数理解析研究所講究録
241巻 1975年 119-131

境界の近似が有限要素解に及ぼす影響について

東大 生研　田端正久

§1. 序

多角形でない領域でなりたつ微分方程式に有限要素法を適用すると、有限要素法で考えている領域ともとの領域とは一般に一致しない。そこで、より良い境界の近似を得るために isoparametric を用いることなどが考えられるが、このような近似境界条件が有限要素解にどのような影響を与えるかを述べる。Ωを平面上の有界領域、Γをその境界として次の問題について考える。

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \Gamma \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{du}{dn} = g & \text{on } \Gamma \end{cases} \tag{1.2}$$

Γは十分滑らかで次のようにあらわされているものとする。

$$\Gamma = \{ (x(t), y(t)) \ ; \ \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \equiv 1 \quad \text{for } \forall t \}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{d}{dn}$ は Γでの外向き法線方向の微分である。

$H^k(\Omega)$をΩ上で定義された関数でk階までの導関数がすべてΩ上二乗可積分なものの全体とし、ノルムを次で表わす。

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

とくに、$H^0(\Omega)$を$L^2(\Omega)$と書く。同様に、$H^k(\Gamma)$は境界Γ上で言いかえたものである。また、$C(\bar{\Omega})$を$\bar{\Omega}$上で連続な関数の全体とする。Cは、h, u, f, gに依存しない定数で場所が異なれば異なる定数であるとして使う。

§2. 領域の三角形分割と近似境界

$\overline{\Omega_h} = \bigcup \overline{K_h}$ として近似領域Ω_hを得る。ここに、K_hは閉三角形要素で isoparametric 要素のように曲った三角形も許している（[1],[2] 参照）。hは細分の程度を表わすパラメータ、Γ_hをΩ_hの周とする。このとき、ΓとΓ_hはΓの normal により 1 to 1 に対応しているものとする。この対応をνと書く。$\nu: \Gamma \to \Gamma_h$

$P: (x(t), y(t)) \in \Gamma$, $\ell(t) = \mathrm{dist}(P, \nu(P))$ とするとき、次の仮定を途中で用いる。

A1 : $|\ell(t)| \le C h^\beta$ for $\forall t$ (2.1)

A2 : $|\ell'(t)| \le C h^{\beta-1}$ for $\forall t$ (2.2)

$\overline{\Omega_h}$にある格子点（節点）の全体を$\{P_i\}_{i=1}^{N_2}$，そのうちΓ_h上にあるものを$\{P_i\}_{i=N_1+1}^{N_2}$ とする。$S(\Omega_h)$をN_2次元の関数空間でその basis を$\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_2}$ とする。i.e., $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ $i, j = 1, \cdots, N_2$

このとき、$\varphi_i \in C(\overline{\Omega}_h)$ で各 K_h 上では十分滑らかであるとする。$\mathring{S}(\Omega_h)$ を $S(\Omega_h)$ の部分空間で Γ_h 上の節点では零になるものの全体とする。$\dim \mathring{S}(\Omega_h) = N_1$． $S_B(\Omega_h)$ を $S(\Omega_h)$ の部分集合で Γ_h 上の節点では与えられた関数 $\bar{g} \in C(\Gamma_h)$ と一致するものの全体とする。$C(\overline{\Omega}_h)$ からの次の mapping を定義する。

$$P : C(\overline{\Omega}_h) \longrightarrow S(\Omega_h) \tag{2.3}$$

$$\text{s.t.,} \quad (P\varphi)(Q_j) = \varphi(Q_j) \qquad j = 1, \dots, N_2$$

$$\mathring{P} : C(\overline{\Omega}_h) \longrightarrow \mathring{S}(\Omega_h) \tag{2.4}$$

$$\text{s.t.,} \quad (P\varphi)(Q_j) = \varphi(Q_j) \qquad j = 1, \dots, N_1$$

$$(P\varphi)(Q_j) = 0 \qquad j = N_1+1, \dots, N_2$$

$$P_B : C(\overline{\Omega}_h) \longrightarrow S_B(\Omega_h) \tag{2.5}$$

$$\text{s.t.,} \quad (P\varphi)(Q_j) = \varphi(Q_j) \qquad j = 1, \dots, N_1$$

$$(P\varphi)(Q_j) = \bar{g}(Q_j) \qquad j = N_1+1, \dots, N_2$$

次の仮定を途中で用いる。

$$\text{B1}: \quad \| Pf - f \|_{i,\Omega_h} \leq C h^{\alpha+1-i} \| f \|_{\alpha+1,\Omega_h} \qquad i = 0, 1 \tag{2.6}$$
$$\text{for } \forall f \in H^{\alpha+1}(\Omega_h) \cap C(\overline{\Omega}_h)$$

$$\text{B2}: \quad \| PV - V \|_{0,\Gamma_h} \leq C h^{\alpha+1} \| V \|_{\alpha+2,\Omega_h} \tag{2.7}$$
$$\text{for } \forall V \in H^{\alpha+2}(\Omega_h) \cap C(\overline{\Omega}_h)$$

また、次の notation を用いる。

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy \qquad \text{for } u, v \in H^1(\Omega)$$

ただし $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

$$a_h(u,v)=\int_{\Omega_h}\nabla u\cdot\nabla v\,dxdy \qquad \text{for } u,v\in H^1(\Omega_h)$$
$$(f,v)=\int_{\Omega} f\cdot v\,dxdy \qquad \text{for } f,v\in L^2(\Omega)$$
$$(f,v)_h=\int_{\Omega_h} f\cdot v\,dxdy \qquad \text{for } f,v\in L^2(\Omega_h)$$
$$[g,v]=\int_{\Gamma} g\cdot v\,dt \qquad \text{for } g,v\in L^2(\Gamma)$$
$$[g,v]_h=\int_{\Gamma_h} g\cdot v\,dt \qquad \text{for } g,v\in L^2(\Gamma_h)$$

§3. Dirichlet 問題

$\bar{f}\in L^2(\Omega_h)$, $\bar{g}\in C(\Gamma_h)$ をそれぞれ f, g の近似関数として与える。このとき，(1.1) の有限要素解 $\hat{u}$ は次のものをいう。

$$\begin{cases} \hat{u}\in S_B(\Omega_h) \\ a_h(\hat{u},\varphi)=(\bar{f},\varphi)_h \qquad \text{for } \forall\varphi\in \mathring{S}(\Omega_h) \end{cases}$$

$u\in H^2(\Omega)$ を (1.1) の厳密解，$\tilde{u}\in H^2(\Omega\cup\Omega_h)$ を u の拡張とする。$\|\tilde{u}\|_{2,\Omega\cup\Omega_h}\le C\|u\|_{2,\Omega}$。 $e\equiv\hat{u}-\tilde{u}\in H^1(\Omega_h)$ を拡張して $\tilde{e}\in H^1(\Omega\cup\Omega_h)$ とする。 $\|\tilde{e}\|_{1,\Omega\cup\Omega_h}\le C\|e\|_{1,\Omega_h}$. w を

$$\begin{cases} -\Delta w=\tilde{e} & \text{in } \Omega \\ w=0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の厳密解とすると $w\in H^2(\Omega)$ でありその拡張 $\tilde{w}\in H^2(\Omega\cup\Omega_h)$ とする。 $\|\tilde{w}\|_{2,\Omega\cup\Omega_h}\le C\|w\|_{2,\Omega}$ (3.1)

<u>Theorem 3.1</u>

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}\le C\{\|\tilde{u}-P\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}+\|P\tilde{u}-P_B\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}+\|\bar{f}+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h}\} \tag{3.2}$$

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} \leq c\left\{ \|e\|_{1,\Omega_h} \frac{\|P\tilde{w}-\tilde{w}\|_{1,\Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} + \sqrt{\|e\|_{1,\Omega_h}\|Pw-\mathring{P}w\|_{1,\Omega_h}} \right.$$
$$\left. + \|f+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} + \|g-\tilde{u}\|_{\Gamma_h} + \sqrt{I} \right\} \qquad (3.3)$$

ただし $I=\int_{\Omega_h-\Omega}|e|^2 dxdy+\int_{\Omega-\Omega_h}|\tilde{e}|^2 dxdy$ ▲

(証明)

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \leq \|\hat{u}-P_B\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}+\|P_B\tilde{u}-P\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}+\|P\tilde{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \qquad (3.4)$$

$\hat{u}-P_B\tilde{u}\in \mathring{S}(\Omega_h)$ なので

$$\frac{1}{c}\|\hat{u}-P_B\tilde{u}\|^2_{1,\Omega_h} \leq a_h(\hat{u}-P_B\tilde{u},\ \hat{u}-P_B\tilde{u})$$
$$= a_h(\hat{u}-\tilde{u},\ \hat{u}-P_B\tilde{u})+a_h(\tilde{u}-P_B\tilde{u},\ \hat{u}-P_B\tilde{u})$$
$$= (f+\Delta\tilde{u},\ \hat{u}-P_B\tilde{u})+a_h(\tilde{u}-P_B\tilde{u},\ \hat{u}-P_B\tilde{u})$$
$$\leq \|f+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h}\|\hat{u}-P_B\tilde{u}\|_{0,\Omega_h}+\|\tilde{u}-P_B\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}\|\hat{u}-P_B\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \qquad (3.5)$$

(3.4), (3.5) を結合して (3.2) を得る。

$$\|e\|^2_{0,\Omega_h}=\int_{\Omega_h} e(-\Delta\tilde{w}+e+\Delta\tilde{w})\,dxdy$$
$$= a_h(e,\tilde{w})-\int_{\Gamma_h} e\frac{d\tilde{w}}{dn}+\int_{\Omega_h-\Omega} e(e+\Delta\tilde{w})\,dxdy \qquad (3.6)$$
$$= I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=a_h(e,\tilde{w}-P\tilde{w})+a_h(e,P\tilde{w}-P_0\tilde{w})+a_h(e,P_0\tilde{w})$$

第3項 $=(f+\Delta\tilde{u},P_0\tilde{w}) \leq c\|f+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h}\max_{\Omega_h}|\tilde{w}|$ (3.7)

$$I_2 \leq \|e\|_{0,\Gamma_h}\left\|\frac{d\tilde{w}}{dn}\right\|_{0,\Gamma_h} \leq c\|g-\tilde{u}\|_{0,\Gamma_h}\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h} \qquad (3.8)$$

$$I_3 \leq \int_{\Omega_h-\Omega}|e|^2 dxdy+\sqrt{\int_{\Omega_h-\Omega}|e|^2 dxdy}\cdot\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h} \qquad (3.9)$$

さらに. $\|\tilde{e}\|_{0,\Omega} \leq \|e\|_{0,\Omega_h}+\sqrt{I}$ (3.10)

Sobolev の lemma と微分方程式の理論から

$$\max_{\Omega_h}|\tilde{w}| \leq C\|\tilde{w}\|_{2,\Omega\cup\Omega_h} \leq C\|w\|_{2,\Omega} \leq C\|\tilde{e}\|_{0,\Omega} \qquad (3.11)$$

(3.1), (3.6)〜(3.11) から (3.3) を得る。 ▨

A1, B1, B2 を仮定し厳密解 u が必要なだけの $H^k(\Omega)$ に入っているとする。さらに、$\bar{f}=Pf$, $\bar{g}$ としては Γ 上の節点では g, Γ 上にない節点では $\bar{g}(p)=g(\nu^{-1}(p))$ として $\bar{g}=P\bar{g}|_{\Gamma_h}$ とすると

$$\|\tilde{u}-P\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{\alpha}\|u\|_{\alpha+1,\Omega}$$

$$\|P\tilde{u}-P_B\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \leq \begin{Bmatrix} 0 \\ Ch^{\beta-\frac{1}{2}}\|u\|_{3,\Omega} \end{Bmatrix}$$

$$\|\bar{f}+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} \leq Ch^{\alpha}\|u\|_{\alpha+2}, \quad Ch^{\alpha+1}\|u\|_{\alpha+3}$$

$$\frac{\|P\tilde{w}-\tilde{w}\|_{1,\Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} \leq Ch$$

$$\|P\tilde{w}-P_0\tilde{w}\|_{1,\Omega_h} \leq \begin{Bmatrix} 0 \\ Ch^{\beta-\frac{1}{2}}\|e\|_{1,\Omega_h} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|\bar{g}-\tilde{u}\|_{0,\Gamma_h} &\leq \|\bar{g}-P\tilde{u}\|_{0,\Gamma_h}+\|P\tilde{u}-\tilde{u}\|_{0,\Gamma_h} \\ &\leq \begin{Bmatrix} 0 \\ Ch^{\beta}\|u\|_{3,\Omega} \end{Bmatrix} + Ch^{\alpha+1}\|u\|_{\alpha+2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{I} \leq Ch^{\frac{\beta}{2}}\|e\|_{1,\Omega_h}$$

が証明できる。ただし、{ } の上段は Γ_h 上の節点がすべて Γ 上にある場合、下段はそうでない場合である。したがって

<u>Cor. 3.1</u>

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \leq C\left[\begin{Bmatrix} 0 \\ h^{\beta-\frac{1}{2}}\|u\|_{3,\Omega} \end{Bmatrix} + h^{\alpha}\|u\|_{\alpha+2}\right]$$

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} \le c\left[h^{\alpha+1}\|u\|_{\alpha+3,\Omega} + \left\{ \begin{array}{l} h + h^{\frac{\beta}{2}} \\ h + h^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \end{array} \right\} \|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ h^{\beta}\|u\|_{3,\Omega} \end{array} \right\} \right]$$

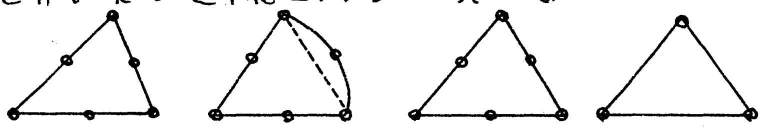
▲

<u>例</u>

T1: 三角形要素で境界では2次の isoparametric 要素を使い内部要素では直線三角形。$\varphi_i(x,y)$ は2次式を使う。

T2: 境界要素も直線三角形。$\varphi_i(x,y)$ は2次式。

T3: 境界要素も直線三角形。$\varphi_i(x,y)$ は1次式。



T1 内部要素　T1 境界要素　T2 要素　T3 要素

このとき、次の結果を得る。

	α	β	H^1 ノルム	L^2 ノルム
T1	2	3	h^2	h^3
T2	2	2	$h^{\frac{3}{2}}$	h^2
T3	1	2	h	h^2

T2 では Γ_h 上の節点で Γ 上にないものが生じている。Cor.3.1 をそのまま用いると、T2 の L^2 ノルムは $h^{\frac{7}{4}}$ となるが、$2h$ としたT2 は T3 を含むので h^2 が保たれる。

§4. Neumann 問題

(1.2) が解をもつためには $\int_\Omega f\,dxdy + \int_\Gamma g\,dt = 0$ でなければならない。$\int_\Omega u\,dxdy = 0$ のもとで厳密解が一意的に存在し $H^k(\Omega)$ に入っているとする。$\tilde{u} \in H^k(\Omega \cup \Omega_h)$ を u の拡張で

$\|\tilde{u}\|_{k,\Omega\cup\Omega_h} \leq C\|u\|_{k,\Omega}$ とする。

$k_1 = \frac{1}{mes(\Omega_h)}\int_{\Omega_h} \tilde{u}\, dxdy$, $u_1 \equiv \tilde{u} - k_1$

$\bar{f} \in L^2(\Omega_h)$, $\bar{g} \in C(\Gamma_h)$ をそれぞれ f, g の近似

$k_2 = \frac{1}{mes(\Omega_h)}\left\{\int_{\Omega_h} \bar{f}\, dxdy + \int_{\Gamma_h} \bar{g}\, dt\right\}$, $f_1 \equiv \bar{f} - k_2$

このとき (1,2) の有限要素解は次のものをいう。

$$\begin{cases} \hat{u} \in S(\Omega_h) \\ a_h(\hat{u}, \hat{\varphi}) = (f_1, \hat{\varphi})_h + [\bar{g}, \hat{\varphi}]_h \quad \text{for } \forall \hat{\varphi} \in S(\Omega_h) \\ \int_{\Omega_h} \hat{u}\, dxdy = 0 \end{cases}$$

$e \equiv \hat{u} - \tilde{u} \in H^1(\Omega_h)$ の拡張 $\tilde{e} \in H^1(\Omega\cup\Omega_h)$, $\|\tilde{e}\|_{1,\Omega\cup\Omega_h} \leq C\|e\|_{1,\Omega_h}$

$k_3 = \frac{1}{mes(\Omega)}\int_{\Omega} \tilde{e}\, dxdy$, $e_1 \equiv \tilde{e} - k_3$

w を $\int_\Omega w\, dxdy = 0$ で

$$\begin{cases} -\Delta w = e_1 & \text{in } \Omega \\ \frac{dw}{dn} = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

の厳密解とすると $w \in H^2(\Omega)$ であり $\tilde{w} \in H^2(\Omega\cup\Omega_h)$ をその拡張とする。 $\|\tilde{w}\|_{2,\Omega\cup\Omega_h} \leq C\|w\|_{2,\Omega}$ (4.1)

<u>Theorem 4.1</u>

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \leq c\left\{\|P\tilde{u} - \tilde{u}\|_{1,\Omega_h} + \|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} + \|\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}\|_{0,\Gamma_h} + |k_1| + |k_2|\right\} \tag{4.2}$$

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{0,\Omega_h} \leq C\Big\{\|e\|_{1,\Omega_h}\frac{\|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1,\Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} + \|\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}\|_{0,\Gamma_h}\frac{\|P\tilde{w} - \tilde{w}\|_{1,\Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} + \|\bar{f} + \Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} + |k_2| + |k_3| + \sqrt{I} + \frac{|[\bar{g} - \frac{d\tilde{u}}{dn}, \tilde{w}]_h|}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} + \frac{J}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}}\Big\} \tag{4.3}$$

ただし $I=\int_{\Omega_h-\Omega}|e|^2 dxdy+\int_{\Omega-\Omega_h}|\tilde{e}|^2 dxdy$

$J=\int_{\Omega-\Omega_h}|\nabla\tilde{e}\cdot\nabla w|dxdy+\int_{\Omega_h-\Omega}|\nabla e\cdot\nabla\tilde{w}|dxdy$ ▲

(証明)

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}\le\|\hat{u}-u_1\|_{1,\Omega_h}+c|k_1| \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\|\hat{u}-u_1\|_{1,\Omega_h}^2 &\le a_h(\hat{u}-u_1,\hat{u}-u_1)\\ &= a_h(\hat{u}-\tilde{u},\hat{u}-\tilde{u})\\ &= a_h(\hat{u}-\tilde{u},\hat{u}-P\tilde{u})+a_h(\hat{u}-\tilde{u},P\tilde{u}-\tilde{u})\\ &= I_1+I_2\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}I_1&=(f_1+\Delta\tilde{u},\hat{u}-P\tilde{u})+[\bar{g}-\tfrac{d\tilde{u}}{dn},\hat{u}-P\tilde{u}]_{\Gamma_h}\\ &\le c\{\|\bar{f}+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h}+|k_2|+\|\bar{g}-\tfrac{d\tilde{u}}{dn}\|_{0,\Gamma_h}\}\{\|P\tilde{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}+\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h}\}\end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.4)〜(4.6)から (4.2)を得る。

$$\begin{aligned}\|e_1\|_{0,\Omega}^2&=\int_\Omega e_1(-\Delta w)dxdy\\ &= a(e_1,w)\\ &= a_h(e,\tilde{w})+\int_{\Omega-\Omega_h}\nabla\tilde{e}\cdot\nabla\tilde{w}\,dxdy-\int_{\Omega_h-\Omega}\nabla e\cdot\nabla\tilde{w}\,dxdy\\ &\le a_h(e,\tilde{w}-P\tilde{w})+a_h(e,P\tilde{w})+J\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\text{第2項}&=(f_1+\Delta\tilde{u},P\tilde{w})_h+[\bar{g}-\tfrac{d\tilde{u}}{dn},P\tilde{w}]_h\\ &=(f_1+\Delta\tilde{u},P\tilde{w})_h+[\bar{g}-\tfrac{d\tilde{u}}{dn},P\tilde{w}-\tilde{w}]_h+[\bar{g}-\tfrac{d\tilde{u}}{dn},\tilde{w}]_h\\ &\le\|f_1+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h}\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}+\|\bar{g}-\tfrac{d\tilde{u}}{dn}\|_{\Gamma_h}\|P\tilde{w}-\tilde{w}\|_{1,\Omega_h}\\ &\quad+|[\bar{g}-\tfrac{d\tilde{u}}{dn},\tilde{w}]_h|\end{aligned} \tag{4.8}$$

さらに $\|e\|_{0,\Omega_h}\le\|e_1\|_{0,\Omega}+|k_3|+\sqrt{I}$ (4.9)

$\|w\|_{2,\Omega}\le c\|e_1\|_{0,\Omega}$ (4.10)

(4.1), (4.7)〜(4.10) から (4.3) を得る。 ▨

$\bar{f}$, $\bar{g}$ を §3 と同様にとり A1, A2, B1, B2 を仮定すると

$$|R_1| \le C h^{\beta} \|u\|_{1,\Omega}$$

$$|R_2| \le C\left[\|\bar{f}+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} + h^{\beta}\|u\|_{3,\Omega} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ h^{\beta}\|u\|_{4,\Omega}\end{matrix}\right\} + h^{\alpha}\|u\|_{\alpha+2},\ h^{\alpha+1}\|u\|_{\alpha+3}\right]$$

$$|R_3| \le C\left[h^{\beta}\|e\|_{1,\Omega_h} + h^{\beta}\|u\|_{1,\Omega}\right]$$

$$\|P\tilde{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \le C h^{\alpha}\|u\|_{\alpha+1,\Omega}$$

$$\|\bar{f}+\Delta\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} \le C h^{\alpha}\|u\|_{\alpha+2},\ C h^{\alpha+1}\|u\|_{\alpha+3}$$

$$\left\|\bar{g}-\frac{d\tilde{u}}{dn}\right\|_{0,\Gamma_h} \le C\left[h^{\alpha}\|u\|_{\alpha+2} + h^{\beta-1}\|u\|_{2,\Omega}\right]$$

$$\frac{\|P\tilde{w}-\tilde{w}\|_{1,\Omega_h}}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} \le Ch$$

$$\sqrt{I} \le C h^{\frac{\beta}{2}}\|e\|_{1,\Omega_h}$$

$$\frac{J}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} \le C h^{\frac{\beta}{2}}\|e\|_{1,\Omega_h}$$

さらに

$$\begin{aligned}\left[\bar{g}-\frac{d\tilde{u}}{dn},\tilde{w}\right]_h &= [\bar{g},\tilde{w}]_h - a_h(\tilde{u},\tilde{w}) + (-\Delta\tilde{u},\tilde{w})_h \\ &= \left\{[\bar{g},\tilde{w}]_h - [g,\tilde{w}]\right\} - \int_{\Omega_h-\Omega}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\tilde{w}\,dxdy + \int_{\Omega-\Omega_h}\nabla u\cdot\nabla w\,dxdy \\ &\quad + \int_{\Omega_h-\Omega}(-\Delta\tilde{u})\cdot\tilde{w}\,dxdy - \int_{\Omega-\Omega_h}(-\Delta u)w\,dxdy \qquad (4.11)\end{aligned}$$

ここで

$$[g,w]_{\Gamma} - a(u,w) + (-\Delta u, w) = 0$$ なることを使った。

(4.11) を用いて

$$\frac{\left|\left[\bar{g}-\frac{d\tilde{u}}{dn},\tilde{w}\right]_h\right|}{\|\tilde{w}\|_{2,\Omega_h}} \le C\left[h^{\beta}\|u\|_{3,\Omega} + h^{\alpha+1}\|u\|_{\alpha+3,\Omega} + \left\{\begin{matrix}0 \\ h^{\beta}\|u\|_{4,\Omega}\end{matrix}\right\}\right]$$

が証明できる。

Cor. 4.1

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} \leq C\left[h^{\alpha}\|u\|_{\alpha+2,\Omega} + h^{\beta-1}\|u\|_2 \right]$$

$$\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{0,\Omega_h} \leq C\left[(h+h^{\frac{\beta}{2}})\|\hat{u}-\tilde{u}\|_{1,\Omega_h} + h^{\alpha+1}\|u\|_{\alpha+3} + h^{\beta}\|u\|_{3,\Omega} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ h^{\beta}\|u\|_{4,\Omega} \end{matrix} \right\} \right]$$

例

	α	β	H^1	L^2
T1	2	3	h^2	h^3
T2	2	2	h	h^2
T3	1	2	h	h^2

§5. 数値実験

領域Ωを半径10の円として Dirichlet問題の数値実験を行った。要素分割図はP12で (1),(2),(3) は§3の例 T1, T2, T3 に相当する。NIは四分円に含まれる節点の数, NBは境界上の節点の数である。グラフは有限要素解と厳密解との相対誤差を表わしており ENERGY-NORM は $|e|_A = \{a_h(e,e)\}^{\frac{1}{2}}$ を示している。横軸は節点数でその逆数が h に比例する量である。グラフ1, 2は解として次のものをとったものである。

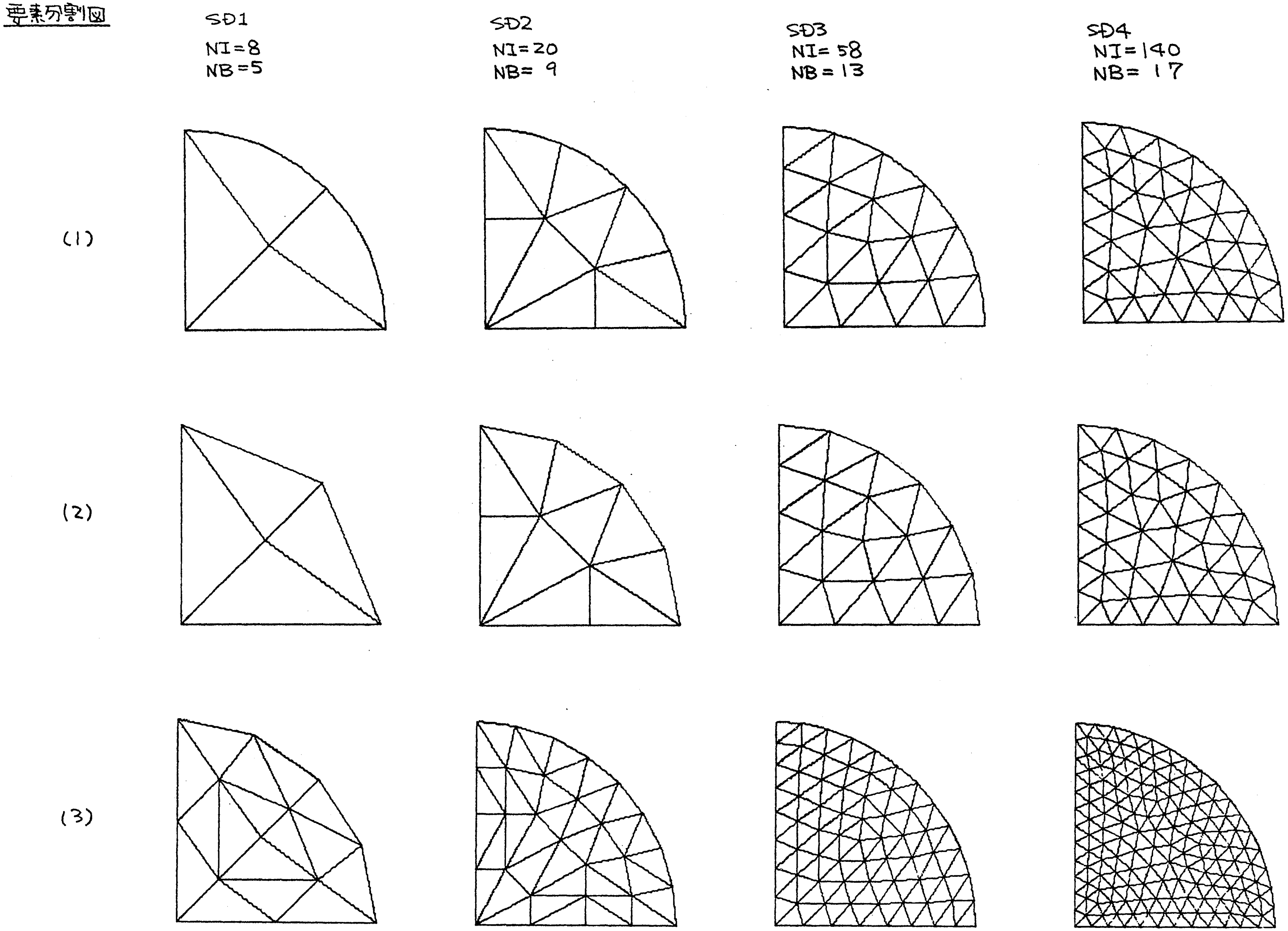
$$u = (100-x^2-y^2)(x^2-y^2)$$

$$u = \log \frac{300-2(x^2+y^2)}{100}$$

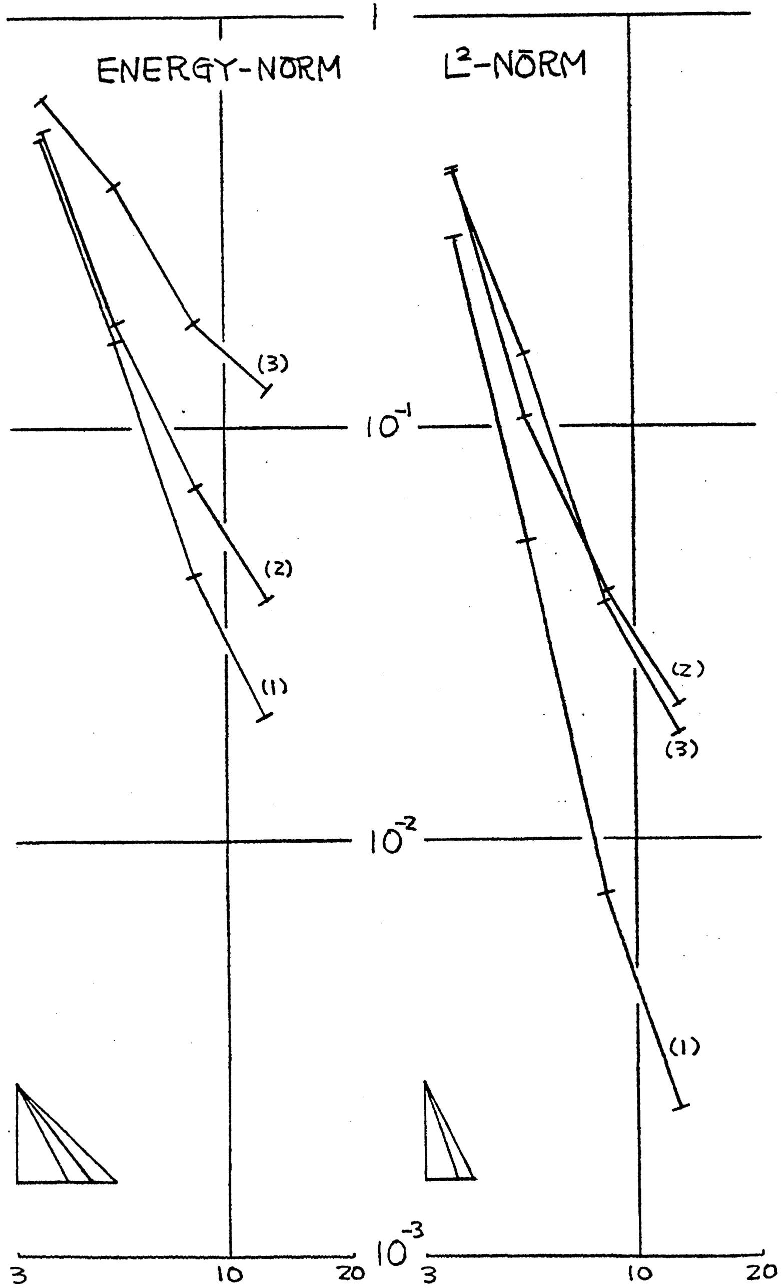
参考文献

[1] Ciarlet, P.G. & Raviart, P.A: Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng. 1 (1972), pp217-249

[2] 田端正久: 京大数理解析研講究録 202 (1974), pp53−61


要素分割図
SD1
NI=8
NB=5
SD2
NI=20
NB= 9
SD3
NI= 58
NB = 13
SD4
NI=140
NB= 17
(1)
(2)
(3)

GRAPH 1



GRAPH 2