数理解析研究所講究録
243巻 1975年 100-111

種数2の3次元多様体についての Birman-Hildenの定理の別証

筑波大学　　高橋 元男

本稿では、次の定理の証明（(i)のみ）を与える。

定理. (i) 任意の、種数2以下の3次元可附号閉多様体Mは、S^3 上の絡み目Lを分岐線とする2重分岐被覆空間と同相である。

(ii) 特に、Mがホモロジー球面なら、Lは結び目である。（もっと一般に、Mの1次元ホモロジー群の位数が奇数であることと、Lが結び目であることとは同値である。）

(iii) M（の有限表示、例えばHeegaard diagram）から、Lを作るアルゴリズムが存在する。

(iv) Mが S^3 と同相であるための必要十分条件は、Lが平凡結び目であることである（従ってMが S^3 か否かを判定するアルゴリズムが存在する。

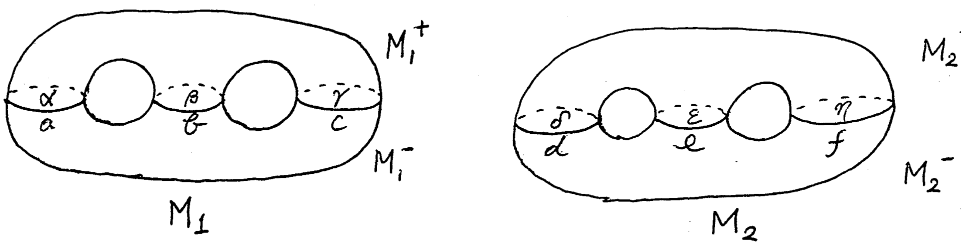
(v)（Waldhausenの意味で）同値なHeegaard diagramから作られるLは同値である。

(vi) Mに対し、Lは必ずしも一意的には定まらない。(MのHeegaard分解に依存する。)

定理. 種数2のHeegaard diagram Dから読み取った2つの関係式の1方が $a^p b^q = 1$ (ないし $a^p b^q a^r b^s = 1$) の場合、このdiagram Dを持つ多様体はPoincaré予想の反例でない。また、2つの関係式の1方の関係式の長さが9以下の場合も同様。

（i）の証明。

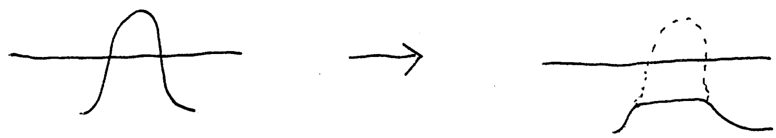
Mを種数2以下の3次元可附号閉多様体とする。Mは種数2のHeegaard分解を持つ。



従って上図の様な2つの、種数2の solid torus の表面を適当に貼り合せてMが出来ていると考えてよい。

M_2 上の loop d, e, f はこの貼り合せによって M_1 上の loop d', e', f' に移る。この際、small isotopy による変換によって、a, b, c と d', e', f' は高々有限個の点において交わり、これらは、各々の交点において、単純に交叉しているものとしてよい。

また、



の様な変形により、左上図のような部分はないものとしてよい。

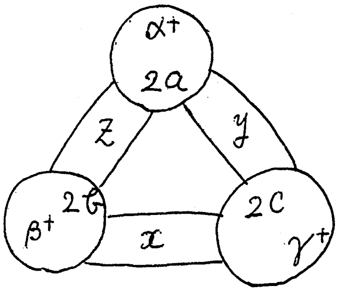
今、それぞれ a, b, c を境界とする M_1 の meridian disk α, β, γ によって M_1 を2つの部分(上部 M_1^+ と下部 M_1^-)に分ける。M_1^+ 及び M_1^- は 3-disk である。それらの表面には、α, β, γ で切った切口と、それらによって切断された d', e', f' の部分弧が画かれているものと考える。

ところで、M_1 上で a, b, c の各々に d', e', f' が交わる~~交~~点の個数はそれぞれ偶数である。それは、交わり方が単純交叉なので、~~例えば~~各 loop a, b, c は交点によって M_2^+ に対応する部分と M_2^- に対応する部分に交互に分れるからである(M_2^+, M_2^- は M_2 の上部下部)。

a, b, c の各々に d', e', f' の交わる点の数をそれぞれ $2a, 2b, 2c$ とする。

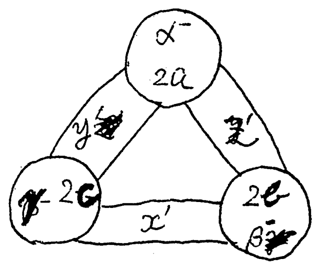
さて、M_1^+ 及び M_1^- の表面に画かれた図形を考えよう。この図形に2種類考えられる。次の図のIとIIである。

I



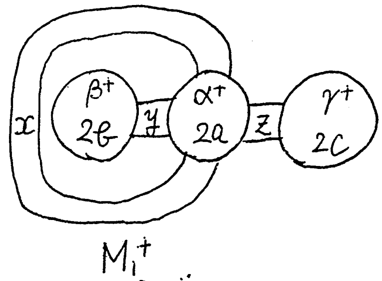
M_1^+

$$x = b + c - a = x'$$
$$y = c + a - b = y'$$
$$z = a + b - c = z'$$



M_1^-

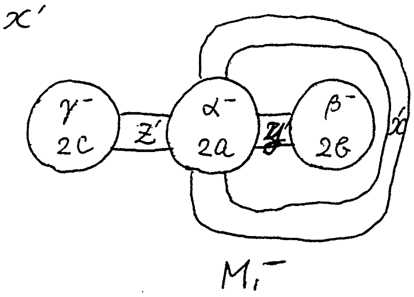
II



$x = a - b - c = x'$

$y = 2b = y'$

$z = 2c = z'$



ここで、例えばIの M_1^+ の x は β と γ を結ぶ弧の数である。

また、例えば α で切った切口の一方を α^+ で他方を α^- で表わした。

x, y, z, x', y', z' は上記の様に a, b, c で表わすことが出来、Iの場合もIIの場合も $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ であることがわかる。

注意。M_1^+ がI型で M_1^- がII型というような事は考えなくてよい。何故なら、その場合 $x = b + c - a \geqq 0$ $x' = a - b - c \geqq 0$ より $x = x' = 0$ となってしまうからである。

さて、$x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ であるから、いずれの場合にも M_1^+ 上に画かれた図形と M_1^- 上に画かれた図形は同じものと思ってよい。

以下の都合のため、各 α, β, γ は円であり、交点は円周を等分しているものとする。

合同変換 $\sigma : M_1^+ \to M_1^-$ によって M_1^+ 上に画かれた図形が、M_1^- 上に画かれた図形にうつるものとする。

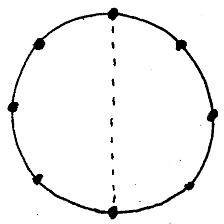
更に M_1^+ の $\alpha^+, \beta^+, \gamma^+$ と M_1^- の $\alpha^-, \beta^-, \gamma^-$ の対応ては合同変換で向きを逆にするものとしてよい。 対応

$$\alpha^+ \xrightarrow{\sigma} \alpha^- \xrightarrow{\tau^{-1}} \alpha^+$$
$$\beta^+ \xrightarrow{\sigma} \beta^- \xrightarrow{\tau^{-1}} \beta^+$$
$$\gamma^+ \xrightarrow{\sigma} \gamma^- \xrightarrow{\tau^{-1}} \gamma^+$$

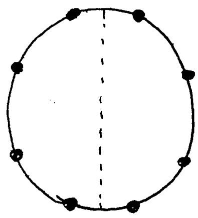
は円 $\alpha^+, \beta^+, \gamma^+$ をそれ自身に移す合同変換でありしかも向きを逆にする。従ってそれは、ある対称軸（円の直径）に関する対称変換になっている。

この対称軸は必ず円周を等分している交点を結ぶ直径であることを示そう。

即ち、（交点の数が偶数であるから）可能性としては、下図の様な二通りの場合が考えられるが、II は起らないことを示すわけである。

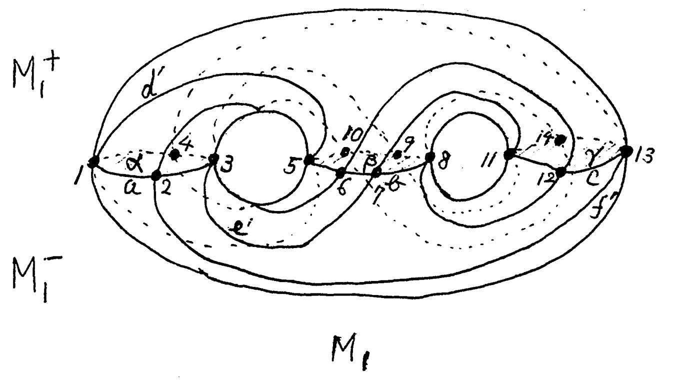


I

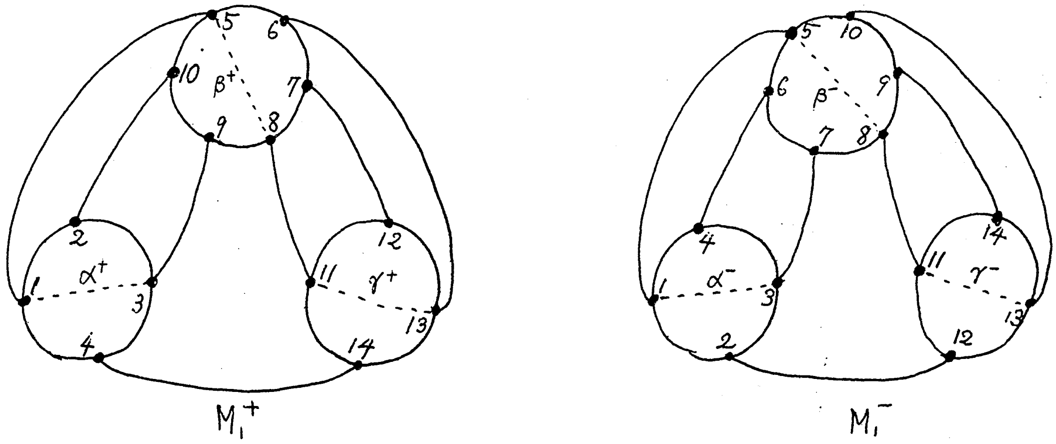


II

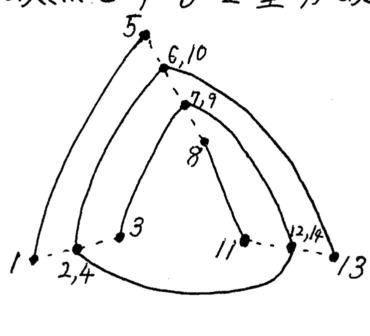
以下、次のような具体例について考えてみる。



M_1 上の loop d', e', f' が図の様であったとする。これを α, β, γ で切ると下図の様になる。

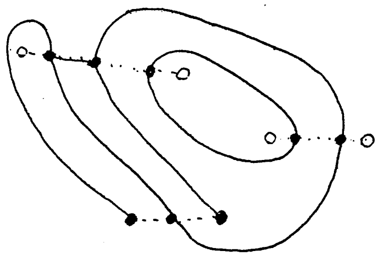


M_1 の表面だけ考えると、これは S^2 上の、6点 1, 3, 5, 8, 11, 13 を分岐点とする2重分岐被覆空間である。(下図参照)



この様に、基底空間S^2上では、3つのloopは、6つの分岐点を結ぶ単純弧になっていることを示そう。そうすれば対称軸が交点を結ぶ直径であることが言えたことになる。

今、上の事を否定すると、例えば下図の様に

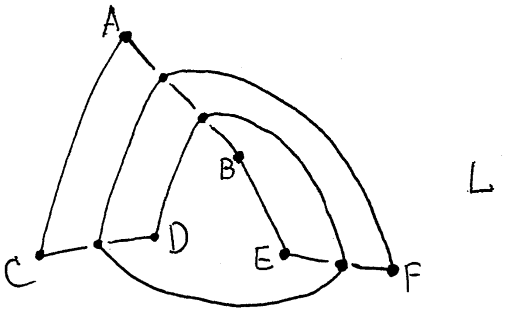


基底空間S^2上で、3つのloopは、1つのloopと1つの単純弧の様になっている。(genus 2 のtorus上で3つのloopであるから、可能性は上の場合とこの場合の2つしかない。)

もし、この様になっていたとすると、loopはS^2を2つの部分に分けるからgenus 2 のtorus上でも、このloop上の2つのloopによって、2つの部分に分けられていることになる。しかし、最初に戻って、3ページの図のM_2のloop d, e, fのどの2つのloopによっても種数2のtorusは2つの部分に分たれない。これは矛盾であるので、我々の主張は証明された。

従って、いつでも7ページの一番下の図の様に、6つの分岐点はα, β, γで切った時の交点になっている。

さて、7頁の一番下の図から次の様な絡み目(この場合は結び目)を作る。



このようにして作られた絡み目は3橋型、即ち3つの上道と3つの下道からなるものである。

さて、与えられた3次元多様体Mが、こうして作られた絡み目Lを分岐線とする2重分岐被覆空間であることを示す。

このため、3橋型の絡み目を先ず一般的に論ずることにする。3橋型の絡み目 Lの図が平面上に上の如く与えられたとすると上道と下道をつなぐ6点A,B,C,D,E,Fのみが、この平面上にあり、上道はこの平面の少し上を図の通りに走り下道は、平面の 少し下を走り6点をつなぐような空間曲線を考えると、それがLを実現したものになる。

今の事は3次元ユークリッド空間内で考えたが S^3内で 考えて言いかえると次の様になる。

S^3 はその中 にある S^2 によって D^3_+ と D^3_- の2つの disk に分れるものとし, S^2 上に 6点 A,B,C,D,E,F

があるものとする。この6点の2つづつを結ぶ3つの単純弧p,q,rがD^3_+内に画かれていて、これらはD^3_+の表面S^2の近くを通り互いに絡み合っていないとする。もっと正確にいうと、S^2上に6点A,B,C,D,E,Fを結ぶ互いに交わらない3つの単純弧が画かれ、その近くを通ってD^3_+内に3つの単純弧が画かれているということである。D^3_-内にも同様に3つの単純弧s,t,uがあるものとする。これらの合計6つの単純弧を結んだものが3橋型の絡み目Lということになる。

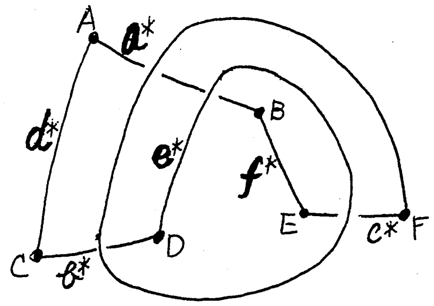
D^3_+　　D^3_-

さて、Lを分岐線とする、S^3上の2重分岐被覆空間M^*の意味は既知とし、M^*のHeegaard分解を作る。

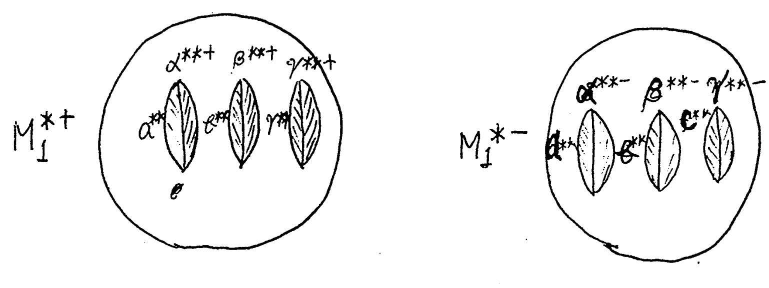
Lは、p, q, r, s, t, uという6つの弧より成り、p, q, rはD^3_+内に、s, t, uはD^3_-内にあるから、M^*は、D^3_+上のp, q, rを分岐線とする2重分岐被覆空間M^*_1とD^3_-上のs, t, uを分岐線とする2重分岐被覆空間M^*_2(共にgenus 2のsolid torus)の表面を適当に貼り合せて出来る。これはM^*の種数

2の Heegaard 分解を与える。しかも、前ページの図の a^*, b^*, c^* 及び d^*, e^*, f^* は 分岐被覆空間 M_1^* 及び M_2^* 上では、丁度3ページの図の a, b, c 及び d, e, f に相当する meridian loop になる。これを $a^{**}, b^{**}, c^{**}, d^{**}, e^{**}, f^{**}$ とする。貼り合せによって d^{**}, e^{**}, f^{**} に対応する M_1^* 上の loop を $d^{**\prime}, e^{**\prime}, f^{**\prime}$ とする。

例えば、9ページの絡み目で考えると



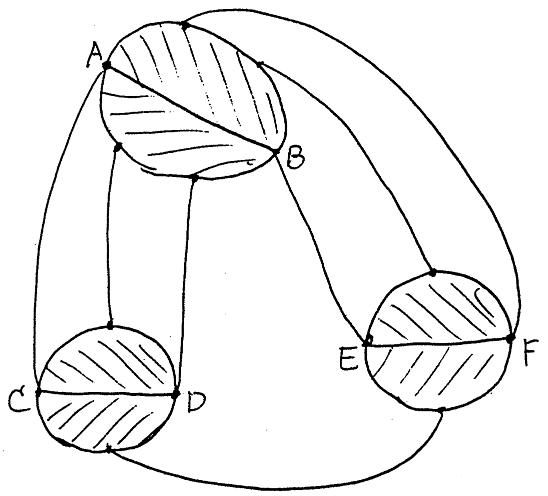
の様になっている。また、前ページの $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \varepsilon^*, \eta^*$ は分岐被覆空間上では meridian disk $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}, \delta^{**}, \varepsilon^{**}, \eta^{**}$ となる。 M_1^* を $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}$ で切ったとすると（前ページの図参照）、次のようになる。



（斜線は切口を示す。）

この切口は M_1^{*+} と M_1^{*-} とで互に対称に対応して

いる。 9ページの絡み目の場合は M_1^{*+}, M_1^{*-} 共



の様になる。ところがこれは7ページの真中の図と同じである。これはMに最初に与えられたHeegaard diagramとM*から上の様にして作られたHeegaard diagramが同一であることを意味し、従ってMとM*は同位相である。(証明終)