.

Y. Nakai の予想.

R を algebraic variety V/k 上の点の local ring とする. kの標数が0ならば、次のことは同値である.

1) R は regular である.

2) $\mathrm{Der}(R/k) = \mathrm{der}(R/k)$.

これに関連して、次のような予想がある.

T. Bloom の予想.

V を analytic space とし. $p \in V$ とする. $\mathrm{Diff}(V)$によって、V 上の differential operators の sheaf を表わす. この sheaf の点 p における stalk $\mathrm{Diff}_p(V)$ が $\mathcal{O}_p(V)$-algebra として、$\mathrm{Der}^1_p(V)$ によって生成されるならば、V は p で non-singular である.

注意. $\mathrm{Diff}_p(V) = \mathrm{Der}(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$, $\mathrm{Der}^1_p(V) = \mathrm{Der}^1(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$ である.

Y. Nakai の予想について.

1)$\Rightarrow$2) は明らかに成立する. 問題は 2) $\Rightarrow$ 1) である. 今迄のところ、次の結果が得られている.

(4) K.R. Mount – O.E. Villamayor [7].

$\dim V = 1$ ならば、Y. Nakaiの予想は正しい。

(5) W. Brown [3].

depth $\mathfrak{p} = 1$ なる R の prime ideal については、ht $\mathfrak{p} = 1$ と仮定する。このときには、Y. Nakai の予想は正しい。したがって、R が Macaulay ring ならば、Y. Nakai の予想は正しい。

ところで、最近 purdue の J. Becker は、T. Bloom の予想を肯定的に解決した。[1].

次に、ground field k の標数が $p > 0$ の場合を考えよう。この場合、Y. Nakaiの予想の自然な一般化は次のようになるであろう。

R は regular である。$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Der}(R/k)$ は、proper p^i-th order derivations $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ によって生成される。

これに関して、$\dim V = 1$ の場合に、いくらか弱い結果を得た。それを述べる前に、higher derivation について説明しよう。

R/k の higher derivation とは、$R \to R$ なる k-linear mappings の infinite sequence $\{\delta_0 = 1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ で、$\forall x, y \in R$ に対して、

$$\delta_n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(x)\,\delta_{n-i}(y) \quad (\forall n)$$

となるものをいう。$\delta_n \in \mathrm{Der}^n(R/k)$ である。[9]. さらに、$\delta_i \delta_j = \binom{i+j}{i} \delta_{i+j}$ がみたされるとき、この higher derivation は iterative であるという.

定理. V は代数閉体 k 上定義された algebraic curve とする. R によって V 上の k-rational point の local ring を表わす. 次のことは同値である.

1) R は regular である.

2) R/k の iterative higher derivation で, その components が R-algebra $\mathrm{Der}(R/k)$ を生成するものが存在する.

注意. $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ を, R/k の iterative higher derivation とすると, $\delta_i\delta_j = \binom{i+j}{i}\delta_{i+j}$ だから, その components が R-algebra として $\mathrm{Der}(R/k)$ を生成する. $\Longleftrightarrow$ その components が R-module として $\mathrm{Der}(R/k)$ を生成する.

証明. 本質的な部分は 2) $\Rightarrow$ 1) の証明で しかも k の標数が $p>0$ の場合である. 証明の概略を述べよう. 詳細は [4] を参照されたい. $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ を, 条件をみたす R/k の iterative higher derivation とする. $R\to R$ なる high order derivation は continuous だから, $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$ は一意的に, $\hat{R}/k$ の higher derivation に延長される. 延長したものを同じ記号で表わす. ここに, $\hat{R}$ は R の completion を表わす. ところで,

$$\mathrm{Der}(\hat{R}/k) \cong \hat{R} \otimes_R \mathrm{Der}(R/k)$$

だから, 仮定によって, $\hat{R}/k$ の任意の high order derivation

は、$\delta_1, \delta_2, \cdots$ の $\hat{R}$-linear combination である。$\overline{R}$ (resp. $\overline{\hat{R}}$) によって、R の商体 (resp. $\hat{R}$ の全商環) における integral closure を表わすと、

$$\overline{\hat{R}} \cong \widehat{\overline{R}} \cong k[[t_1]] \oplus \cdots \oplus k[[t_n]]$$

である。ここに、$\widehat{\overline{R}}$ は semi-local ring $\overline{R}$ の Jacobson radical による completion である。

$$\partial_i^{(j)}(t_j^m) = \binom{m}{i} t_j^{m-i} \quad (1 \leq j \leq n,\ i \geq 1)$$

によって定義される $k[[t_j]]$ の i-th order derivation $\partial_i^{(j)}$ を考え、

$$D_i = \partial_i^{(1)} \oplus \cdots \oplus \partial_i^{(n)} \quad (i \geq 1)$$

とおく。$\{D_i\}_{i \geq 1}$ は、$\overline{\hat{R}}$-module $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{Der}^m(\overline{\hat{R}}/k)$ の free basis で、しかも、$\{1, D_1, D_2, \cdots\}$ は、$\overline{\hat{R}}/k$ の iterative higher derivation である。$\mathfrak{c} = \hat{R} : \overline{\hat{R}}$ とおく。$k[[t_i]]$ の単位元を e_i と表わすと、

$$e_i \mathfrak{c} = (t_i^{a_i}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

となる。R、したがって、$\hat{R}$ が regular でないとすると、ある $a_i \geq 1$ となる。例えば、$a_1 \geq 1$ としよう。このときには、

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} (e_1 \mathfrak{c})^s = (0)$$

である。これが、矛盾を与えることを示そう。整数 r を、$p^r \geq \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ となるようにとる。$D \in \mathrm{Der}^{p^r}(\overline{\hat{R}}/k)$ は、

$$D = g_r D_{p^r} + (\text{lower order}),\quad g_r \in \overline{\hat{R}}$$

と書ける。実は、このとき、

$$D(\hat{R}) \subset \hat{R} \implies g_r \in \mathcal{L}$$

となることが示される。$f \in \mathcal{L}$, $e_1 f \neq 0$ とする。

$f D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}}$ は、$\hat{R} \to \hat{R}$ なる high order derivation を与える。したがって、仮定により、

$$f D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} = b\, \delta_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} + (\text{lower order}),\quad b \in \hat{R} \qquad (*)$$

と表わせる。ところが、

$$\delta_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} = \delta_{p^r} \delta_{p^{r+1}} \cdots \delta_{p^{r+s}} \text{ で、}$$

$$\delta_{p^i} = g_i D_{p^i} + (\text{lower order}),\quad g_i \in \overline{\hat{R}} \quad (r \leq i \leq r+s)$$

だから、これらを (*) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned} f D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} &= b\,(g_r D_{p^r} + \cdots) \cdots (g_{r+s} D_{p^{r+s}} + \cdots) \\ &= b\, g_r \cdots g_{r+s} D_{p^r + p^{r+1} + \cdots + p^{r+s}} + \cdots \end{aligned}$$

となる。

$$\therefore f = b\, g_r \cdots g_{r+s}.$$

ところで $\delta_{p^i}(\hat{R}) \subset \hat{R}$ で $\delta_{p^i} \in \mathrm{Der}^{p^i}(\hat{R}/k)$ と考えられるから、$g_i \in \mathcal{L}$ $(r \leq i \leq r+s)$ である。

$$\therefore e_1 f = e_1 b\, g_r \cdots g_{r+s} \in (e_1 \mathcal{L})^s.$$

s は任意だから、

$$e_1 f\,(\neq 0) \in \bigcap_s (e_1 \mathcal{L})^s = (0). \text{ 矛盾！}$$

q.e.d.

参考文献

[1] J. Becker, Differential operators on complex analytic sets and a condition for nonsingularity, to appear.

[2] T. Bloom, Operateurs differentials elliptiques sur un espace analytique, Seminaire Lelong, 158 – 166. Lecture Notes in Math. 275, Springer 1972.

[3] W. Brown, Higher derivations on finitely generated integral domains, proc. Amer. Math. Soc., 42 (1974), 23 – 27.

[4] Y. Ishibashi, A characterization of one dimensional regular local rings in terms of high order derivations, Bull. Fukuoka Univ. Education, 24 – III (1975), 11 – 18.

[5] E. Kunz, Die primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen, J. r. u. a. Math., 204 (1960), 166 – 182.

[6] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math., 87 (1965), 874 – 898.

[7] K. R. Mount – O. E. Villamayor, On a conjecture of Y. Nakai, Osaka J. Math., 10 (1973), 325 – 327.

[8] Y. Nakai, On the theory of differentials in commutative rings, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 63 – 84.

[9] Y. Nakai, High order derivations I, Osaka J. Math., 7 (1970), 1 – 27.

[10] G. Scheja - U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischen Algebren, Math. Ann., 197 (1972), 137 - 170.