

平面ポアズイユ乱流の数値実験と二、三の考察

名大 工学部 桑原真二

§1. まえがき

Reynolds以来, 乱流について非常に多くの研究がなされてきた。Taylor, Kolmogorov等の成功により、一様、等方性乱流に多くの努力がはらわれた。最近では他の物理の分野との交流もさかんで、たとえば、場の量子論や統計物理学でも知られるグリーン関数の方法等の手法がもたらわれようになった。

今日, "乱流" を明確に定義することはむずかしいように思われる。しかし、ほとんどすべての流体力学者が乱流とみとめる流れがある。たとえば、臨界レイノルズ数を十分上をえた状態における、管内の流れ、境界層の流れ、小さい物体の伴流等がそれである。さて、このような"乱れた" 流れの特徴は何であろうか。まず、現象を特徴づけるパラメーターが非常に多いことである。たとえば、運動場を振動数あるいは波数分析すれば、非常に多くの振動数、波数を

るであろう。いわば、時間的にも、空間的にも非常に多くの特徴的時間および長さが存在することを示す。

一方、どんな乱流でもはじめは層流であり、層流を經過して、乱流状態に遷移する。それ故、遷移の機構は乱流を理解する上で非常に重要である。実際、平行流について考えてみると、擾乱をフーリエ成分にわけて表わしうるとすると、はじめはある一つのフーリエ成分が選択的に成長し、ついで、フーリエ成分間の相互作用によって、多くの成分を励起し、ついに連続スペクトルまで成長する。

又、十分発達した定常乱流は、一種の統計的、力学的平衡状態にあると考へられる。エネルギー的にみれば、升かゝりのエネルギーの供給（管流では圧力勾配、境界層流、は小さい物体の伴流では、物体にくわわる力）によって、多くの擾乱の成分（モード）が励起し、モード間の相互作用によって更に小さいモードにエネルギーがうつり、最後は粘性の散逸作用によって、熱になつてしまふ。そして、この一連の過程が、外部パラメータ（圧力勾配等）に対応してきまふ一種の統計的平衡状態にあると考へられる。

以上の考察から、乱流を次のように特徴づけられることかである。

① 乱流は非常に多くのパラメータ（モード）をもつてゐる。

- ② 外部ノズルノズルとの延びに対応して、ある統計的平衡状態に近接する傾向をもっており、定常乱流は、そのような平衡に到達した状態と考へよう。

§2. 流れの記述と基礎方程式

2.1 では、平面ポアズイユ乱流を考察する。物理的には、層流のポアズイユが存在しているとし、それに初期攪乱を与えたとする、どのようにして統計的平衡に到達するかを考察する。時間の経過とともに、流れはいろいろの状態をへめぐりであるが、(平均的) 圧力勾配は一定を保っておくものとする。そこで、単位時間毎に断面を通過する流量は、一般に一定でなく、時間的に変化する。実際の流れでは、十分長い有限のダクトの両端の圧力差を一定を保っておくことに対応している。それ故、レイノルズ数を平均流量としての速度 U にとずらつくると、時間的に変化することを \sqrt{Re} であり、 \sqrt{Re} であるので、圧力勾配に対応する層流の最大流速をその基準にとりこめる。

乱流の速度場 $w(x, t)$ 、圧力場 $p(x, t)$ は Navier-Stokes 方程式にしたがうものとする。

$$\operatorname{div} w = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (w \cdot \operatorname{grad}) w = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta w \quad (2.2)$$

ここで ν は動粘性率である。また

$$v = \bar{u} + \tilde{u} \quad p = \bar{p} + \tilde{p} \quad (2.3)$$

$$\bar{u} = (\bar{u}(y), 0, 0) ; \quad \bar{p} = -\alpha x, \quad \alpha = \text{const.} \quad (2.4)$$

と分解し, \bar{u}, \bar{p} とし 2 層流解ととす:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = -\frac{\alpha}{\rho \nu}. \quad (2.5)$$

上の通り; 物理的状況では, 圧力変動 \tilde{p} は平均値の 0 と考えられるが, 速度変動 \tilde{u} の平均値は一般に 0 と異なる。実際, レイノルズ応力による基本流へのフィードバックを考慮すると (2.5) は

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = -\frac{\alpha}{\rho \nu} + \frac{1}{\nu} \langle (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} \rangle \quad (2.6)$$

と書きかえるわけは異なる。ここで, $\langle \rangle$ は統計的平均とあらわす。それ故, レイノルズ応力によるフィードバックは \tilde{u} の中における成分 \tilde{u}_x から, \tilde{u} の中では全流量の変化に対応する \tilde{u}_y と変化成分 \tilde{u}_z をふくんでいく。

^{の位置}
壁 $y=0$, a と考え, 境界条件

$$\bar{u} = 0, \quad y = 0, a$$

のもとに, (2.5) を解くと

$$\frac{\bar{u}}{U} = 4 \frac{y}{a} \left(1 - \frac{y}{a}\right), \quad U = \frac{\alpha a^2}{8 \rho \nu} \quad (2.7)$$

とす。ここで U は層流平均速度 \bar{u} の最大速度である。(2.3) を (2.2) に代入し, 更に

$$U t / a \rightarrow t, \quad x / a \rightarrow x, \quad v, \bar{u}, \tilde{u} / U \rightarrow v, \bar{u}, \tilde{u},$$

cf

$$\tilde{p}/\rho\sigma^2 \rightarrow \tilde{p}$$

の無次元化を行うと, 運動成分に対する方程式は:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} \\ = -\text{grad } \tilde{p} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{u}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.7) は無次元化すると

$$\tilde{u} = 4y(1-y) \quad (2.9)$$

となる。レイノルズ数は

$$R = \frac{Ua}{\nu} \quad (2.10)$$

で定義される。

更に, 数学的簡単工のために, 上の仮定を ^{おと} ~~おと~~する。

i) 擾乱は 2 次元である。

ii) x 方向の周期的境界条件を ~~おと~~ ^{もつ}。

i) の仮定は, 解析を始める次の段階ではのぞかぬである。 ii) のついでには, このときは周期 2π とするが, 2π の値を大きくすると, 近似をよくする ことが出来る。

さて, 流場の場を完備な正規直交関数系で展開することを考えよう。上の仮定を考慮して, 正規直交関数系に次の条件を課する:

$$(W_{em}, W_{np}) \equiv \int_0^1 \int_{-1}^1 W_{em}(x)^* W_{np}(x) dx dy = \delta_{en} \delta_{mp} \quad (2.11)$$

$$\text{div } W_{em} = 0 \quad (2.12)$$

$$W_{em} = 0 \quad \text{固定壁における} \quad (2.13)$$

$$V_{lm}: \text{周期境界条件を満足する} \quad (2.14)$$

ここで ψ は任意被演算子, l, m は可能なすべての値をわたるものとする。そこで

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{l, m} a_{lm}(t) V_{lm}(x) \quad (2.15)$$

のように展開可能と仮定する。

(2.11) ~ (2.14) を満足する直交関数系をつくらねば、

$$u_{lm}(x) = \frac{\partial \psi_{lm}}{\partial y}, \quad v_{lm}(x) = -\frac{\partial \psi_{lm}}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\psi_{lm}(x) = \varphi_l(x) f_{lm}(y) \quad (2.17)$$

$$\varphi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi l x} \quad (2.18)$$

とおけば, (2.12), (2.14) の条件は満足される。ここで

$\varphi_l(x)$ は ^{正規}直交条件:

$$(\varphi_l, \varphi_m) \equiv \int_{-1}^1 \varphi_l(x)^* \varphi_m(x) dx = \delta_{lm} \quad (2.19)$$

を満足している。(2.16) ~ (2.18) から

$$u_{lm} = \varphi_l(x) f'_{lm}(y), \quad v_{lm} = -\pi i l \varphi_l(x) f_{lm}(y) \quad (2.20)$$

をうる。そこで, (2.13) の ^{境界}条件は

$$f_{lm}(y) = f'_{lm}(y) = 0 \quad y=0, 1 \quad (l \neq 0) \quad (2.21)$$

となる。 $l=0$ の場合は、(2.13) 以外の条件から、境界条件を定めなければならない。(2.16), (2.18) から

$$u_{0m} = \frac{1}{\sqrt{2}} f'_{0m}(y), \quad v_{0m} = 0 \quad (2.22)$$

となり、この場合は平行流となる。

さて、(2.8)式の x -成分は、境界条件 $\bar{u} = \tilde{u} = 0$ ($y=0, 1$) のため、 $y=0, 1$ において

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = R \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (2.23)$$

となる。また、 \tilde{p} は周期条件を満足するため

$$\tilde{p}(-1, y) = \tilde{p}(1, y) \quad y=0, 1 \quad (2.24)$$

である。(2.23)を x について -1 から $+1$ まで積分して

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} dx = R [\tilde{p}(+1, y) - \tilde{p}(-1, y)] = 0 \quad y=0, 1 \quad (2.25)$$

となる。各 \tilde{u}_{lm} について考えれば

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \tilde{u}_{lm}}{\partial y^2} dx = \begin{cases} \sqrt{2} f_{lm}''' & l=0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases} \quad y=0, 1 \quad (2.26)$$

となる。ここで、 $l \neq 0$ の場合は \tilde{u}_{lm} の大きさが (2.25)

を満足している。これは、 $l=0$ の場合は $l=0$ の条件を満足するとはたして f_{0m} の境界条件として

$$f'_{lm} = f'''_{lm} = 0, \quad y=0, 1, \quad l=0 \quad (2.27)$$

となる。

f_{lm} の正規直交条件 (2.19) を考慮すると、 v_{lm}, w_{lm} は $l \neq n$ ならば、直交している。ここで正規直交条件 (2.11)

は

$$(w_{lm}, w_{ln}) = (f'_{lm}, f'_{ln}) + \pi^2 l^2 (f_{lm}, f_{ln}) = \delta_{mn} \quad (2.28)$$

と存す。

そこで、正規直交関数系をつくるためには、(2.28)
 $(l=0)$ については (2.21) $(l \neq 0)$ の境界条件と正規直交条件
 (2.28) を満足する f_m を決定すればよい。 したが

$$\hat{f}_m(y) = \begin{cases} -\cos m\pi y & l=0 \\ \cos m\pi y - \cos(m+2)\pi y & l \neq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

とおけば (2.28) については (2.21) の条件をおのおの満足して
 いる。 ところで、これらの一次結合によって (2.28) を満足す
 るような直交関数系をつくることかできる。

さて、 $l=0$ の場合は、(2.29) の \hat{f}_m は互に直交している
 から、正規化を行えばよい。 $l \neq 0$ の場合は、 m
 の偶数と、奇数の \hat{f}_m は互に直交しているから、 $\{V_{l,2m}\}$ 、
 $\{V_{l,2m+1}\}$ の各々で正規直交化を行えばよい。 Schmidt
 の方法によって正規直交化を行えば、結局

$$\begin{aligned} V_{l,2m} &= C_{lm}^m \hat{V}_{l,2m} + \sum_{n=0}^{m-1} C_{lm}^n V_{l,2n} = \sum_{n=0}^m \hat{C}_{lm}^n \hat{V}_{l,2n} \\ V_{l,2m+1} &= D_{lm}^m \hat{V}_{l,2m+1} + \sum_{n=0}^{m-1} D_{lm}^n V_{l,2n+1} = \sum_{n=0}^m D_{lm}^n \hat{V}_{l,2n+1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\hat{V}_{lm} = \varphi_l(x) (\hat{f}_m'(y), -\pi i \hat{f}_m(y))$$

$$\begin{aligned} C_{lm}^m &= \{V_{lmm} - (V_{lmm-1} C_{l,m-1}^{m-1})^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ C_{lm}^{m-1} &= -V_{lmm-1} C_{l,m-1}^{m-1} C_{lm}^m \\ C_{lm}^n &= 0 \quad n=0, \dots, m-2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

と

$$\begin{aligned}
 D_{lm}^m &= \{V_{lmm} - (V_{lmm-1} D_{lm-1}^{m-1})^2\}^{-\frac{1}{2}} \\
 D_{lm}^{m-1} &= -V_{lmm-1} D_{lm}^m \\
 D_{lm}^n &= 0 \quad n=0, \dots, m-2 \\
 \hat{C}_{lm}^m &= C_{lm}^m; \quad \hat{C}_{lm}^n = C_{lm}^{m-1} C_{lm-1}^n \quad n=0, \dots, m-1 \\
 \hat{D}_{lm}^m &= \mathbb{1} D_{lm}^m; \quad \hat{D}_{lm}^n = D_{lm}^{m-1} D_{lm-1}^n \quad n=0, \dots, m-1 \\
 V_{lmmn} &= (\hat{V}_{l2m}, \hat{V}_{l2n}), \quad V_{lmmn} = (\hat{V}_{l2m+1}, \hat{V}_{l2n+1})
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (2.33) \end{array}$$

と等し。

上のようにつくられた正規直交関数系が L_2 の意味で完備であることは証明することは容易である。適度は流束の関数 Ψ_{lm} ~~は~~ から、(2.16) のようにつくられ、 Ψ_{lm} は $e^{il\pi x} \cos m\pi y$ ($l=0, \pm 1, \dots$; $m=0, 1, 2, \dots$) の可なり組合せによってつくられる。一方 $\{e^{i\pi x}\}$ および $\{\cos m\pi y\}$ は x の領域 $[-1, 1]$ および y の領域 $[0, 1]$ において、それぞれ完備であり、それらの積によってつくられる関数系は (x, y) の領域 $[-1, 1] \times [0, 1]$ において完備であるからである。

上の \hat{u} の展開 (2.15) を (2.8) に代入し、それと V_{lm} との内積をとると、偏微分方程式の無限連立の常微分方程式の変換がとてかたまり：

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{lm} &= -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} A_{lm}^n a_{ln} + \sum_{n=0}^{\infty} B_{lm}^n a_{ln} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} A_{lm}^{npr} \\
 &\quad \times a_{np} a_{l-n-r} \quad l=0, \pm 1, \dots, \quad m=0, 1, \dots \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{lm}^n &= -(V_{lm}, \nabla \Delta V_{lm}) \\ S_{lm}^n &= -(V_{lm}, (\bar{u} \cdot \text{grad}) V_{lm}) - (V_{lm}, (V_{lm} \cdot \text{grad}) \bar{u}) \\ A_{lm}^{np2} &= (V_{lm}, (V_{l-n_2} \cdot \text{grad}) V_{np}) \end{aligned} \right\} (2.35)$$

この基礎方程式は乱流の状態を $\{a_{lm}\}$ によつて ~~この~~空間、
 ちよわすヒルベルト空間 $l_2 = \{ \{a_{lm}\} \mid \sum |a_{lm}|^2 < \infty \}$
 の上での運動として記述されるものである。

§3. むすこ

前節で、乱流の状態をヒルベルト空間 l_2 の中の運動として記述した。もし、このヒルベルト空間に確率命題関数を導入すれば、確率過程論として定式化できる。

こゝでは、無限次元の空間を有限次元 ($|l| < L, 0 \leq m < M$)
 で近似してやることにする。ちよわす

$$\sum_{l=-L}^L \sum_{m=0}^M |a_{lm}|^2 \gg \left(\sum_{l=-L-1}^{-L-1} + \sum_{l=L+1}^{\infty} \right) \sum_{m=0}^M |a_{lm}|^2 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=M+1}^{\infty} |a_{lm}|^2 \quad (2.3.1)$$

がなり立つと考へる。こゝで、 $(2L+1) \times (M+1)$ 次元のベクトルの常微分方程式の初期問題を考へる。

微分方程式の係数の0になるものがあるもので、 a_{lm} の m の奇偶によつて分けてあつた方がずつと便利である。こゝで

$$\left. \begin{aligned} A_{lm} &= a_{l2m} \quad m=0, \dots, MA \\ B_{lm} &= a_{l2m+1} \quad m=0, \dots, MB (=MA \text{ or } MA-1) \\ l &= -L, \dots, L \end{aligned} \right\} (3.2)$$

とすれば、基礎方程式 (2.34) は

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{lm} &= \sum_{p=0}^{MA} \left(-\frac{1}{R} CAA_{lm}^p + i CSA_{lm}^p \right) A_{lp} \\ &\quad - i \sum_{n=l-L}^L \left(\sum_{p=0}^{MA} \sum_{q=0}^{MB} CAA_{lm}^{npq} A_{np} B_{l-nq} \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{p=0}^{MB} \sum_{q=0}^{MA} CABA_{lm}^{npq} B_{np} A_{l-nq} \right) \\ \dot{B}_{lm} &= \sum_{p=0}^{MB} \left(-\frac{1}{R} CBB_{lm}^p + i CSB_{lm}^p \right) B_{lp} \\ &\quad - i \sum_{n=l-L}^L \left(\sum_{p=0}^{MA} \sum_{q=0}^{MA} CBA_{lm}^{npq} A_{np} A_{l-nq} \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{p=0}^{MB} \sum_{q=0}^{MB} CBB_{lm}^{npq} B_{np} B_{l-nq} \right) \end{aligned} \right\} (3.3)$$

$$CAA_{lm}^n = A_{l2m}^{2n} ; CBB_{lm}^n = A_{l2m+1}^{2n+1}$$

$$CSA_{lm}^n = \frac{1}{i} S_{l2m}^{2n} ; CSB_{lm}^n = \frac{1}{i} S_{l2m+1}^{2n+1}$$

$$CAA_{lm}^{B npq} = \frac{1}{i} A_{l2m}^{n2p+2q+1}$$

$$CABA_{lm}^{npq} = \frac{1}{i} A_{l2m}^{n2p+12q}$$

$$CBA_{lm}^{npq} = \frac{1}{i} A_{l2m+1}^{n2p2q}$$

$$CBB_{lm}^{npq} = \frac{1}{i} A_{l2m+1}^{n2p+12q+1}$$

(3.3)

とす。 S は $2p$ を, A_{lm} , B_{lm} は複素数であり, CAA

等は実係数である。

実際, $R = 20,000$ について i) $l = 0, \pm 1, \pm 2$;
 $m = 0, 1$ (9モード), ii) $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$,
 $m = 0, 1, 2$ (20モード), iii) $l = 0, \pm 1, \dots, \pm 4$,
 $m = 0, \dots, 3$ (35モード) のモードについて、初期値
 問題 (初期値として a_{10} と a_{11} のみを決める値とす、他
 は0とする) を解いた。その結果, §1のモードの増
 減, ちまた, 多くのモードが除々に励起され, ^{統計的} 平衡状
 態に向う傾向をまじった。くわしい計算結果は他の機会に行
 う。

参考文献:

- D.C.
- 1) Leslie: *Developments in the theory of turbulence*, Clarendon Press, Oxford 1984.
 - 2) 宇原真二: 非等方, 非一様乱流はいかに^に ~~か~~ ^かい;
 3次元平面ポアズイユ流の数値実験の関連して
 第6回乱流シンポジウム, 学大宇宙研 (1974) 151
 - 3) 宇原真二: 非一様, 非等方乱流の非線形力学, 学大
 工学部紀要 A (1974) 42
 - 4) 宇原真二: 一般化 Burgers 方程式と平面 Poiseuille 流の
 数値実験, 数理解析講究録 218 (1974) 128.