

## 流体力学における安定性に関する一考察

三菱重工 藤野 勉  
" 山田祐司

### 1. 緒言

流体力学では流れまたはそれに伴う現象の安定性が問題となることがある。こゝに安定とは次の定義によるものである。すなわち流れまたはそれに伴う現象において定常状態(正解)が存在し、状態がこれより少しはなれると、もとの状態に復歸する性質をもつものを安定、しからざる場合を不安定と示す。したがって振動論における静的安定を意味するもので、所謂動的不安定もこゝでは安定と判断する。特に問題が非線形性をもつ場合、その解を求めたため反復計算がよく用いられるがこのときその収束性が大きな問題となる。こゝでは併せて現象の安定性と反復計算の収束性についても考察を行うこととした。具体的な問題としては、翼の捨落現象、流れの中での拡散現象からびに高速流体力学における安定性と収束性をとりあげた。

2. 現象系の安定性と反復計算の収束性の関係

現象系の状態変数を  $u_i$  とし, その挙動を記述する方程式を一般に

$$f_i(u) = 0 \quad (2.1)$$

とする。ここで

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \quad (2.2)$$

の関係が保たれているものとする。すなわちある汎関数  $\Pi(u)$  が存在し, 変分原理

$$\delta \Pi(u) = \frac{\partial \Pi(u)}{\partial u_i} \delta u_i = f_i(u) \delta u_i = 0 \quad (2.3)$$

によつて (2.1) は導くことができるものと仮定する。(2.1) の正解を  $u_i^*$  とし, 微小擾乱解を  $e_i$  とすると,  $e_i$  は

$$a_i \frac{d e_i}{dt} + f_{i,j}^* e_j = 0, \quad f_{i,j}^* = \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{u^*} \quad (2.4)$$

を満足する。上式の解を  $e_i(t) = e_i e^{-\lambda t}$  とおき

$$\lambda = f_{i,j}^* e_j / a_i e_i \quad (2.5)$$

を導く。しかつて  $f_{i,j}^*$  が正値行列ならば (2.1) を支配方程式とする現象系は安定, しかつてる場合は不安定である。次に反復計算を行うため (2.1) を次の形式に変形する。

(a) 修正係数行列法

$$c_{ij}(a) u_j = f_i \quad (2.6)$$

擾乱解

$$(c_{ij}^* + b_{ij}^*) e_j = 0, \quad b_{ij}^* = c_{ik} u_k^* \quad (2.7)$$

$c_{ij}^*, b_{ij}^*$  はとも (2.2) により対称である。したがって

$c_{ij}^* + b_{ij}^*$  が正値行列ならば安定, したがって不安定である。次に反復計算を

$$c_{ij}(u^n) u_j^{n+1} = f_i \quad (2.8)$$

により進む。正解の近傍では擾乱解に対し

$$b_{ij}^* e_j^n + c_{ij}^* e_j^{n+1} = 0 \quad (2.9)$$

の変換が行ける。  $\lambda = e_j^n$  は  $e_j$  の  $n$  反復値を表す。上式

の解を  $e_j^{n+1} = \lambda e_j^n$  とし

$$\lambda = -b_{ij}^* e_i e_j / c_{ij}^* e_i e_j \quad (2.10)$$

をうる。したがって系の安定範囲を界として反復計算は, 系が安定ならば収束, 不安定ならば発散する。

(b) 偏荷重法

(2.1) を下記の形に変形する。

$$c_{ij} u_j = f_i + g_i(a) \quad (2.11)$$

上式における  $g_i(u)$  は非線形項で、見かけの荷重項を表す。

正解の傍の攪乱解

$$a_i \frac{d l_i}{dt} + (c_{ij} - g_{ij}^*) l_j = 0, \quad g_{ij}^* = (\partial g_i(u) / \partial a_j) a_j^* \quad (2.12)$$

上式の解を  $l_i(t) = l_i e^{-\lambda t}$  とし

$$\lambda = (c_{ij} - g_{ij}^*) l_i l_j / a_i l_i^2 \quad (2.13)$$

したがって  $c_{ij} - g_{ij}^*$  が正値行列ならばこの系は安定、しからざる場合は不安定がある。ただし  $c_{ij}, g_{ij}^*$  はともに (2.2) により対称である。

反復計算の収束性

$$c_{ij} a_j^{n+1} = f_i + g_i(a^n) \quad (2.14)$$

正解の近傍で攪乱解は次の変換を行う。

$$c_{ij} l_j^{n+1} = g_{ij}^* l_j^n \quad (2.15)$$

したがって  $g_{ij}^* l_i l_j / c_{ij} l_i l_j$  の絶対値が十分に 1 より小ならば収束、大ならば発散する。すなわち系の安定限界を中心とし、安定ならば収束、不安定ならば発散する。

以上二つの反復計算の何れによっても不安定な系の正解に近づくことは困難である。

### 3. 連続系の安定性

連続系の挙動は微分方程式と境界条件式により記述される。分散系では前述のように安定性は支配方程式の係数行列の正值性に関係しているが連続系では構成方程式の係数行列がこれに対応する。そこで簡単のため一線形系とし、1従属変数、1階の微分方程式のみを取扱う。独立変数を  $x_n$  ( $n=1 \sim N$ ) とし  $E_n = \partial u / \partial x_n$ ,  $E_{N+1} = u$  により  $\delta$  のみ関数を定義し、これに共役な応力関数を  $\sigma_n$  とする。これらによる下記1次式(構成方程式)

$$\sigma_m = k_{mn} E_n \quad (3.1)$$

により記述されるものとする。ただし  $k_{mn}$  は対称とし  $k_{m, N+1} = 0$  ( $m=1 \sim N$ ) とする。  $k_{mn}$  の対称性により

$$\sigma_m \delta E_m = k_{mn} E_n \delta E_m = \delta p(u) \quad (3.2)$$

$$p(u) = \frac{1}{2} k_{mn} E_m E_n \quad (3.3)$$

$p(u)$  はエネルギー関数を表す。Greenの公式により

$$\int_a^b \sigma_m(u) \delta E_m(u) dV = \int_a^b \delta p(u) dV = \int_b F(u) \delta u dS - \int_a L(u) \delta u dV \quad (3.4)$$

を導く。ここで境界は固定または完全自由とし(2)式右辺の第1項は消失する。

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x_m} k_{mn} \frac{\partial u}{\partial x_n} - k_{N+1, N+1} u \quad (3.4)$$

系の安定性を吟味するための時間依存の微分方程式を

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = L(u) + f \quad (3.5)$$

とする。上式の一般解を  $u(x, t) = u(x) e^{-\lambda t}$  とおくと

$$L(u) + \lambda a u = 0 \quad (3.6)$$

を導く。(3.4) により

$$\int_a (L(u) + \lambda a u) \delta u dV = -\delta \frac{1}{2} \int_a (k_{mn} \varepsilon_m \varepsilon_n - \lambda a u^2) dV = 0 \quad (3.7)$$

$$\therefore \lambda = \int_a k_{mn} \varepsilon_m \varepsilon_n dV / \int_a a u^2 dV \quad (3.8)$$

上式より安定性について次の結論が導かれる。

$k_{mn}$  が正値ならば系は安定である。

$k_{mn}$  が正値だけでなくその積分値が正ならば系は安定である。しかし積分値が負となるような分布が存在するならば不安定である。 $k_{mn}$  は一般に場所の関数で  $k_{mn} \varepsilon_m \varepsilon_n$  の正値と非正値の領域に分けられる。そして非正値領域が少しでも存在し、そこで積分値が負となるような分布が存在すれば全領域に関する積分値も負となりうるから系の安定性は保証されなくなる。次に簡単のため  $N=2$  の系について考察する。構成方程式を次のように定める。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1(u) \\ \sigma_2(u) \\ \sigma_3(u) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \\ k_{12} & k_{22} & \\ & & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 = \partial u / \partial x \\ \varepsilon_2 = \partial u / \partial y \\ \varepsilon_3 = u \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

正值条件  $k_{11} > 0, D = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0, k_{33} > 0$  (3.10)

微分表式

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x} (k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial u}{\partial y}) - k_{33} u$$

ここで  $k_{11} > 0$  は仮定して、(3.10)の正值条件が破れ(3.11)の二つの場合について考察する。

(a)  $D > 0, k_{33} < 0$

この場合は  $k = -k_{33}$  の値如何によつて安定が保たれるときと保たれないときがある。たとえば  $k = 1.0$  とし、(3.11)にらける  $k_{33} = 0$  としたときの微分方程式  $L(u) + k u = 0$  の最小の固有値を  $\lambda_1$  とすると、 $\lambda_1 < 1$  ならば安定、 $\lambda_1 > 1$  ならば不安定である。

(b)  $D < 0, k_{33} > 0$

この場合は  $D < 0$  の領域が少しでも存在すれば積分値を正とする分布が存在するので、この現象系は不安定となる。

以上は自己随伴形微分方程式に関する考察であるが、次に非自己随伴形微分方程式によつて記述される系の安定性について検討する。非自己随伴形微分表式の構成式は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1(u) \\ \sigma_2(u) \\ \sigma_3(u) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \\ k_{12} & k_{22} & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 = \partial u / \partial x \\ \varepsilon_2 = \partial u / \partial y \\ \varepsilon_3 = u \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

とする。この係数行列に関する正值条件は次に示される。

$$k_{11} > 0, D = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0, T = k_{11}k_{22}k_{33} + \frac{1}{2}k_{12}k_{31}k_{32} - \frac{1}{4}(k_{11}k_{32}^2 + k_{22}k_{31}^2 + 4k_{33}k_{12}^2) > 0 \quad (3.13)$$

たとえば等方性で  $k_{11} = k_{22} = k, k_{12} = 0$  で  $k_{33} = 0$  ならば

$$D = k^2 > 0, T = -k(k_{32}^2 + k_{31}^2)/4 < 0 \quad (3.14)$$

で明に正值条件を満してゐない。しかし境界条件によつては安定が保証される。= 4.1.1.1.2 は拡散問題に関連して後述する = とする。

最後に非線形微分方程式によつて記述される系の安定性について考察する。非線形微分方程式

$$N(u) + f = 0 \quad (3.15)$$

と与えられた境界条件式を満足する解を  $u^*(x)$  とし、その近傍における擾乱解の満すべき微分方程式を

$$L(\delta u) = 0 \quad (3.16)$$

とする。上式は  $\delta u$  に対し線形であるからその安定性は今まで述べた理論により判定する = とができる。

次に具体的な  $n=3$  の例について述べる。

#### 4. 翼の捻屈 (divergence)

図1. に示される翼のスパン方向坐標を  $x$  とし、捻角  $\theta$ 、迎角  $\alpha$ 、捻曲剛性  $GJ$ 、角速度  $\dot{\theta}$ 、翼弦長  $C$ 、モーメント係数 (頭上げを正)  $C_m$  とすると、捻曲モーメントの平衡は

$$\frac{d}{dx} GJ \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dC_m}{d\alpha} \rho v^2 c^2 (\theta + \alpha) = 0 \quad (4.1)$$

に  $\rho = 2$  と与えられる。  $dC_m/d\alpha$  の値は、弾性軸が  $1/4$  弦長より前方にある場合は負、後方にある場合は正である。したがって弾性軸が後方にあるような構造の翼については振動に不安定となる可能性があり、この現象を総称、不安定を発生する流速を限界速度とよんでいる。この他翼にはさらに複雑な不安定連成振動 Flutter があるがこゝではとりあげない。

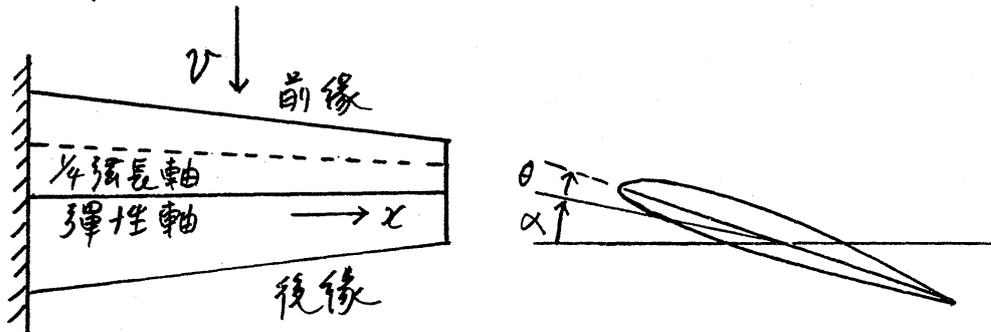


図1. 翼一般図

### 5. 拡散現象の安定性

$\theta$  を汚染濃度とすると、その拡散状況は微分方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_m} k_{mn} \frac{\partial \theta}{\partial x_n} - u_m \frac{\partial \theta}{\partial x_m} + q \quad (5.1)$$

に  $\rho = 2$  と表される。特に等方性拡散では攪乱解  $\varphi$  は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z}) \quad (5.2)$$

を満し、先の解を  $\varphi(x, t) = \varphi(x) e^{-\lambda t}$  とおくと

$$1 = \int_a \left[ k \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \varphi \right] dV \Big/ \int_a \varphi^2 dV \quad (1.3)$$

となる。上の積分における第2項は流線の比圧縮性を仮定しさらに境界条件

$$\begin{cases} \text{固定} & \varphi = 0 & b_1 \text{上} \\ \text{自由} & \partial \varphi / \partial n = 0, \quad u_n = 0 & b_2 \text{上} \end{cases} \quad (1.4)$$

を考慮し

$$\int_a \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \varphi dV = \frac{1}{2} \int_b \varphi^2 u_n dS = 0$$

により消失する。したがってこの現象系は、先の構成方程式の係数行列が正値性を満し211211にもかわらぬ安定性が保証される。ここで  $u, v, w$  は同座の  $x, y, z$  成分、 $u_n$  は境界におけるその法線成分を表す。自由境界で  $u_n = 0$  を付帯条件としたのは、たとえば地面のような固い壁面は凡を透さないためである。

## 6. 圧縮性流線流線の安定性

圧縮性流線の流線は微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_m} k(\varphi^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} = 0, \quad k(\varphi^2) = \frac{f(\varphi^2)}{f_0} \quad (6.1)$$

に  $f^2$  と与えられる。  $\lambda$  に  $\varphi$  は連続ポテンシャル

$$f^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (6.2)$$

を表し、  $u, v, w$  は流速の  $x, y, z$  成分である。境界では

$$\begin{cases} \text{固定} & \varphi = \bar{\varphi} & b_1 \text{ 上} \\ \text{自由} & \partial\varphi/\partial n = \bar{u}_n & b_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (6.3)$$

の条件式が満たされるものとする。上式の汎関数は

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_a b_1 k^*(f^2) f^2 dV - \int_{b_2} k \bar{u}_n \varphi dS \quad (6.4)$$

に  $f^2$  と与えられることはよく知られている。  $\lambda$  に

$$k^*(f^2) = \frac{1}{f^2} \int_0^{f^2} k(f^2) d f^2 \quad (6.5)$$

がある。

$\lambda$  については簡単のため2次元問題を取扱うことにする。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} k(f^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k(f^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{uv}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.6) \end{aligned}$$

上式は非線形微分方程式の形式的に  $k_{11} = 1 - u^2/c^2$ ,

$$k_{12} = -uv/c^2, \quad k_{22} = 1 - v^2/c^2 \quad \text{とすると}$$

$$D = k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = 1 - f^2/c^2 = 1 - M^2 \quad (6.7)$$

で  $M < 1$  ならば楕円形,  $M = 1$  放物形,  $M > 1$  双曲形 と

より、流中の場の中に超音速  $M > 1$  の領域が少しでも存在すれば流は不安定と見るべきが予想される。これを確かめるために以下の検討を行った

いま (6.6) 式の正解が存在するものとしこれを  $\varphi^*(x, y)$  とし、正解近傍の擾乱解を  $\phi(x, y)$  とする。

$$\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y) + \phi(x, y) \quad (6.8)$$

(6.8) を (6.6) に代入し、適当な変形を行って

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{12} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \phi}{\partial y}) = 0 \quad (6.9)$$

が導かれる。ここで

$$k_{11} = k + 2k' u^2, \quad k_{12} = 2k' u v, \quad k_{22} = k + 2k' v^2 \quad (6.10)$$

である。ここで  $k' = dk/dq^2$  を表す。(6.9) 式は偏微分方程式でその安定が果たされるためには領域内での

$$D = k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = k(k + 2k' q^2) > 0 \quad (6.11)$$

が成立すべきが必要である。ここで  $k > 0$  は満たされるので  $k + 2k' q^2 > 0$  が安定条件である。したがって

$k + 2k' q^2 = 0$  が安定限界を与える。この条件は後述の安定限界のと等しく述べられるように局所マッハ  $M = 1$  に達したときに満たされるべきである。この限界条件は非線形微分方程式の安定性 (6.7) の結果と一致している。次に反復計算の収束性について検討する。

有限要素法による圧縮性流体力学解析を行う場合、直接変分原理(6.4)を用いて离散化し

$$\Pi = \frac{1}{2} k_{ij} \varphi_i \varphi_j + \frac{1}{4} k_{ijkl} \varphi_i \varphi_j \varphi_k \varphi_l + \dots - f_i \varphi_i \quad (6.12)$$

$$\delta \Pi = \left\{ (k_{ij} + k_{ijkl} \varphi_k \varphi_l + \dots) \varphi_j - f_i \right\} \delta \varphi_i = 0 \quad (6.13)$$

によることを示すが、数値計算を進める上には下記反復計算による方が便利である。この反復値を  $\varphi^r$  とし下記微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} k^r \frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k^r \frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial y} = 0, \quad k^r = k(\varphi^{r+1}) \quad (6.14)$$

を解く。このとき用いる係数は

$$\Pi^{r+1} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} k^r \left\{ \left( \frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{\Omega} k^r \bar{u}_n \varphi^{r+1} dx \quad (6.15)$$

である。なお反復計算に用いる係数は  $k^*$  ではなく  $k$  を用いるのである。その理由は反復のとき係数は場所の関数として固定されており、その変分はとらなからである。この反復計算は2.(a) において述べた修正係数行列法に属するものである。したがって前述のようには系の安定と同時に反復計算の収束性も失う。図2.3 はレンズ形物体周りの圧縮性流れを反復法により求めたものであるが一般流速  $V=210 \text{ m/s}$  において、 $A$  点で  $M=1$  となり、収束性も失うことがわかる。

## 安定限界

$k + 2q^2 k' = 0$  により安定限界を求めよう。

$$k = \frac{p}{p_0} = \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left( 1 - \frac{q^2}{q_0^2} \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (6.16)$$

ただし  $p$  = 空気密度  $\gamma$  = 比熱比  $\approx 1.4$   $M$  = マッハ数

$$k' = \frac{dk}{dq^2} = -\frac{M_0^2}{2q_0^2} \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left( 1 - \frac{q^2}{q_0^2} \right) \right\}^{\left(\frac{1}{\gamma-1}-1\right)} \quad (6.17)$$

$$k + 2q^2 k' = k \left\{ 1 + M_0^2 \left( \frac{\gamma-1}{2} - \frac{\gamma+1}{2} \frac{q^2}{q_0^2} \right) \right\} / \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left( 1 - \frac{q^2}{q_0^2} \right) \right\} \quad (6.18)$$

したがって安定限界を定める一般マッハは

$$M_0^2 = 2 / \left\{ (\gamma+1)n^2 - (\gamma-1) \right\}, \quad n = q/q_0 \quad (6.19)$$

よって与えられる。このとき局所マッハは

$$M = n M_0 / \sqrt{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (n^2 - 1)} \quad (6.20)$$

となる。(6.19) と (6.20) より  $M=1$  が安定限界を与えることが解られる。

## 7. 謝辞

本論文執筆にあたり、東大藤田宏教授の有益な御助言を頂戴しました。こゝに厚く謝意を表します。

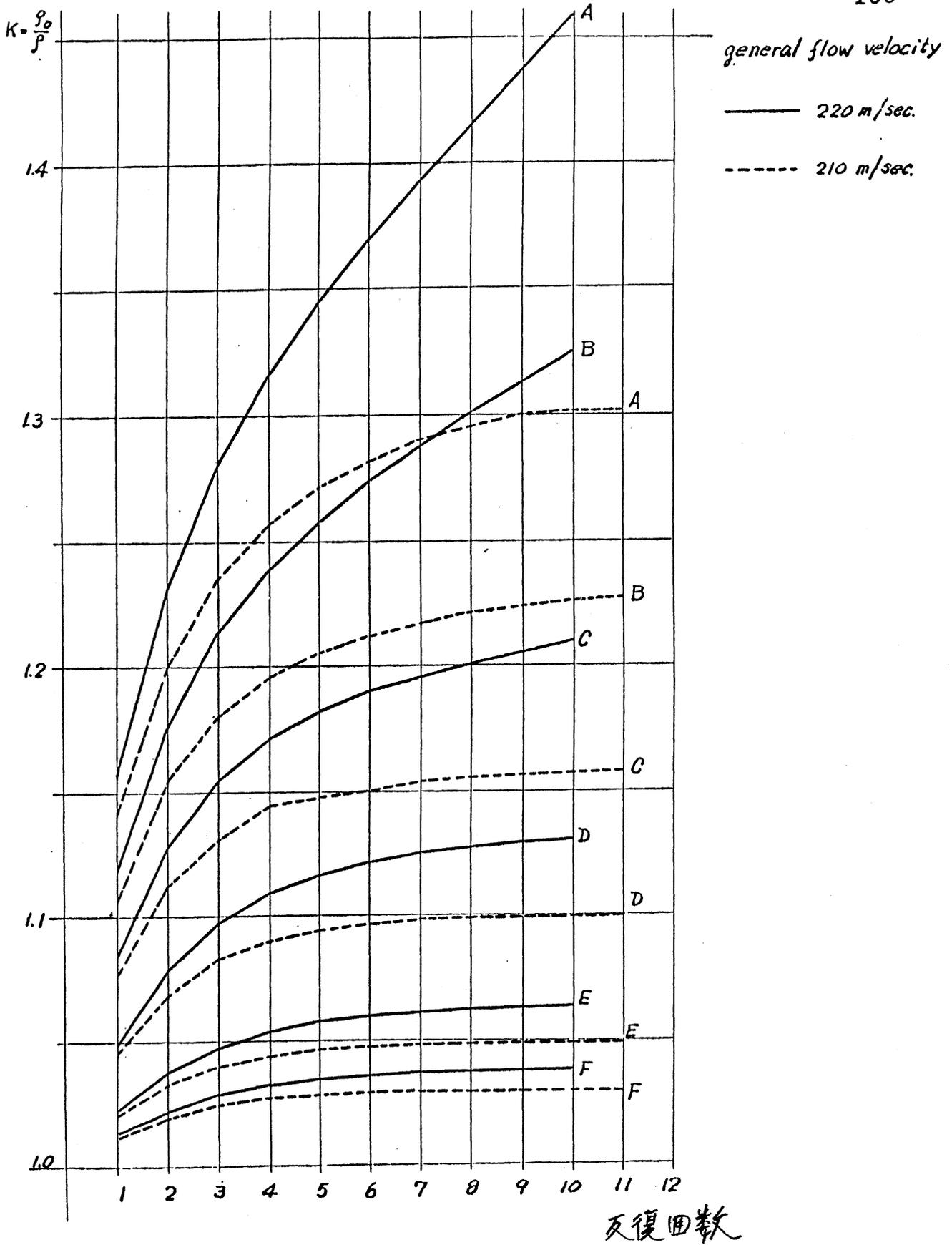


図2. 反復計算の収束性

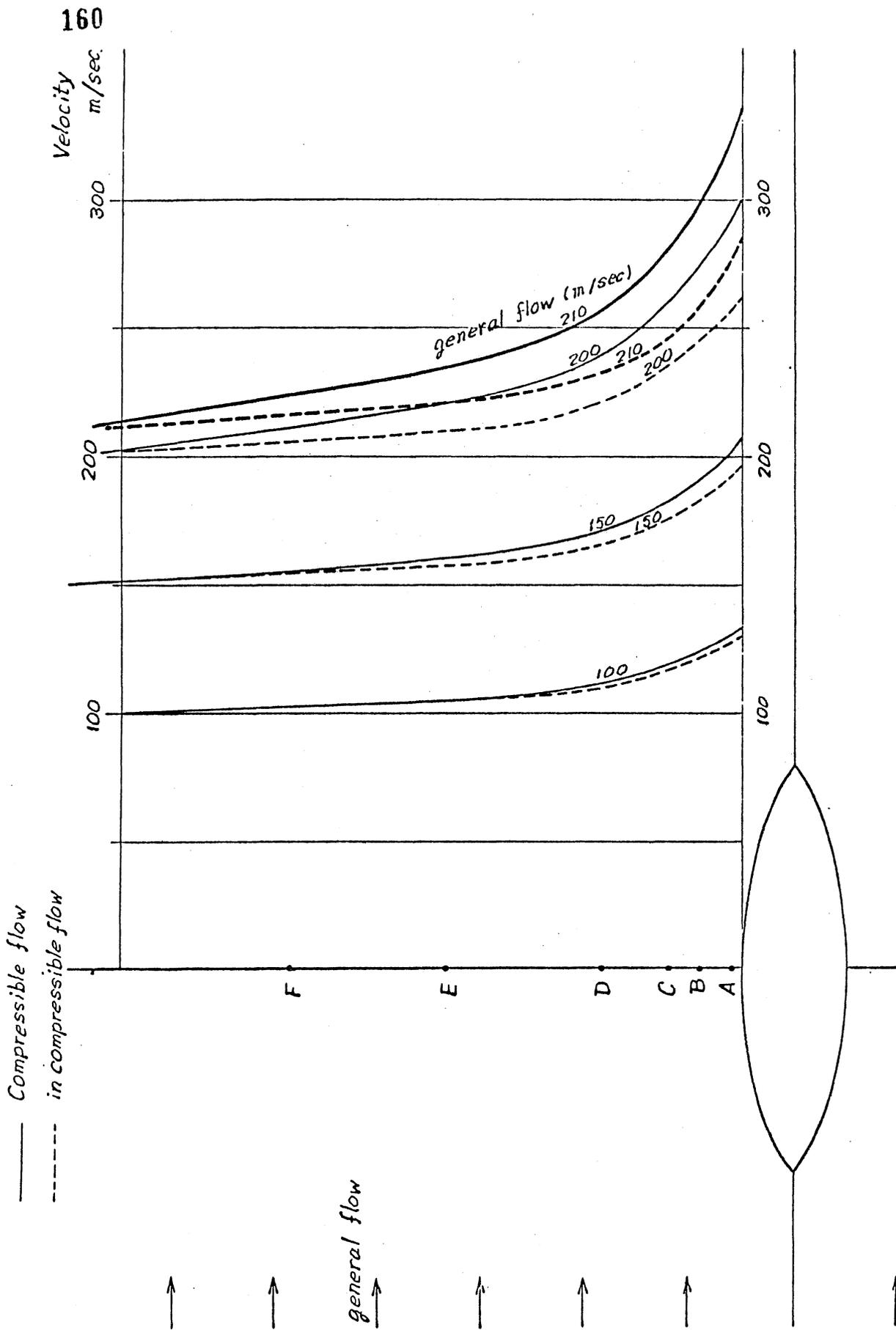


图3. 压缩性流体的流速分布