数理解析研究所講究録
241巻 1975年 132-136

$u_t = \Delta u + F(u)$ に対する Galerkin 法について

名大 理 田村英男

簡単のために以下の2つの例について説明する。

(I) $u_t = \Delta u - u^3 = Au$

(II) $u_t = \Delta u - u^2 = Au$

$\Omega \subset R^2$ ($\partial\Omega$ 境界) 有界な凸多角形として、初期値、境界値として

$u(x,0) = v(x)$ $(\in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$

$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$

を考える。ここで、$H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ $(\subset H^1(\Omega))$ は通常の Sobolev 空間の記号である。そして元の norm を $\| \ \|_2$, $\| \ \|_1$ と表わす。

(I) について の説明

今 次のような近似 step について考える。

kを 時間 mesh として.

$$(1)\quad \begin{cases} (u^{n+\frac12}-u^{n})/k = -(u^{n})^{2}u^{n+\frac12} \\ (u^{n+1}-u^{n+\frac12})/k = \Delta u^{n+1} \end{cases}$$

即ち $\quad u^{n+1} = (1-k\Delta)^{-1}\, u^{n}/(1+k(u^{n})^{2})$

$$= R_k \cdot P u^{n} = L_k u^{n}$$

$R_k = (1-k\Delta)^{-1}$, $Pu = u/1+ku^{2}$, $L_k = R_k \circ P$

R_k, Pは共に $L^{2}(\Omega)$ に於いて, contraction operator, 従って L_kも そうである。

次に $R_k = (1-k\Delta)^{-1}$ に対する Galerkin近似 (有限要素近似)について 考える。

今, S_hを, parameter h に対して, 三角分割されたΩの上で定義され, 各三角形上で, 線形な 連続函数のつくる空間で, かつ, $\partial\Omega$ では 0 になるものとする。明らかに $S_h \subset H_0^{1}(\Omega)$。

$$J(u) = (u, u) + k(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) - 2(f, u)$$

$(\ ,\ )$ は$L^{2}(\Omega)$ に於ける 内積を表わす。

u_h を minimum element of $J(u)$ on S_h と定義して, 作用素. $T_{kh} f = u_h$ を 定義する。

補題 1;

任意の $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して $\zeta = R_k f - F_{kh} f$ と定義すれば,

$$\|\zeta\|_0 \leq C h^2 (1 + h k^{-\frac{1}{2}})^2 \|f\|_2$$

ここで 定数 C は ζ, f, h, k に無関係に とることが出来る。

証明は有限要素の通常の方法 と Nitche の trick によって容易に導かれる。

補題 2;

(I) の 解 $u(x,t) = e^{tA} v$ と表示する.

ここで e^{tA} は $L^2(\Omega)$ に於ける contraction 作用素。

(i) $\|\Delta u^3\|_0 \leq C \|v\|_2$.

(ii) $\|(-\Delta)^\alpha u\|_0 \leq C t^{1-\alpha} \|v\|_2 + \frac{C}{2-\alpha} \|v\|_2$. $(1<\alpha<2)$

(iii) 任意の $w \in \mathcal{D}((-\Delta)^\alpha)$ に対して

$$\|e^{kA} w - L_k w\|_0 \leq C k^\alpha \|(-\Delta)^\alpha w\|_0 + k^2 C \|w\|_2$$

以上の (i) (ii) (iii) の estimate が 成立する。

補題 3;

$a \in \mathcal{D}((-\Delta)^\alpha)$ $(1<\alpha<2)$, $b \in L^2(\Omega)$ に対して

作用素 $L_{kh} = F_{kh} \circ P$ と定義すれば.

$$\|e^{kA}a - L_{kh}b\|_0$$
$$\le Ck^{\alpha}\|(-\Delta)^{\alpha}a\|_0 + Ck^2\|a\|_2 + Ch^2(1+hk^{-\frac{1}{2}})^2\|a\|_2$$
$$+\|a-b\|_0 .$$

C は k, h に独立な定数である。

定理 1.;

problem (I) に於いて、初期値 v が $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ に属すると仮定して、領域 Ω も上の仮定を満足するものとする。任意に固定された時間 T に対して、$T=nk$ とおいて、近似解 $u_n=(L_{kh})^n v$ と定義すると、

$$\|u(T)-u_n\|_0$$
$$\le \frac{C}{2-\alpha}\cdot h^{\frac{2}{\alpha}(\alpha-1)} \quad 1<\alpha<2 \quad (k=h^{\frac{2}{\alpha}});$$

証明は、補題3より

$$\|u(nk)-u_n\|_0 - \|u((n-1)k)-u_{n-1}\|_0$$
$$\le Ck^{\alpha}((n-1)k)^{1-\alpha}\|v\|_2 + k^{\alpha}\frac{C}{2-\alpha}\|v\|_2$$
$$+k^2C\|v\|_2 + Ch^2(1+hk^{-\frac{1}{2}})^2\|v\|_2$$

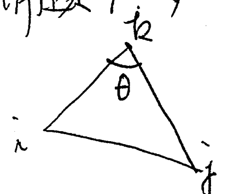
が成立する。これを n について加えると $k\sum_{i=1}^{n}(ik)^{1-\alpha}<C$ に注意すれば定理の主張が従う。

problem (II) について、(I) と異なる点は、近似 step に於いて、

$$\frac{1}{1+ku_m}\text{ が定義されなければならない。}$$

((I) に於いては $\frac{1}{1+ku_m^2}$ であったのでその心配はない)。
そのためには、$(1-k\Delta)^{-1}$ の近似解　　の正値性
(近似解の最大値原理) が保証されなければならない。

補題4;　φ_j; 節点 j で 1, i, k に於いて 0 となる piecewise linear 函数。



φ_i; についても同様。

このとき $(\mathrm{grad}\,\varphi_i, \mathrm{grad}\,\varphi_j) < 0$ if $\theta < \pi/2$.

補題4によって、k, h を適当にとれば、

$$(\varphi_i, \varphi_j) + k(\mathrm{grad}\,\varphi_i, \mathrm{grad}\,\varphi_j) \le 0. \quad (i \neq j)$$

このことより、有限要素行列の対角線上外の要素は non-positive なる故に近似解の正値性が保証される。

定理2;　problem (II) に於いて、初期値 $v(x)$ を non-negative な函数で、$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ に属すると仮定するとし、後の仮定は定理1と同様にすれば、同じ結論が得られる。