数理解析研究所講究録
241巻 1975年 234-248

ステファン問題の差分解の一意存在

東大　工　河原田秀夫
電通大　名取　亮

§1.　序

我々は前にステファン問題に対して処罰法を用いた数値解法を提案した。[1]　そこでは、微積分方程式系を差分化し，その差分ステファン問題を解く一つのアルゴリズムを示し，具体的計算を行なった結果，かなり良い精度で解を得ることができた。　ここでは，前記の差分ステファン問題における処罰関数に若干の修正を加え，差分解の一意存在を証明する。

§2.　記号と問題

2.1　記号

ここで用いる記号は，前論文[1]で定義したものと同じであるが，重要と思われるものと新しい記号を以下に列記する。

1°　$\lambda = k/h^2$

2°　$T = Nk$

3°　$X = Mh$

4° $C = \max(\max_n f_n,\ \max_m \varphi_m)$

5° $A = \max(C/b,\ D)$

6° $m_n = [s_n/h]$

7° $\rho_n = s_n/h - [s_n/h]$

8° $\varepsilon_{m,n} = 1/(1 + kK\chi_{m,n})$

9° $\delta u_{m,n} = u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}$

10° $Pu_{m,n} = (I + \lambda\delta)u_{m,n}$

11° $\|u\|_n = \max_{0 \leqq m \leqq M} |u_{m,n}|$

2．2 問題

以下のような差分ステファン問題を考える。

(2.1) $$\frac{u_{m,n} - u_{m,n-1}}{k} = \frac{1}{h^2}\delta u_{m,n-1} - K\chi_{m,n}u_{m,n}$$

(2.2) $$u_{0,n} = f_n \geqslant 0$$

(2.3) $$u_{M,n} = 0$$

(2.4) $$u_{m,0} = \varphi_m \geqslant 0$$

(2.5) $$s_n = \sqrt{F_n - 2h^2\sum_{m=1}^{M-1} m\,u_{m,n}}\quad, 0 \leqq n \leqq N$$

ただし，

$$F_n = b^2 + 2k\sum_{i=0}^{n-1} f_i + 2h^2\sum_{m=1}^{[b/h]} m\varphi_m$$

(2.6) $$\chi_{m,n} = \begin{cases} 0 & , 1 \leqq m \leqq m_n - 1, \quad 0 \leqq n \leqq N \\ \dfrac{1-\rho_n}{1+\rho_n kK} & , m = m_n, \quad 0 \leqq n \leqq N \\ 1 & , m_n + 1 \leqq m \leqq M, \quad 0 \leqq n \leqq N \end{cases}$$

2．3　処罰関数 $\chi_{m,n}$

(2.1) 式を書き直すと，

$$(2.7)\qquad u_{m,n} = \varepsilon_{m,n} P\, u_{m,n-1}$$

となる。ここで，

$$(2.8)\qquad \varepsilon_{m,n} = \begin{cases} 1 & ,\ 1 \leqq m \leqq m_n - 1,\ 0 \leqq n \leqq N \\ \dfrac{1+p_n kK}{1+kK} & ,\ m = m_n \qquad ,\ 0 \leqq n \leqq N \\ \dfrac{1}{1+kK} & ,\ m_n+1 \leqq m \leqq M,\ 0 \leqq n \leqq N \end{cases}$$

である。　前論文では，$m = m_n$ における $\varepsilon_{m,n}$ の値は 1 であったが，ここでは $(1+p_n kK)/(1+kK)$ になっている点が異っている。　前の方法では，s_n から $\chi_{m,n}$ をきめるときに，s_n/h の整数部分のみをとっているために，s_n に対する $u_{m,n}$ の連続性が失われてしまう。　そこで，小数部分 p_n を考慮することによって連続性を保持するようにした。　すなわち，$m = m_n$ における増幅因子 $\varepsilon_{m,n}$ を

$$(2.9)\qquad \varepsilon_{m_n,n} = p_n \cdot 1 + (1-p_n) \cdot \frac{1}{1+kK} = \frac{1+p_n kK}{1+kK}$$

と定義する．

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{1}{1+kK\chi_{m,n}}$$

の関係から，処罰関数 $\chi_{m,n}$ の $m = m_n$ における値を求めれば

$$\chi_{m_n,n} = \frac{1-\rho_n}{1+\rho_n k K}$$

となる。

§3. アルゴリズムと結果

問題(2.1)～(2.6)の解を具体的に求める方法は，前論文と同様に逐次近似を用いる。 すなわち，s_n の才0近似を

(3.1) $\quad s_n^{(0)} = \sqrt{F_n} \quad , 0 \leqq n \leqq N$

とし，それに対して定まる $\chi_{m,n}^{(0)}$ を用いて差分熱方程式を解いて $u_{m,n}^{(0)}$ を求める。 それを(2.5)に代入して，s_n の才1近似

(3.2) $\quad s_n^{(1)} = \sqrt{F_n - 2k^2 \sum_{m=1}^{M-1} m\, u_{m,n}^{(0)}} \quad , 0 \leqq n \leqq N$

をきめる。 以下同様にして，$u_{m,n}^{(\ell)}$，$s_n^{(\ell)}$ を計算する。

$\ell \to \infty$ としたときに，$u_{m,n}^{(\ell)}$，$s_n^{(\ell)}$ が問題(2.1)～(2.6)の一意解に収束することを示せば，差分解の一意存在を証明したことになる。

定理 (i) $0 < \lambda \leqq \frac{1}{2}$

(ii) $K = 1/k^2$

(iii) $0 < C_2 < 1$ ，ただし $C_2 = \frac{X}{\theta}(A + C\lambda h)h$

ならば，方程式系(2.1)～(2.6)の解は一意に存在する。

§4. 準備

前節で述べた定理を証明するための準備として，いくつかの補題を述べる。

定義 1. $S=\{s_0, s_1, \cdots, s_N\}$ があって，

$$b \leqq s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_N \leqq X$$

であるとき，"S は性質 (M) をもつ" という。

定義 2. S が予め与えられたとき，方程式系 (2.1)〜(2.4) および (2.6) の解を $u_{m,n}$ としたとき，$\Phi(S)=\{\Phi_0(S), \Phi_1(S), \cdots, \Phi_N(S)\}$ を以下のように定義する。

$$(4.1) \qquad \Phi_n(S)=\sqrt{F_n-2h^2\sum_{m=1}^{M-1} m\, u_{m,n}} \quad , \quad 0 \leqq n \leqq N$$

§2.3 で述べたことから，Φ は S に関して連続であることがわかる。

(2.5) から，もし S が真の境界ならば，

$$S=\Phi(S) \qquad \text{i.e.} \qquad s_n=\Phi_n(S) \quad , \quad 0 \leqq n \leqq N$$

が成り立つ。

補題 1. （境界に対する解の単調性）

境界 S', S'' が予め与えられたとき，方程式系 (2.1)〜(2.4) および (2.6) の解をそれぞれ $u'_{m,n}$，$u''_{m,n}$ とする。

$$0 \leqq s'_n \leqq s''_n \leqq X \qquad (0 \leqq n \leqq N)$$

かつ $\quad 0 < \lambda \leqq 1/2$

であるならば，

$$0 \leqq u'_{m,n} \leqq u''_{m,n}$$

が成り立つ。

証明． 前の論文とほぼ同様に証明される。

補題 2．（境界の n についての単調性）

S が性質 (M) をもてば，$\Phi(S)$ も性質 (M) をもつ。

証明．

定義により，

$$\{\Phi_{n+1}(S)\}^2 = F_{n+1} - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m\, u_{m,n+1}$$

$$\{\Phi_n(S)\}^2 = F_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m\, u_{m,n}$$

であるから，

$$\{\Phi_{n+1}(S)\}^2 - \{\Phi_n(S)\}^2 = 2k f_n - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m(\mathcal{E}_{m,n+1}P - I)u_{m,n}$$

$$\geqq 2k f_n - 2h^2 \sum m(P - I)\, u_{m,n}$$

$$= 2k f_n - 2h^2 \sum m\, \lambda\delta\, u_{m,n}$$

$$= 2k(M-1)\, u_{M-1,n} \geqq 0 \qquad \text{（補題 1．より）}$$

であり．かつ，

$$\Phi_0(S) = \sqrt{F_0 - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m\, \varphi_m} = b$$

$$\Phi_N(S) = \sqrt{F_N - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m\, u_{m,N}} \leqq \sqrt{F_N} \leqq X$$

が成立つ。 Q.E.D.

補題 3．（$m_n \leqq m \leqq M$ における解の評価）

予め与えられた S が性質 (M) をもち，$K = 1/k^2$ とするとき，解 $u_{m,n}$ は，

(4.2) $\quad 0 \leqq P u_{m,n-1} \leqq C_1 h \qquad (m_n \leqq m \leqq M,\ 1 \leqq n \leqq N)$

を満す。ただし，

$$C_1 = A + C\lambda h$$

である。

証明.

式(2.7)において，$K \to \infty$ としたものを $u^{(\infty)}_{m,n}$ と書くと，

(4.3) $\quad u^{(\infty)}_{m,n} = 0 \qquad (m_n + 1 \leqq m \leqq M,\ 0 \leqq n \leqq N)$

となる。実際，$K \to \infty$ としたとき，$\varepsilon_{m,n} \to 0$ $(m_{n+1} \leqq m \leqq M,\ 0 \leqq n \leqq N)$ となるからである。

まず，$m = m_n$ の場合を考える。

(4.4) $\quad P u_{m_n,n-1} \leqq \left| P u_{m_n,n-1} - P u^{(\infty)}_{m_n,n-1} \right| + P u^{(\infty)}_{m_n,n-1}$

ここで，右辺第1項を評価しよう。一般に，$u_{m,n}$ と $u^{(\infty)}_{m,n}$ を比較すると，初期・境界条件から，

$$u_{0,n} = u^{(\infty)}_{0,n}$$

$$u_{m,0} = u^{(\infty)}_{m,0}$$

および，(2.7)と(4.3)から

$$u_{m_n+1,n} - u^{(\infty)}_{m_n+1,n} \leqq \frac{C}{1+kK}$$

を得る。最大値原理を用いれば，すべての m, n $(1 \leqq m \leqq m_n,\ 0 \leqq n \leqq N)$ に対して，

$$\left| u_{m,n} - u^{(\infty)}_{m,n} \right| \leqq \frac{C}{1+kK}$$

が成り立つ。ここにおいて，$m = m_n$，$n = n-1$ とし，両辺に

Pを作用させると，

(4.5) $$\left| P u_{m_n, n-1} - P u^{(\infty)}_{m_n, n-1} \right| \leqq \frac{C}{1+kK}$$

を得る。 次に，右辺第2項を評価する。文献(2)における Lemma 1. の差分表現を用いれば，

(4.6) $$u^{(\infty)}_{m_n, n} \leqq A h$$

が成り立つことがわかる。 Sが性質(M)をもつことを考慮すれば，

$$u^{(\infty)}_{m_n+1, n-1} = 0$$

$$u^{(\infty)}_{m_n, n-1} \leqq A h$$

$$u^{(\infty)}_{m_n-1, n-1} \leqq 2 A h$$

であるから，

(4.7) $$P u^{(\infty)}_{m_n, n-1} \leqq A h$$

となる。 (4.5)と(4.7)から

$$0 \leqq P u_{m_n, n-1} \leqq \frac{C}{1+kK} + A h \leqq (A + C\lambda h) h = C_1 h$$

が得られる。ここで，$K = 1/k^2$ を用いた。

次に，$m_n+1 \leqq m \leqq M$ の場合を考える。領域 $m_n+1 \leqq m \leqq M$, $0 \leqq n \leqq N$ の中で $u_{m,n}$ を考えると，初期・境界条件から，

$$u_{M,n} = 0$$

$$u_{m,0} = 0$$

および，上の議論から

$$u_{m_n,n} = \varepsilon_{m_n,n} P u_{m_n,n-1} \leqq P u_{m_n,n-1} \leqq C_1 h$$

であるから，最大値原理により，この領域内のすべての m, n に対して

$$0 \leqq u_{m,n} \leqq C_1 h$$

が成り立つ。　ここで，$n = n-1$ とし両辺に P を作用させると，

$$0 \leqq P u_{m,n-1} \leqq C_1 h \qquad (m_n+1 \leqq m \leqq M,\ 1 \leqq n \leqq N)$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　Q. E. D.

補題 4.　s', s'' がともに性質(M)をもつならば，

$$(4.9) \qquad \| u' - u'' \|_n \leqq C_1 \sum_{i=1}^{n} | s'_i - s''_i |$$

が成り立つ。

証明.

$s'_n \leqq s''_n$ としても一般性を失わない。(2.7)式より．

$$u'_{m,n} - u''_{m,n} = \varepsilon'_{m,n} P u'_{m,n-1} - \varepsilon''_{m,n} P u''_{m,n-1}$$

$$= (\varepsilon'_{m,n} - \varepsilon''_{m,n}) P u'_{m,n-1} + \varepsilon''_{m,n} P (u'_{m,n-1} - u''_{m,n-1})$$

したがって，

$$\| u' - u'' \|_n \leqq \max_{0 \leqq m \leqq M} (\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n}) \max_{m'_n \leqq m \leqq m''_n} P u'_{m,n-1} + \| u' - u'' \|_{n-1}$$

となる。

ここで，$0 \leqq m \leqq m'_n - 1$ および $m''_n + 1 \leqq m \leqq M$ に対しては，$\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n} = 0$ であることに注意しよう。

また，定義により，

(4.10) $\qquad (s_n'' - s_n')/h = m_n'' - m_n' + \rho_n'' - \rho_n'$

である。ここで，次の3つの場合に分けて考える。

i) $m_n'' = m_n'$ のとき

$$\max_m (\varepsilon_{m,n}'' - \varepsilon_{m,n}') = \frac{(\rho_n'' - \rho_n')kK}{1+kK} < \frac{s_n'' - s_n'}{h}$$

ii) $m_n'' = m_n' + 1$ のとき

$$\max_m (\varepsilon_{m,n}'' - \varepsilon_{m,n}') = \max\left(\frac{(1-\rho_n')kK}{1+kK}, \frac{\rho_n'' kK}{1+kK}\right) < \frac{s_n'' - s_n'}{h}$$

実際，

$$(s_n'' - s_n')/h = (1 - \rho_n') + \rho_n''$$

$$0 \leqq \rho_n' < 1, \quad 0 \leqq \rho_n'' < 1$$

より明らかである。

iii) $m_n'' \geqq m_n' + 2$ のとき

$$m_n'' - m_n' \geqq 2, \quad \rho_n'' - \rho_n' > -1$$

であるから，

$$(s_n'' - s_n')/h = (m_n'' - m_n') + (\rho_n'' - \rho_n') > 1$$

したがって

$$\max_m (\varepsilon_{m,n}'' - \varepsilon_{m,n}') = \frac{kK}{1+kK} < \frac{s_n'' - s_n'}{h}$$

以上の議論および補題3により，

(4.11) $\qquad \| u' - u'' \|_n \leqq C_1 |s_n' - s_n''| + \| u' - u'' \|_{n-1}$

が得られる。初期条件より，$\| u' - u'' \|_0 = 0$ であるから，(4.11)の不等式をくりかえし用いることにより，(4.9)が得られる。 Q.E.D.

補題 5.　S', S'' がともに性質(M)をもつならば,

$$(4.12)\quad |\Phi_n(S') - \Phi_n(S'')| \leqq C_2 |s'_n - s''_n| + C_1 C_3 \sum_{i=1}^{n-1} |s'_i - s''_i|$$

が成り立つ。ただし,

$$C_2 = \frac{X}{b} C_1 h$$

$$C_3 = \frac{X^2}{2b}$$

である。

証明.

定義により

$$(4.13)\quad \{\Phi_n(S')\}^2 - \{\Phi_n(S'')\}^2$$
$$= 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m(u''_{m,n} - u'_{m,n})$$
$$= 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m(u''_{m,n} - u'''_{m,n}) + 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m(u'''_{m,n} - u'_{m,n})$$

ただし,

$$u'''_{m,n} = \varepsilon''_{m,n} P u'_{m,n-1}$$

である。　(4.13)式の右辺第1項は,

$$2h^2 \sum_m m\, \varepsilon''_{m,n} P(u''_{m,n-1} - u'_{m,n-1}) \leqq X^2 \| u'' - u' \|_{n-1}$$

で評価される。次に右辺第2項を考える。$s'_n \leqq s''_n$ としても一般性を失わない。

$$2h^2 \sum_m m(\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n}) P u'_{m,n-1}$$
$$\leqq 2h X C_1 h \sum_{m=m'_n}^{m''_n} (\varepsilon''_{m,n} - \varepsilon'_{m,n}) \qquad \text{(補題 3 より)}$$
$$\leqq 2 X C_1 h^2 \{ (1-\rho'_n) + \sum_{m=m'_n+1}^{m''_n-1} 1 + \rho''_n \}$$
$$= 2 X C_1 h^2 (m''_n - m'_n + \rho''_n - \rho'_n)$$

$$= 2X C_1 h (s_n'' - s_n')$$

となる。$m_n'' = m_n'$ および $m_n'+1$ の場合にも同じ結果が得られる。従って，

$$(4.14) \quad \{\Phi_n(s')\}^2 - \{\Phi_n(s'')\}^2 \leqq 2XC_1 h |s_n' - s_n''| + X^2 \| u'' - u' \|_{n-1}$$

が得られる。補題 2 により．

$$\Phi_n(s') + \Phi_n(s'') \geqq 2b \qquad (0 \leqq n \leqq N)$$

であるから，

$$(4.15) \quad |\Phi_n(s') - \Phi_n(s'')| \leqq C_2 |s_n' - s_n''| + C_3 \| u'' - u' \|_{n-1}$$

となる。ここで，補題 4 を用いれば，(4.12) が得られる。

Q. E. D.

§5. 定理の証明

5. 1　§3 で定義した $s^{(l)}$ $(l \geqq 0)$ は性質 (M) をもつ。

実際，定義により

$$s_n^{(0)} = \sqrt{b^2 + 2k \sum_{i=0}^{n-1} f_n + 2h^2 \sum_{m=1}^{[b/h]} m \varphi_m}$$

であるから，

$$s_0^{(0)} \geqq b$$

であり，$f_n \geqq 0$ であるから

$$s_n^{(0)} \geqq s_{n-1}^{(0)}$$

かつ，$s_N^{(0)} = \sqrt{F_N} \leqq X$

したがって，$s^{(0)}$ は性質 (M) をもつ。次に，

$$s^{(l)} = \Phi(s^{(l-1)})$$

であるから，補題 2 により $S^{(\ell)}$ $(\ell \geqq 1)$ はすべて性質 (M) をもつことがわかる。

5．2　　$S_0^{(\ell)} = b$　$(\ell \geqq 1)$ は，§3 における $S^{(\ell)}$ の作り方から明らかである。　一般に，$n \geqq 1$ のときには，補題 5 により，

$$(5.1)\quad |S_n^{(\ell+1)} - S_n^{(\ell)}| \leqq C_2 |S_n^{(\ell)} - S_n^{(\ell-1)}| + C_1 C_3 \sum_{i=1}^{n-1} |S_i^{(\ell)} - S_i^{(\ell-1)}|$$

が成り立つ。ここで，

$$(5.2)\quad |S_n^{(\ell+1)} - S_n^{(\ell)}| = Q^{(n)}(\ell)\, C_2^{\ell}$$

とおくと，

$$(5.3)\quad Q^{(n)}(\ell) \leqq Q^{(n)}(\ell-1) + \frac{C_1 C_3}{C_2} \sum_{i=1}^{n-1} Q^{(i)}(\ell-1)$$

が得られる。任意の n に対して，

$$(5.4)\quad Q^{(n)}(0) = |S_n^{(1)} - S_n^{(0)}| \leqq X - b$$

であることを用いると，一般に

$$(5.5)\quad Q^{(n)}(\ell) \leqq (X - b) \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{C_1 C_3}{C_2}\right)^p \binom{n-1}{p} \binom{\ell}{p}$$

となることがわかる。すなわち，$Q^{(n)}(\ell)$ は ℓ に関する $(n-1)$ 次多項式で評価される。　従って，(5.1) 式から，

$$(5.6)\quad \max_{0 \leqq n \leqq N} |S_n^{(\ell+1)} - S_n^{(\ell)}| \leqq \left[\max_{0 \leqq n \leqq N} Q^{(n)}(\ell)\right] C_2^{\ell}$$
$$\leqq O(\ell^{N-1})\, C_2^{\ell}$$

となり，仮定により $0 < C_2 < 1$ であるから，$\ell \to \infty$ とすれば上式の右辺は 0 に収束する。すなわち，$S^{(\ell)}$ は極限

$\hat{S}$をもつ。 この$\hat{S}$も性質(M)をもつことは明らかである。

§3で述べたアルゴリズムから,

$$S^{(l+1)} = \Phi(S^{(l)})$$

であり, $l \to \infty$ とすれば, Φの連続性から

$$\hat{S} = \Phi(\hat{S})$$

が成り立つ。 すなわち, $\hat{S}$は求める境界であり, それに対する解を $\hat{u}_{m,n}$ とすれば, $(\hat{S}, \hat{u}_{m,n})$ は, 方程式系(2.1)〜(2.6)の解となる。

5.3 解の一意性

方程式系(2.1)〜(2.6)の解が2つあったとして, それぞれ $(S', u'_{m,n})$ および $(S'', u''_{m,n})$ とする。

S'_n と S''_n は, $0 \leqq n \leqq n_0 - 1$ では等しく, $n = n_0$ ではじめて異なったと仮定する。 ここで, $S'_{n_0} < S''_{n_0}$ としても一般性は失わない。 補題1により

$$u'_{m,n_0} < u''_{m,n_0} \qquad (0 \leqq m \leqq M)$$

となる。 (2.5)式に代入すると,

$$S'_{n_0} = \sqrt{F_{n_0} - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m\, u'_{m,n_0}}$$

および

$$S''_{n_0} = \sqrt{F_{n_0} - 2h^2 \sum_{m=1}^{M-1} m\, u''_{m,n_0}}$$

であるから,

$$S'_{n_0} > S''_{n_0}$$

となり矛盾。 従って，$S'_{n_0} = S''_{n_0}$ でなければならない。明らかに，$S'_0 = S''_0$ であるから，数学的帰納法により，すべての n $(0 \leq n \leq N)$ に対して，$S'_n = S''_n$ となる。同時に，それぞれに対応する解 $u'_{m,n}$ と $u''_{m,n}$ も等しい。

文 献

(1) H. Kawarada and M. Natori, "On Numerical Solutions of Stefan Problem I", Memoirs of Numerical Mathematics No.1 (1974) 43−54

(2) J. R. Cannon and C. D. Hill, "Existence, Uniqueness, Stability, and Monotone Dependence in a Stefan Problem for the Heat Equation", J. Math. and Mech. 17 (1967) 1−19