数理解析研究所講究録
237 巻 1975 年 83-87

孤立特異点の無限小変形について.

京大 数理研 藤木明

(X,p)を孤立特異点とする。(X,p)の変形に関し次の定理が基本的である。

<u>定理</u>(i). (X,p)のversal deformationが存在する。さらに

(ii) $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X,\mathcal{O}_X)_p = 0$ ならば; deformationのparameter space S は nonsingular。この時 $\dim S = \dim \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X,\mathcal{O}_X)$。

この定理はGrauert[2]による。(ii)の特殊な仮定のもとでは. Tjurinaによって証明されていた。[7]。

しかし一般に(ii)の条件をチェックすることは, (X,p)がcomplete intersectionの場合を除き著しく困難である。本稿では, (X,p)の変形を, $X-p$の変形とinfinitesimalに比較することにより, (ii)の条件をみたす別の例を与える。以下(X,p)は<u>normal</u>。

<u>§1.</u> 考えをfixするため, Xは$\mathbb{C}^N=\mathbb{C}^N(z_1,\cdots,z_N)$のpolydisc $D=\{\sum_{i=1}^N |z_i|^2<1\}$のanalytic subset, $p=\mathbb{C}^N$の原点とする。

$U = X-p$, $W = D-p$ とおく。

<u>命題 1.</u> i) $^\exists j_1 : \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(U, \Theta_U)$ 自然な包含写像. さらにもし $\mathrm{depth}_p X \geqq 3$ ならば j_1 は bijective.

ii) $^\exists j_2 : \mathcal{E}xt^2(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(U, N_{U/W})$, 自然な包含写像. さらに $\mathrm{depth}_p X \geqq 3$ ならば j_2 は bijective。

iii) j_1 は (X, p) の変形から生ずる infinitesimal deformation map と可換. もっと正確に言うと, $f : (\mathcal{X}, p) \longrightarrow (S, 0)$ を (X, p) の任意の deformation とする。$U_\delta = \{ x \in X \mid \delta < \Sigma |z_i|^2 < 1 \}$ とおく時, f は U_δ の deformation を誘導する。これを $f_0 : \mathcal{U} \longrightarrow (S, 0)$ とする。f, f_0 に対しては infinitesimal deformation map $\rho : T \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$, $\rho_0 : T \longrightarrow H^1(U_\delta, \Theta_U)$ が各々定義される。$U_\delta \overset{\iota}{\hookrightarrow} U$ inclusion に対し $\iota^* : H^1(U, \Theta_U) \rightarrow H^1(U_\delta, \Theta_U)$ は Andreotti-Grauert により injective. ($\dim X \geqq 3$ なら bijective, trivial case $\dim X = 1$ は除外している). すると iii) は $\iota^* j_1 \rho = \rho_0$ を意味する。なお T は S の 0 における Zariski 接空間。

上の命題の幾何学的な意味づけとして.

<u>命題 2.</u> $\mathrm{depth}_p X \geqq 3$ とする。$f_0 : (\mathcal{U}, U_\delta) \longrightarrow (S, 0)$ を U_δ の任意の deformation とする時, f_0 は isolated singularity (X, p) の変形から上のようにして得られる。ただし, S : nonsingular.

S が一点よりなる時これは Rossi の結果 [6] である。Relative case は Ling, Siu, Ramis et Ruget らにより結果が得られている. 命題 2 は Ling, Thm (I)$_n$ [5] よりの結論である。

さて $\sigma : (\tilde{X}, A) \to (X, p)$ を (X, p) の resolution とする。次の事実に、まず注意する。

定理3. 次の条件は同値。

(i). $\operatorname{depth}_p X \geq k$

(ii) $R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$, $1 \leqq i \leqq k-2$。

これは Grauert-Riemenschneider の消滅定理 [3] 及び Serre duality より導かれる。

$(\tilde{X}, A)$ と (X, p) の変形に関する一つの関係が次により与えられる。

命題4. $\hat{f} : (\tilde{\mathfrak{X}}, A) \longrightarrow (S, 0)$ を $(\tilde{X}, A)$ の 任意の deformation とする。もし $\operatorname{depth}_p X \geq 3$ ならば $\hat{f}$ の equiblowing down により (X, p) の変形が得られる。i.e. $\exists f : (\mathfrak{X}, p) \longrightarrow (S, 0)$, (X, p) の変形, $\exists \tilde{\sigma} : (\tilde{\mathfrak{X}}, A) \to (\mathfrak{X}, p)$ proper bimeromorphic morphism. s.t. $\tilde{\sigma}|\tilde{X} = \sigma$. で, $\hat{f} = f \cdot \tilde{\sigma}$ が成立する。

命題1と命題4に対応して

命題5. 命題4の状況で, $\exists \mu : H^1(\tilde{X}, \Theta_{\tilde{X}}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)_p$ 自然写像; かつ $\tilde{\rho} : T \longrightarrow H^1(\tilde{X}, \Theta_{\tilde{X}})$, $\rho : T \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ を夫々 $\hat{f}$, f に対する無限小変換写像とする時, $\mu \cdot \tilde{\rho} = \rho$.

(注) 命題4, 5は $R^1\sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ の仮定のもとで一般に成立する。定理3により特に $\operatorname{depth}_p X \geq 3$ のもとでもよい。

§2. 特殊な孤立特異点の族を調べる。 (X, p): 孤立特異点が curve により解消できるとは $\exists h: (\tilde{X}_0, A_0) \longrightarrow (X, p)$ 特異点の解消 s.t. $\dim A_0 = 1$ のこととする。

命題6. (X, p) を curve により解消できる孤立特異点とし、$\mathrm{depth}_p X \geq 3$ を仮定する。この時

i) (X, p) は Cohen-Macaulay

ii). $f: (\tilde{X}, A) \to (X, p)$ を (X, p) の勝手な　解消で $\dim A = 1$ とものとする時, 次が成立: A の各既約成分 A_i は $\mathbb{P}^1$ に同型, A は cycle を含まぬ. かつ $A_i \hookrightarrow \tilde{X}$ は, 例外的埋め込み. (Grauert の意味で)。

命題1 (ii) の簡単な応用として.

定理7. (X, p) を命題6の如くとする時. もし $\dim X \geq 4$ なら, $\mathcal{E}xt^2(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) = 0$, 従って 冒頭の Tjurina の定理により. versal 変形は非特異。さらに $\dim \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) = \dim H^1(\tilde{X}, \Theta_{\tilde{X}})$ が成立する。

注意8 (i). $\dim X \neq 3$ では 命題6 の (X, p) は完全交叉ではない。 $\dim X = 3$ では 完全交叉 (complete intersection) の例はある。例えば Brieskorn [1] 参照。

(ii). (X, p) を命題6の如くとする時に. (X, p) が Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $\dim X = 3$ かつ $N_{A_i/\tilde{X}} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}_{A_i}(-2)$, $\forall i$。もちろん上の Brieskorn の例ではこれは満たされる。(i) の事実はこのことから, また

は「(X,p) ≠ U.F.D. if $\dim X \geq 4$」よりでる。

最後に、最も簡単な場合として、$\exists \sigma: (\tilde{X}, A) \to (X, p)$. resolution s.t. $A \cong \mathbb{P}^1$ の場合を考える。

<u>命題 8.</u> (i) (X', p') を同様の, i.e. $\exists \sigma': (\tilde{X}', A') \to (X', p')$ with $A' \cong \mathbb{P}^1$ とすると, $(X, p) \cong (X', p') \Longleftrightarrow (\tilde{X}, A) \cong (\tilde{X}', A')$.

(ii). $A \hookrightarrow X$ なる埋めこみは, $\mathbb{C}^m$ を fibre とし, A を底とするある特殊な $\underbrace{\text{fibre bundle}}_{\phi: Z \to A}$ の 'zero' section, $\iota: A \to Z$, としての埋めこみに同値。

・構造群は例えば $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(x, y)$ の時には $(x, y) \mapsto (ax + f(y), by)$ $a, b \in \mathbb{C}^*$, $f(y)$: y の正則有理函数のような形を持つ。一般の場合にも manifold Z の $\underbrace{}_{\text{explicitな}}$ 記述が可能であるがここでは省略する。このような type の bundle は Iarobbino[4] によっても異る context から得られていることに注意したい。

文　献

[1]. Brieskorn, E., Über die Auflösung gewisser Singularitäten von hol. Abb.. Math. Ann. 166 (1966)

[2] Grauert, H., Über die Deformation isolierter Singularitäten ---, Invent. Math. 15 (1972)

[3] Grauert, H., u. Riemenschneider, O., Verschwindungssätze für ---. Invent. Math. 11. (1970)

[4] Iarobbino, A., An alg. fibre bundle over $\mathbb{P}^1$ that is not a v.b. Topology. 12. (1973)

[5] Ling, H.-S. Extending families of pseudoconcave complex spaces, Math. Ann. 204. (1973)

[6] Rossi, H., Attaching analytic spaces ---, Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis. (1964)

[7] Tjurina, Locally semiuniversal deformations of isol. sing. --- Math. of Izv. 3. (1969)