数理解析研究所講究録
239巻 1975年 86-94

楕円型方程式系の境界値問題に対するなめらかな解が一意的に存在するための十分条件

岩崎敷久

Ωを$\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 1$) の中のなめらかな境界を持つ有界領域とする。 Ω上での楕円型方程式系の境界値問題を考える。領域内部の方程式を定める偏微分作用素をA, 境界条件を与える偏微分作用素をBで表わす。 A及びBは実パラメータλをふくむAgmon-Douglis-Nirenberg型の作用素とする。即ち $Pol(k)$を$\overline{\Omega}$上のC^∞函数$C^\infty(\overline{\Omega})$を係数とする次数が$k$以下の$(\xi,\lambda)$に関する多項式 r_i, s_i, t_i を整数, $a_{ij}(\xi,\lambda) \in Pol(r_j+s_i)$, $b_{ij}(\xi,\lambda) \in Pol(r_j+t_i)$ とした時 AとBは

$$A = (a_{ij}(\partial,\lambda))_{1\leq i,j \leq m}, \quad B = (b_{ij}(\partial,\lambda))_{\substack{1\leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}}$$

で定義し，方程式を

$$(1) \quad \begin{cases} Au = f & \text{on } \Omega \\ Bu = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

と定める。

明らかに(A,B)は$C^\infty(\overline{\Omega})$から$C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\partial\Omega)$への連続線型写像を定義する。 この写像$(A,B)$が同型写像となるための十分条件を与えるのが ここでの目的である。

AとBがパラメータλによってつながれているという関係

を導入する。 定義はあとにして

(A, B) がパラメータ λ によって適切につながれているとする。 ある λ_0 に対し $\lambda \geqq \lambda_0$ の時 (A, B) はあるソボレフ空間の稠密な部分空間上で同型写像となり，特異サポートに関して $\mathrm{sing\,supp}\, u = \mathrm{sing\,supp}\, f \cup \mathrm{sing\,supp}\, g$ $(\subset \overline{\Omega})$ なる関係が成り立つ。

Aが一階対称型の場合について考えてみる。 Bは零階即ち微分をふくまないとする。 Lax と Phillips らによると，ker B がAに対して dissipative な境界条件を定める時 適当なソボレフ空間上での存在と一意性が示される。 この場合特異サポートの一致について何が言えるかというと，Aが楕円型であるとの仮定のもとで今まで知られている一般的な条件は BがAに対して Coercive である時だけである。 今の場合AとBは常にパラメータ λ でつながれており 上の結果からかならずしも Coercive でなくてもそれらが適切につながれていれば十分である。(注, Coercive なら適切である。)

一方Aが一般のADN型の楕円型作用素 BがAに Coercive で正規な境界作用素の時, Coercive 評価式が成立することより 特異サポートが一致する。 さらにこの写像は有限指数を持つことが知られている。 しかし 指数が零, あるいはより強く 同型写像になる (これが言えることはグリーン函

数の構成，固有函数展開等を進める上で基本的である）型では、変分法で解けるもの（例ば Gårding 型と Dirichlet 条件）を除けば Agmon が固有函数展開の話をする時考えた型以外見あたらない。パラメータによってつながれているという条件はこれらの型の境界作用素が正規でないものをもふくんだ十分な拡張を与えると同時に非対称な楕円型作用素の non-coercive な境界値問題の一クラスを与えている。

A と B が満すべき条件について述る。（A，B）は常に同値な系で A は高々一階の微分しかふくまず B は微分をふくまないものを持つから（A，B）は最初からそのような系とする。又条件は局所的なものであるから局所座標をとって $\Omega = R^{n+1}_{+} \ni (x, y)$ とする。cotangent space の元を (ξ, η) で表わす。

$$\mathcal{A} = (a^0_{ij}(\xi, \eta, \lambda)), \quad \mathcal{B} = (b^0_{ij}(\xi, \eta, \lambda))$$

（a^0_{ij}, b^0_{ij} は a_{ij}, b_{ij} の次数 $r_j + s_i$, $r_j + t_i$ の同次部分）

$$\mathcal{N}_0 = ((1 - i\eta)^{r_j - r_0} \delta_{ij}), \quad \mathcal{N}_1 = ((1 - i\eta)^{s_j + r_0 - 1} \delta_{ij})$$

（$r_0 = \max_j (r_j)$, (δ_{ij}) Kronecker's δ ）

$\det \mathcal{A} \neq 0$ として $\zeta = (\xi, \lambda) \neq 0$ のとき

$$\mathcal{P} = (2\pi)^{-1} \int_\Gamma \mathcal{N}_0 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{N}_1 \mathcal{A}_0 \, d\eta, \quad \mathcal{D} = (2\pi)^{-1} \int_\Gamma \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{N}_1 \mathcal{A}_0 \, d\eta$$

（Γ; $\det \mathcal{A} = 0$ の虚数部が正の根をかこむ単純曲線, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{(0,1,0)}$）

$$H^1_{\alpha\beta} = \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta D \cdot P \quad , \quad H^2_{\alpha\beta} = P^* \cdot \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta D^*$$

（P^*, D^* は $P: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, $D: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$ の adjoint） とおく。

（A, B）が（$(x,y)=0$ で）パラメータ λ によってつながれているとは 境界上の $x=0$ の近傍で次の条件をみたす時をいう。

1、 $\det Q \neq 0$ （$(\xi,\eta,\lambda) \neq 0$ real）

2、 $\det Q$ の次数 $= 2l$

3、 $\lambda > 0$ のとき range D の次元 $= l$

さらに次の条件をも満す時 適切につながれているという。

4. $\lambda |Pf| \leqq c|Df|$, $|H^1_{\alpha\beta} f|^2 \leqq c|f|$, $|H^2_{\alpha\beta} g|^2 \leqq c|g|$

但し $\lambda \geqq 0$, $|\xi|=1$, $|f|=1$ ($f \in \mathbb{C}^m$), $|g|=1$ ($g \in \mathbb{C}^l$) そして $|\alpha|+|\beta|=1$。

（注，領域内部での A に対する仮定は $\det Q \neq 0$ （$(\xi,\eta,\lambda) \neq 0$ real）である。） 4の条件は ロパテンスキー行列 D を標象とする境界上の擬微分作用素が C^∞-可解で準楕円型であるための十分条件である。

結論の証明には 領域が半空間 A及び B が特別な擬微分作用素をふくむ一階及び零階の作用素の時を特に考察する。そして一般の場合が領域の単位分解によってこの特別な場合に帰着できることを示すに十分なだけの結果を導き出す。それは次の様なものである。 $M(x,\xi)$ $m \times m$ matrix , 1次の正の同次性を $B(x,\xi)$ $l \times m$ matrix 0次の正の同次性を

ξに関して持ち　(x,ξ) に関して C^∞函数$(\xi \neq 0)$　そして $|x| \geq R$ では x に関して定数として、

$$(2)\quad \begin{cases} \{\frac{\partial}{\partial y} + M(x, \partial_x, \lambda)\} u(x,y) = f(x,y) & y > 0 \\ B(x, \partial_x, \lambda) u(x, 0) = g(x) & \text{。} \end{cases}$$

この $\frac{\partial}{\partial y} + M(x,\partial_x,\lambda)$ と $B(x,\partial_x,\lambda)$ についてもパラメータ λ によってつながれているという関係は同様に定義できる。
今 (2) の意味をはっきりさせるため　次の様な作用素 $C(\lambda)$ を定義する。　W_b を $H^0_m(R^{n+1}_+) \times H^{-1/2}_m(R^n)$ の部分空間で

$$(u, v) \in W_b \Leftrightarrow \begin{cases} u, \{\frac{\partial}{\partial y} + M(x, \partial_x, \lambda)\} u \in H^0_m(R^{n+1}_+) \\ B(x, \partial_x, \lambda) v \in H^{1/2}_\ell(R^n) \\ v = u(\cdot, 0) \end{cases}$$

を満すものとする。　$C(\lambda)$ は $U \in W_b$ に対して

$$C(\lambda) U = \begin{pmatrix} \{\frac{\partial}{\partial y} + M(x,\partial_x,\lambda)\} & , \; 0 \\ 0 & , \; B(x,\partial_x,\lambda) \end{pmatrix} U$$

を対応させる　W_b を定義域とする $H^0_m(R^{n+1}_+) \times H^{-1/2}_m(R^n) \to H^0_m(R^{n+1}_+) \times H^{1/2}_\ell(R^n)$ の閉作用素とする。　この時次の事が言える。

$\frac{\partial}{\partial y} + M(x,\partial_x,\lambda)$ は楕円型で $B(x,\partial_x,\lambda)$ とパラメータ λ で適切につながれているとする。　ある λ_0 があって　$\lambda \geq \lambda_0$ ならば $C(\lambda)$ の逆 $R(\lambda)$ が存在する。　そしてこの $R(\lambda)$ は $H^s_m(R^{n+1}_+) \times H^{s+1/2}_\ell(R^n)$ から $H^s_m(R^{n+1}_+) \times H^{s-1/2}_m(R^n)$ への有界作用素で $(s \geq 0)$

$|||R(\lambda)|||_s \leqq c_3\lambda^{-1}$ なる評価式を持つ。

但し $H^s_m(\Omega)$ は C^m-値のソボレフ空間で $H^s_{\cdot}(R^{n+1}_+)\times H^t(R^n)$ のノルムとして $(\|(\Lambda^1(\lambda)-\frac{\partial}{\partial y})^s u\|^2+\|\Lambda^t(\lambda)v\|^2)^{1/2}$ を用いている。($\Lambda^t(\lambda)$ の標象は $(|\xi|^2+\lambda^2)^{t/2}$ である。)

よりくわしく $\chi\in C^\infty_0(\overline{R^{n+1}_+})$ $\chi^0=\chi|_{y=0}$ とする時、

$(f,g)\in H^s_m(R^{n+1}_+)\times H^{s+1/2}_\ell(R^n)$

$(\chi f,\chi^0 g)\in H^{s+1/2}_m(R^{n+1}_+)\times H^{s+1}_\ell(R^n)$ が満されるなら

$(u,u(0))\in H^s_m(R^{n+1}_+)\times H^{s-1/2}_\ell(R^n)$

$(\chi u,\chi^0 u)\in H^{s+1/2}_m(R^n)\times H^s_m(R^n)$ である。

但し $C(\lambda)\begin{pmatrix}u\\u(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}$.

$R(\lambda)$ の存在とその性質を示すには (2)の係数の中にふくまれる変数 x をパラメータと考えた時の逆により擬微分作用素の左右のパラメトリックスを作る。これを $R'(\lambda)$ とすると $R(\lambda)$ が存在するなら $R(\lambda)\cdot(I+S(\lambda))=R'(\lambda)$ $(I+T(\lambda))\cdot R(\lambda)=R'(\lambda)$ なる関係式を得る。パラメータ λ により適切につながれていると仮定すると この $S(\lambda)$, $T(\lambda)$ と $R'(\lambda)$ が以下に書く結果が適用し得るような擬微分作用素で表現され 特に $I+S(\lambda)$ $I+T(\lambda)$ が可逆的となる。

擬微分作用素については A.P. Calderon and R. Vaillancourt と L. Hörmander の結果を使う Hörmander の結果を精密して次の様な評価を利用する。

Xをヒルベルト空間　$BL(X)$ を X 上の線型有界作用素

そして　$p(x,\xi,\lambda)$, $q(x,\xi,\lambda) \in C^\infty(R^n \times R^n, BL(X))$　λ はパラメータ　とする。

$$|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\zeta)| \leqq C_{\alpha\beta}\lambda^{-|\alpha|}(|\zeta|/\lambda)^{m_1+\delta_1|\beta|-\rho_1|\alpha|}$$

$$|q^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\zeta)| \leqq C_{\alpha\beta}\lambda^{-|\alpha|}(|\zeta|/\lambda)^{m_2+\delta_2|\beta|-\rho_2|\alpha|}$$

$\zeta = (\xi,\lambda) \in R^n \times (0,\infty)$　とする　但し　$p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\zeta) = \partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x,\zeta)$。

$$K(\lambda) \equiv q(\partial,\lambda)p(\partial,\lambda) - \sum_{|\alpha|<N}(i)^{|\alpha|}(\alpha!)^{-1}q^{(\alpha)}(\partial,\lambda)\circ p_{(\alpha)}(\partial,\lambda)$$

とおけば

$0 \leqq \delta_1 < \rho_2 \leqq 1$　かつ　$0 \leqq \delta_i \leqq \rho_i \leqq 1$　$(i=1,2)$　の時

任意の実数 s と m に対して　ある整数 N_0 があり　$N \geqq N_0$, $\lambda \geqq 1$

ならば

$$\|\Lambda^s(\lambda)p(\partial,\lambda)u\| \leqq C_s\lambda^{-m_1}\|\Lambda^{s+m_1}(\lambda)u\|$$

$$\|\Lambda^s(\lambda)K(\lambda)u\| \leqq C_{sN}\lambda^{-N+s-m+2}\|\Lambda^m(\lambda)u\|$$

但し　$u \in C_0^\infty(R^n, X)$.

さらに　十分大きな α_0 に対し　$q^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\zeta) \in BL(X,Y)$（$X$ から Y への有界作用素）（$|\alpha| \geqq \alpha_0$, $|\beta| \geqq 0$）で

$$|q^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\zeta)|_{XY} \leqq C_{\alpha\beta\lambda}(1+|\xi|)^{m_3+\delta_2|\beta|-\rho_2|\alpha|}$$

ならば　十分大きな N に対して

$$\|K(\lambda)u\|_Y \leqq C_{mN\lambda}\|\Lambda^m(\lambda)u\|_X$$

が成り立つ。

例 $\Omega = R^{n+1}_+ \ni (x, y) \quad y \geq 0$

$$\begin{cases} A = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - a_{n+1}\lambda^2 + c \\ B = b_0 \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_{n+1}\lambda + d \end{cases}$$

・A, B 実係数. A: elliptic, c, d: 低階.

$\eta^1 \equiv i\sqrt{\sum a_{ij}\xi_i\xi_j + a_{n+1}\lambda^2} \qquad \zeta \equiv (\xi, \lambda)$

$\alpha \equiv \min_{\zeta;\ \sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i = 0} (\eta^1(\zeta))$ とおくと

$*\quad b_0 \geq 0, \quad b_0\alpha > b_{n+1}, \quad |b_i|^2 \leqq c b_0 \quad i = 1, \cdots, n$

$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} b_k \xi_k\right|^2 \leqq c\left(b_0 + \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \xi_k\right|\right) \quad ; |\xi| = 1$

最後の条件の十分条件としては. 次のものがある。

$$\begin{cases} |\mathrm{grad}_x b_k|^2 \leqq c b_0 \quad \text{あるいは} \\ (b_k) = b(\hat{b}_k)\ ;\ \sum|\hat{b}_k|^2 = 1 \ \text{とかけて}\ |\mathrm{grad}\, b|^2 \leqq c(b_0 + |b|) \end{cases}$$

$*$ を仮定すると. $\exists \lambda_0$ s.t. $\forall f \in H^0(\Omega), \forall g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$\forall \lambda \geq \lambda_0, \ \exists_1 u \in H^1(\Omega)\ ; Au = f$ on Ω $Bu = g$ on $\partial\Omega$

$\text{sing supp}\, u = \text{sing supp}\, f \cup \text{sing supp}\, g.$

参考文献

[1] N. IWASAKI A Sufficient Condition for the Existence and the Uniqueness of Smooth Solutions to Boundary Value Problem for Elliptic Systems.
Publ. RIMS Kyoto Univ. to appear

[2] Y. KANNAI Hypoellipticity of Certain Degenerate Elliptic Boundary Value Problems. to appear

[3] K. TAIRA On the Oblique Boundary Value Problems for the Laplacian to appear,