数理解析研究所講究録
243巻 1975年 88-96

帯のトポロジー

東大・教養　加藤十吉

序、　なめらかな帯の$\mathbb{R}^3$での位置を分類するのが目的である。§1では同位（イソトピー）のもとでの分類を行う。帯の中心線の結び糸型とひねり数が完全不変量である。§2では正則ホモトピーのもとで分類する。mod.4のひねり数がうめこみの正則ホモトピーのもとでの完全不変量となる。結局、$\mathbb{R}^3$のうめこまれた帯の正則ホモトピー類は円環面に帰着する。（但し、うめこみ自体でなく像のみを考える）。

実際，メービウスの帯は4回ひねり（2回ねじれ）の帯と$\mathbb{R}^3$の中で正則ホモトープで，4回ひねりの帯と円環面は互に正則ホモトープになる。前者はメービウスの帯を中心線にそって切ると4回ひねりの帯がえられることと同等で，後者は図1から観察される。結果はスメールの定理を少し拡張すれば得られるが，直観的な議論はまつわり数の考察でなされ興味深いと思われる。

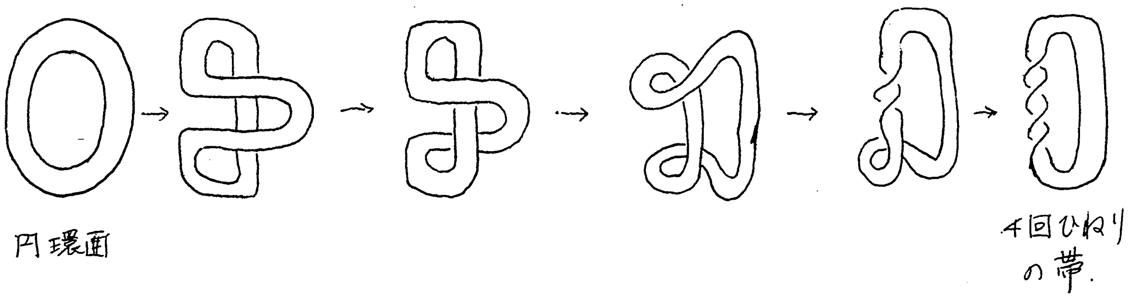


図1

§1. 帯とその同位類.　以下，すべてC^∞-カテゴリーで考える。したがって，多様体はなめらかで，はめこみ（*embedding*）やうめこみ（*immersion*）はC^∞であるとする。

連結，コンパクトな2次元多様体Bに対し，$H_1(B)=\mathbb{Z}$が成立するとき，Bは帯と呼ばれる。曲面の分類定理から，帯は円環面B_0かメービウスの帯B_1に同相である。帯Bに対し，$H_1(B)$を生成するホモロジー類を表わすBの内部の単一閉曲線をBの中心と呼び，cと表わす。cはBの内部のイソトピーのもとに一意的に定まる。Bの境界∂Bをbと表わす。BがB_0と同相なら，bは2つの円周で，又，B_1の2重被覆はB_0であるから，サイクルとして，$b \sim \pm 2c$（ホモローグ）という関係がある。bとcの向きは常に$b \sim 2c$が成立するように定めることにする。$\mathbb{R}^3$にはめこまれた帯Bについて考える。Bのひねり数$l(B)$を

$$l(B) = l(b,c) \quad (b\text{と}c\text{のまつわり数})$$

と定義する。$l(b,c)$はcのザイフェルト膜Fとbの交叉数

$I(b, F)$ に等しい。

定理1. 帯 $B\subset\mathbb{R}^3$ に対し，Bの中心線 $c\subset\mathbb{R}^3$ の同位類（結び糸型）とひねり数 $l(B)$ はBの同位（イソトピー）類の完全不変量である。すなわち，この不変量で与えられる次の写像は全単射である。{帯の $\mathbb{R}^3$ での同位類} $\Rightarrow$ {結び糸型}$\times\mathbb{Z}$

（証明） 被覆同位定理により，同位であることと全同位（ambient isotope）ということとは同値である。よって，中心線の結び糸型とひねり数は帯の同位不変量である。逆に，結び糸c及び整数nが与えられたとし，cを中心線，nをひねり数とする帯 $B_{c,n}$ を構成し，cと同位な中心線を有し，ひねり数がnである帯が $B_{c,n}$ と同位であることを示そう。まず，cのザイフェルト膜Fをとり，Fへのε-法線分バンドルをCへ制限したものを $B_{c,0}$ とおく。$B_{c,0}$ は中心線c，ひねり数0を有する。cの1点のまわりでの $(\mathbb{R}^3, F, c)$ の局所モデルとして，$(\mathbb{R}^3, \mathbb{H}, \mathbb{R}^1)$ をとれる。但し，$\mathbb{R}^3$ を (x, y, z)－空間とすれば，$\mathbb{H}^2$ は (x, z)－上半平面，$\mathbb{R}^1$ はx軸である。cの向きは，$\mathbb{R}^1$ の正の向き，そして，$B_{c,0}$ は $\mathbb{R}^1\times[-1, 1]\times 0$ とみなせる。こゝで写像 $\tau_n : \mathbb{R}\times[-1,1]\to\mathbb{R}^3$ を，$0\leqq x\leqq 1$ に対し，$\tau_n(x, y) = (x, y\cos n\cdot x\cdot\pi, y\sin n\cdot x\cdot\pi)$
又，$x\leqq 0$，$1\leqq x$ に対し，$\tau_n(x, y) = (x, y, 0)$

と定義する。τ_n は矛盾なく定義され，はめこみである。$[0,1]\times[-1,1]$ の外側では恒等写像だから，$B_{c,0}$ から $\mathbb{R}^3$ へのはめこみ $\tau_n : B_{c,0} \to \mathbb{R}^3$ へと拡大される。

$\tau_n(B_{c,0}) = B_{c,n}$ が求めるものである。実際，$l(B_{c,n}) = n$ が示される。　さて，かってな帯 $B \subset \mathbb{R}^3$ が与えられ，中心線が c と同位で，ひねり数 $l(B)$ が n であるとする。$\mathbb{R}^3$ の全同位のもとで，B の中心線は c であるとしてよい。c の $\mathbb{R}^3$ での法円板バンドルを N とすれば，B 及び $B_{c,0}$ はその部分線分バンドルとみなされ，N が自明であることから，これらは写像 s，$s_{c,n} : c \longrightarrow O(2)/O(1)\times O(1) = S^1/\mathbb{Z}_2$ のホモトピー類（すなわち写像度）　$(= S^1)$ で分類される。自明化を c のザイフェルト膜への法ベクトル場を拡張してとれば，s，$s_{c,n}$ の写像度はそのひねり数 $l(B)=n$，$l(B_{c,n})=n$ に一致する。よって，B 及び $B_{c,n}$ は部分バンドルとして同型となる。すなわち，N の，したがって，$\mathbb{R}^3$ の全同位のもとで B と $B_{c,n}$ は重ねられる。(了).

c が自明な結び糸のとき，$B_{c,n}$ を B_n と表わす。B_n の標準形は２本の組み糸で次の様に表わせる。

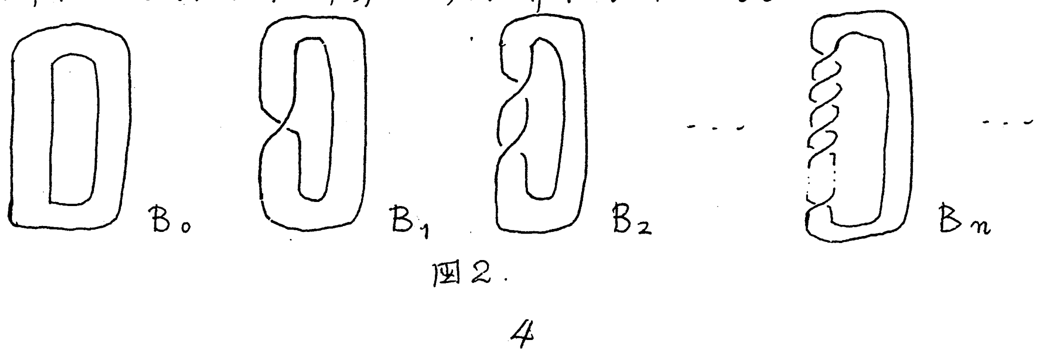


図２.

[注]、 はめこみ $f, g : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が同位となる為の必要十分条件は、$f(c)$ と $g(c)$ が向きづけられた結び糸として同位で、$\ell(f(B)) = \ell(g(B))$ が成立することである。

§2. 帯のうめこみの正則ホモトピー類.

C^∞-写像 $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ がうめこみとは、B の各点で、φ の微分の階数が2であるときをいう。$\varphi(B)$ は $\mathbb{R}^3$ にうめこまれた帯であるという。C^∞写像 $\Phi : B \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が正則ホモトピーであるとは、各 $t \in [0,1]$ に対し、$\Phi|B\times t$ がうめこみであるときをいう。このとき、$\Phi_0(x) = \Phi(x, 0)$, $\Phi_1(x) = \Phi(x, 1)$ により定義されたうめこみ $\Phi_0, \Phi_1 : B \to \mathbb{R}^3$ は互に正則ホモトープであるといわれる。又、うめこまれた帯 $\Phi(B_0)$ と $\Phi(B_1)$ も互に正則ホモトープと呼ばれる。

補題1. 帯 B の $\mathbb{R}^3$ へのうめこみははめこみと正則ホモトープである。(∵) B の中心線のうめこみの自己交叉を $\mathbb{R}^3$ の局所イソトピーでとり除き、中心線ははめこまれているとしてよい。局所イソトピーは B からの正則ホモトピーへ拡張される。次に、中心線の管状近傍の中へ帯をちぢめてゆけばよい。(了).

補題2. 帯 $B \subset \mathbb{R}^3$ はある $B_n \subset \mathbb{R}^3$ と正則ホモトープ。

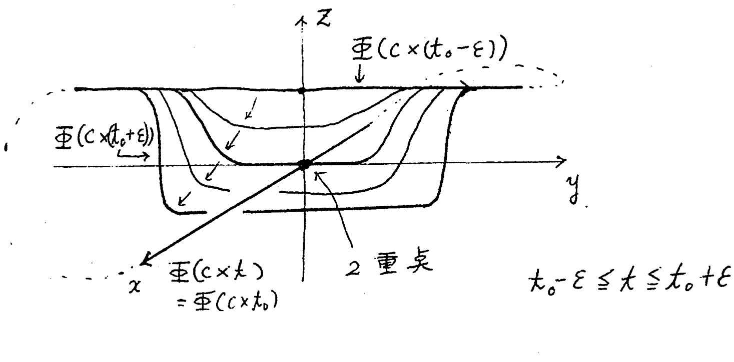
(∵) Bの中心線cを$\mathbb{R}^3$へ正則射影して，正則射影での交叉点の上下の指定を適当に入れかえてcを自明にしうる。中心線のこの正則ホモトピーは図1の途中で行われている帯の上下を入れかえる正則ホモトピーへと拡張される。(了)

補題3. $n \equiv m \pmod 4$ であれば，B_n と B_m は正則ホモトープである。 (∵) 図2よりこれは図1に帰着される。

はめこみ $f : B \to \mathbb{R}^3$ に対し，$l(f) = l(f(B))$ と定義し，fのひねり数と呼ぶ。

補題4. はめこみ $f, g : B \to \mathbb{R}^3$ が正則ホモトープなら，$l(f) \equiv l(g) \pmod 4$ が成立する。

(∵) fとgの間の正則ホモトピー $\Phi : B \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ を $c \times [0,1]$ へ制限したものは，$f(c)$と$g(c)$の間の正則ホモトピーとなる。これを一般にすれば，$[0,1]$の有限個の点を除くと同位を与えるとしてよい。そして，その有限個の点ではcが2重点をもつようにΦでうつされるとしてよい。局所的には次の図3の左のようになる。但し，$\Phi(c \times t_0)$が2重点を有するとしている。



したがって，ひねり数の変化はそのようなt_0で問題となる。

$B^- = \Phi(B\times(t_0-\varepsilon))$ ， $B^+ = \Phi(B\times(t_0+\varepsilon))$ とおく。

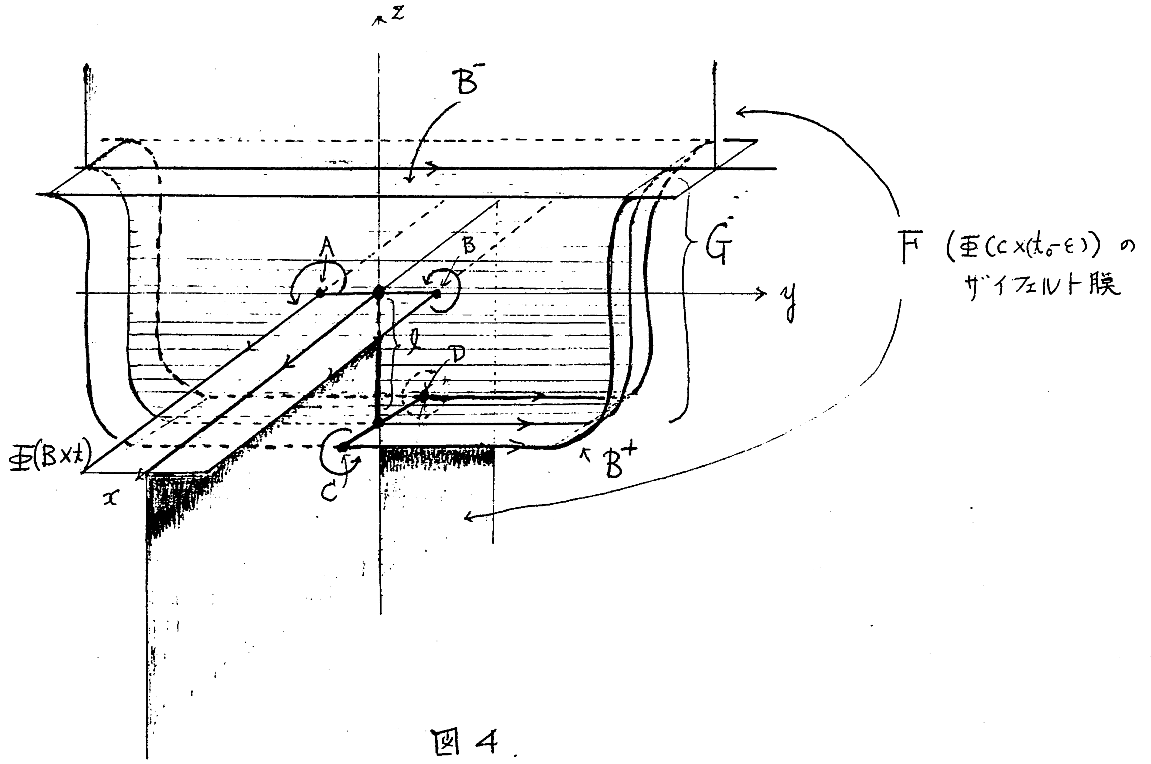


図4.

上図の様にザイフェルト膜Fの局所モデルをとれば，

$$l(B^+) = l(B^-) + 4$$

が成立する。これは，$F\cup G$は自己交叉lを有するが，

$\partial(F\cup G) = \Phi(c\times(t_0+\varepsilon))$ である鎖をなすことにより，

$$l(B^+) = I(\Phi(c\times(t_0+\varepsilon)),\ F\cup G) = l(B^-) + 4$$

と計算される。結局，一般的に，$l(B^+) = l(B^-) \pm 4$

が成立する。[J].

はめこみ $f : B \to \mathbb{R}^3$ に対し，$l(f)$ の mod 4 合同類を

$l_4(f)$ と表わす。うめこみ $\varphi: B \to \mathbb{R}^3$ は補題1によりはめこみ $f: B \to \mathbb{R}^3$ と正則ホモトープで，$l_4(f)$ は補題4により正則ホモトピー不変量であるから，φ の mod 4 ひねり数 $l_4(\varphi) = l_4(f)$ が定義される。補題をまとめると，

定理2. うめこみ $\varphi, \psi: B \to \mathbb{R}^3$ が正則ホモトープである為の必要十分条件は $l_4(\varphi) = l_4(\psi)$ ということである。

(注). Bが向きづけ可能なら，$l_4(\varphi)$ は2でわりきれる。φ と正則ホモトープなはめこみ f に対し，$f(B)$ は向きづけ可能であるから，$l(f)$ が偶数となるからである。よって，その正則ホモトピー類は B_0 か B_2 に等しい。これは，スメールの結果に一致する。実際，$\pi_1(V_{3,2}) = \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ であるから。$\mathbb{R}^3$ の 2-frame は順序づけられた独立なベクトルの対 (v_1, v_2) である。$(v_1, v_2) \equiv (v_1, -v_2)$ と同一視すれば，$V_{3,2}$ の商空間 $\overline{V}_{3,2}$ が得られ，同一視写像

$V_{3,2} \longrightarrow \overline{V}_{3,2}$ は2重被覆で，完全系列

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Z}_2}}{\pi_1(V_{3,2})} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_{3,2}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

が得られる。$\pi_1(\overline{V}_{3,2}) = \mathbb{Z}_4$ が成立する。実際，$\varphi: B \to \mathbb{R}^3$ に対し，$l_4(\varphi)$ を $\pi_1(\overline{V}_{3,2})$ の元とみなすスメールの写像の拡

張を考えることができる。

B_0 をその2重被覆 $\gamma_0 : B_0 \to B_0 \subset \mathbb{R}^3$ の像とみなせば，$\ell_4(\gamma_0) \equiv 2$ であるから（図5），B_0 と B_2 は正則ホモトープである。B_1 の2重被覆 $\gamma_1 : B_0 \to B_1 \subset \mathbb{R}^3$ に対しては，$\ell_4(\gamma_1) \equiv 0$ が成立する。（図5）　よって，B_0 と B_1 は正則ホモトープである。（図1参照）　B_2 の2重被覆 $\gamma_2 : B_0 \to B_2 \subset \mathbb{R}^3$ に対し，$\ell_4(\gamma_2) = 2$ が成立する。又，B_3 の2重被覆 $\gamma_3 : B_0 \to B_3 \subset \mathbb{R}^3$ に対して $\ell_4(\gamma_3) = 2$ が成立する。

結局，すべての帯 $B \subset \mathbb{R}^3$ は B_0 と正則ホモトープである。

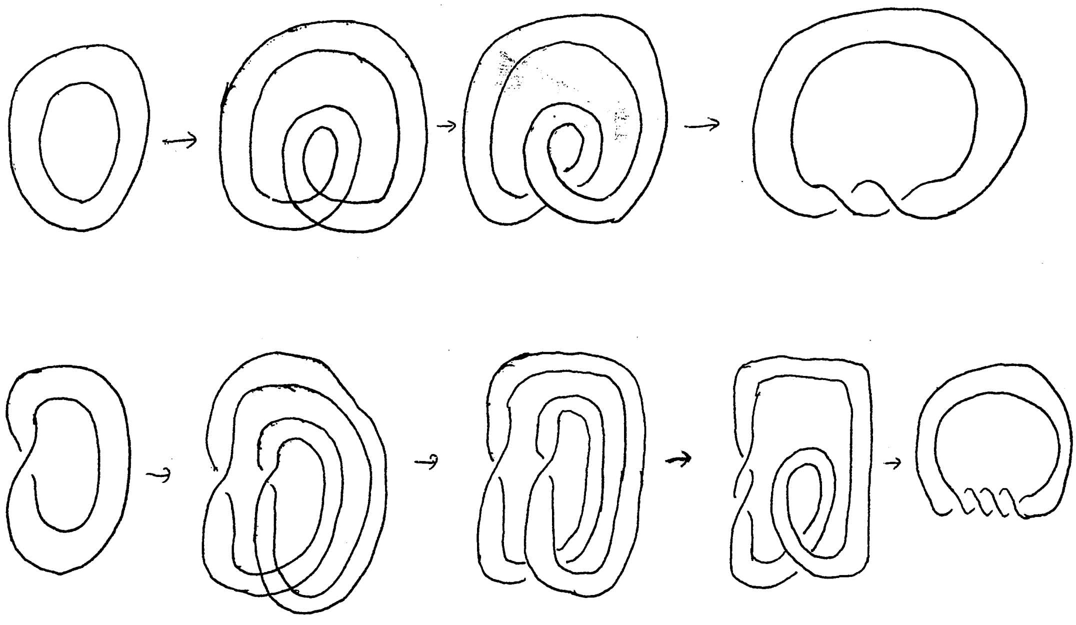


図5.