数理解析研究所講究録
245巻 1975年 149-166

V. I. Arnold の仕事の周辺からの二・三の話題

京大 理 丹羽敏雄
理大 工 大槻飾一

我々がこれから問題にしようとするものは大別すれば2つにわけられる。一つは積分可能な系を摂動して得られる系の解の time global な性質、特に不変概周期運動の存在と、その近傍における解の $-\infty < t < \infty$ における振舞いを調べることである。もう一つは微分方程式の局所的な性質、特に singular point のまわりの解の性質を調べることである。この事は normal form の問題と密接に関連するが、resonance がある場合、困難な問題であって、それは自然に singular point をもつ微分方程式の deformation とその bifurcation の問題につながる。

(I) Time global problem.

微分方程式を調べるのによく使われる武器は"変換"と"摂動"である。

system (M, X) を考える。M は phase space であり X は系の運動を定める M 上の微分方程式ないしは vector field である。X から定まる解を表わす 1 parameter group を $\{\varphi_t\}$ で表わす: $\varphi_t = \mathrm{Exp}\, tX$。

さて system (M, X) に特別なしくみ、例えば それが線型性をもつとか、お互いに独立な subsystems の和にわかれるとか、対称性があるとか といった場合には、system (M, X) の性質がよくわかる事がある。変換理論はいわば、かくされたそういう「しくみ」を見い出す方法であるといえよう。(石井氏の講演を参照せよ) それに対して摂動の方法は、調べたい system (M, X) がそういう特別な system $(M^{(0)}, X^{(0)})$ に近い場合に $(M^{(0)}, X^{(0)})$ の性質から (M, X) のどんな性質がえられるかを見る。

例として、2次元トーラス T^2 の cotangent bundle $M = T^*(T^2) \cong T^2 \times \mathbb{R}^2$ を phase space としてもつ Hamiltonian system を考える。Hamiltonian として次の形のものをもつものとする。

$$H(q_1, q_2 ; p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \varepsilon\left(\cos q_1 - 1 + \frac{\mu}{2} p_1^2 \cos q_2\right)$$

$$\equiv H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) \qquad (H_\varepsilon)$$

$\varepsilon = 0$ の場合は 系は直ちに積分可能であって $p = (p_1\, p_2) = (\omega_1, \omega_2) = \omega$ = 一定 は不変な submanif. を定め その上の運動は ω を振動数とする概周期運動である。 ω_1/ω_2 = 有理数の場合は 周期的であって submanif. はさらに小さな submanif. に分割される。これらのことは図式的にいえば次のようにいいうる。

(i) ω_1/ω_2 = 無理数 の場合

(T^2, τ_t^{ω}) を T^2 上の ω を振動数とする概周期運動とする： $\tau_t^{\omega} q = q + t\omega \pmod 1$

$$\exists \iota^{\omega} : T^2 \longrightarrow M \quad : \text{injection}$$

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_t^{\omega}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "\varphi_t^{(0)}"] \\ T^2 \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

ι^{ω}

(ii) ω_1/ω_2 = 有理数 の場合

$(T^1, \tau_t^{\theta(\omega_1, \omega_2)})$ を T^1 上の rotation

$$\tau_t^{\theta} x = x + t\theta \pmod 1$$

$$\exists \iota^{\theta} : T^1 \longrightarrow M \quad : \text{injection.}$$

$$\begin{tikzcd} T^1 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_t^{\theta}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "\varphi_t^{(0)}"] \\ T^1 \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

ι^{θ} :

問題は $\varepsilon \ll 1$ $(\varepsilon \neq 0)$ とした場合どうなるかということである。

結果は (1) の場合 大部分の ω に対して 概周期運動 (T^2, τ_t^ω) は保存される。その理由の一つは次のようなものである。

摂動系 (H_ε) の $M = T^*(T^2)$ 上の vector field を $X^{(\varepsilon)}$ で表わすとき、(H_0) の不変多様体 $\tau^\omega(T^2)$ 上の $X^{(\varepsilon)}$ の normal component to $\tau^\omega(T^2)$ の平均がきえる：

$$\int_{\tau^\omega(T^2)} X^{(\varepsilon)} \text{ の normal component to } \tau^\omega(T^2)$$

$$= 0$$

$$\left(\because \oint_{\tau^\omega(T^2)} H_1 \, dq = 0 \right)$$

この結果はただちに (T^2, τ_t^ω) の保存を意味しないが根拠の一つにはなりえる。それに対して (2) の場合（我々は以下 resonance がある場合という）は事情はだいぶ異なる。まずもって上の平均がきえないのである。この事情を上の例でみてみよう。

例えば $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ として $\omega_1=0$, $\omega_2\neq0$ の場合を考えてみよう。この場合 inv. manif (T^1, τ_t^θ) は

$$T^1=\{(q_1,q_2,p_1,p_2)\,;\quad \overset{q_1=q_1^{(0)}}{p_1=0},\quad p_2=\omega_2\}$$

$$\tau_t^\theta=\tau_t^\omega:\quad q_2\longrightarrow q_2+\omega_2 t\quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

で与えられる。(H_ε) の $\tau^\theta(T^1)$ の近傍において第1次近似としては

$$\overline{H}=\frac{1}{2\pi}\oint H(q,p)\,dq_2$$

$$=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\varepsilon(\cos q_1-1)$$

を Hamiltonian としてもつ system を考えるのが妥当である(averaging method) 特に$\frac{}{}$の場合は $\mu=0$ の場合に当る.

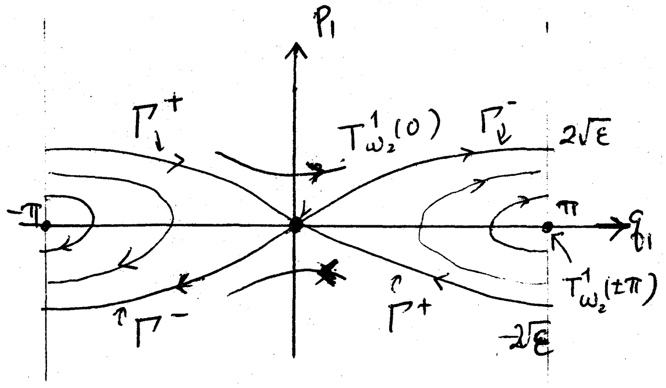
$$\dot{p}_1=-\frac{\partial\overline{H}}{\partial q_1}=\varepsilon\sin q_1$$

$$\dot{q}_1=\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_1}=p_1 \qquad\qquad (\overline{H}_\varepsilon)$$

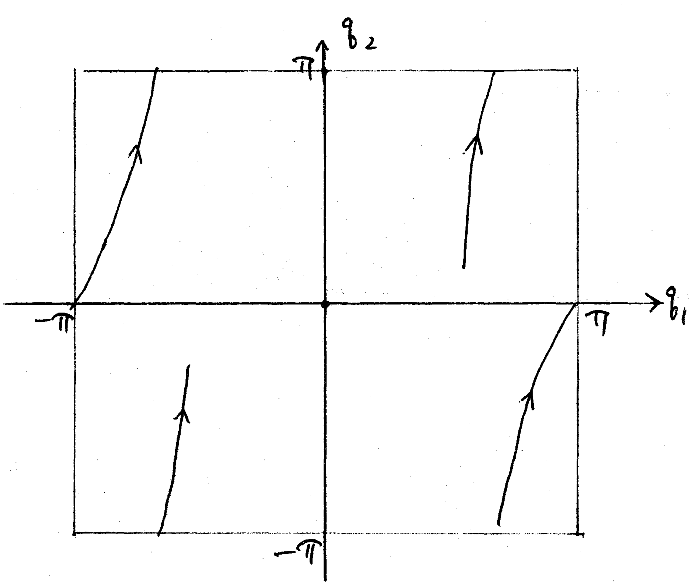
$$\dot{p}_2=-\frac{\partial\overline{H}}{\partial q_2}=0$$

$$\dot{q}_2=\frac{\partial\overline{H}}{\partial p_2}=p_2.$$

この system は積分可能であって次の図で示される。



これは (H_0) の resonance-torus $(T^2, \tau_t^{(0,\omega_2)})$ が $|p_1| \sim \sqrt{E}$ の幅にふくらんだことを意味する。



しかも invariant tori $(T^1, \tau_t^{\omega_2})$ 達は

$T^1_{\omega_2}(0) = \{(q, p);$
$p_1 = 0,\ p_2 = \omega_2,\ q_1 = 0\}$

と

$T^1_{\omega_2}(\pm\pi) = \{(q, p);$
$p_1 = 0,\ p_2 = \omega,\ q_1 = \pm\pi\}$

を除いてこわれている。後者は "elliptic" invariant torus であり その周りは invariant quasi-periodic motions でかこまれている。前者のなれは特におもしろく "hyperbolic" invariant torus である。そこには安定な separatrix Γ^+ と不安定な separatrix Γ^- (この場合 Γ^+ と Γ^- は重なっている) が出ている。

system (H_ε) に戻ろう。

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \varepsilon \sin q_1$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = (1+\varepsilon\mu\cos q_2)\, p_1 \qquad (H_\varepsilon)$$

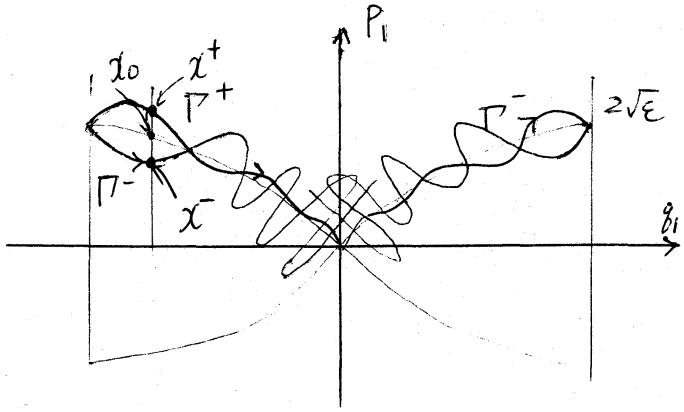
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\varepsilon\mu}{2}\, p_1^2 \sin q_2$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2$$

一般に摂動した場合 "elliptic" invariant torus はつぶれるが "hyperbolic" invariant torus は保存される。我々の場合は $T^1_{\omega_2}(0)$, $T^1_{\omega_2}(\pm\pi)$ は共に不変のまま保存されている。それでは separatrices $\Gamma^\pm$ はどうなるであろうか。結果はそれぞれ少し変形された形で残り、摂動前に重なっていた Γ^+ と Γ^- が分離される。しかもそれらは交わる。これは hyperbolic invariant torus $T^1_{\omega_2}(0)$ のまわりの様子を非常に複雑にし、(H_ε) の積分不可能性の原因となる。この現象は最初 Poincaré によって発見された。以下にこの現象を調べる。

まず Γ^+ がどのように変化するかをみよう。その為には $q_2=0$, $H=h=$一定 で定まる cross section を考えるのが有効である。この上での Γ^+ の動きを追ってみる。

それをみるには Γ^+ 上の軌道にそっての H_0 の変化を追うのが便利である。



cross-section $q_2=0$, $H=h=$一定

$$\frac{dH_0}{dt}$$

$$= \{H, H_0\}$$

$$= -\varepsilon^2 \mu \sin q_1 \cdot \cos q_2 \cdot P_1$$

$H_0(x^+) - H_0(\infty)$ $\qquad x^+ \in \Gamma^+$

$= H_0(x^+)$ $\qquad \because H_0(\infty) = 0$

$$= \int_\infty^0 \{H, H_0\}\, dt$$

$$= \int_\infty^0 \{H, H_0\}\, dt + O(\mu)$$

第1の積分は真の解にそっての積分であり、第2の積分は $(\overline{H}_\varepsilon)$ の解にそっての積分である。

同様に $x^- \in \Gamma^-$ に対して、

$$H_0(x^-) = \int_{-\infty}^0 \{H, H_0\}\, dt + O(\mu)$$

$$\therefore \quad H_0(x^-) - H_0(x^+) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_\varepsilon\} \, dt + o(\mu)$$

ここで積分は (H_ε) の解にそっている。ところでその解は次のように表わされる。

$$p_1(t) = 2\sqrt{\varepsilon} / \mathrm{ch}\, \sqrt{\varepsilon}(t - t_0)$$

$$q_1(t) = 2 \cot^{-1}(-\mathrm{sh}\, \sqrt{\varepsilon}(t - t_0))$$

$$q_2(t) = \cos \omega_2 t \equiv \cos \omega t$$

これらは $t = t_0$ のとき $p_1 = 2\sqrt{\varepsilon}$, $q_1 = -\pi$ とする解である

従って

$$H_0(x^-) - H_0(x^+)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} - \varepsilon^2 \mu \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\mathrm{ch}\sqrt{\varepsilon}(t - t_0)} \sin\left(2 \cot^{-1}(-\mathrm{sh}\sqrt{\varepsilon}(t - t_0))\right) \cos(\omega t) \, dt$$

$$= -4\sqrt{\varepsilon}\, \varepsilon^2 \mu \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\sqrt{\varepsilon}t}{\mathrm{ch}\sqrt{\varepsilon}t} \sin \omega t \, dt \right) \sin \omega t_0$$

$$= \left(-\varepsilon\mu \frac{\pi \omega^2}{2\, \mathrm{sh} \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \sin \omega t_0 + o(\mu)$$

あるいは q_2 に関する対称性から $t_0 = 0$ のとき、即ち $q_1 = -\pi$ において $H_0(x^+) = H_0(x^-)$ である。

自由度が3以上の場合は、さらに複雑な現象がおこる。このことが instability zone の topological instability を引きおこすことが V. I. Arnold によって示された。

(II) Local Problem.

原点の近傍において微分方程式を考える。

$$\dot{x} = v(x) \qquad x \in U \subset \mathbb{R}^n \qquad (1)$$
$$(U : \text{open nbd of } 0)$$

a) (1) が原点において non-singular な場合 すなわち $v(0) \neq 0$ の場合、次のことはよく知られている。

$$\exists\, z : \mathbb{R}^n \supset V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n \ : \text{diffeo}$$
$$0 \longmapsto z(0) = 0$$

s.t. $\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の解は (1) の解に移る。

(1) が parameter に $\underset{\text{smooth に}}{\text{依存}}$ する場合 微分同型 z も parameter に smooth に依存する。

このように、non-singular な点の近傍においては局所的にはほとんど完全にわかったといいうる。それでは singular な点の近傍においてはどうであろうか?

$v(0)=0$ とし、

$A=\frac{\partial v}{\partial x}(0)$ とする

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ として

$$n^+ = \#\{k ; \mathcal{R}_e \lambda_k > 0\}$$
$$n^- = \#\{k ; \mathcal{R}_e \lambda_k < 0\}$$
$$n^0 = \#\{k ; \mathcal{R}_e \lambda_k = 0\}$$

とおき、$n^0=0$ の場合、点 0 は (1) は non-degenerate singular point をもつという。

b) (1) の原点が non-degenerate sing. pt である場合

もはや a) のようにある微分同型でもって (1) をかんたんな形に変換するわけにはいかない。

しかしながら topological equivalence の class においては、すなわち ある 位相同型によって (1) をかんたんな形にもっていくことができる。

$$\exists h : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^+} \times \mathbb{R}^{n^-} \supset V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n : \text{homeo.}$$
$$(y^+, y^-) \longmapsto x$$

s. t.

$$\begin{cases} \dot{y}^+ = y^+ \\ \dot{y}^- = y^- \end{cases}$$ の解は (1) の解にうつる。

parameter に依存する場合も (a) と同様である

それでは degenerate な場合はどうであろうか？
この問題を考えるに、いわゆる "generic" な観点からながめてみると、もし単独の微分方程式をあつかう場合は、たいした重要性をもたないことがわかる。すなわち もし(1)が ~~non~~ degenerate sing pt をもっとしても、少し(1)を摂動させるだけで non-degenerate sing pt をもつものにかわるからであり、一般に non-degen. sing pt をもつ系が generic であるからである。しかしながら system が近似的にしか知りえないとか、あるいは、parameter に depend した system の族を考えなければならないといった場合には "generic" な観点からしても degenerate sing pt をさけて通ることはできない。この辺の事情をうまく定式化する為には、singularity の codimension なる概念が必要になるのでそれを少し説明する：

J^k を $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍における vector field の k-jets の作る k-jet space とする。座標系を固定すれば、k 階までの Taylor 級数の係数と考えてよい。例えば $k=1, 2$ に対しては、

$$J^1 \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \ni \left(x,\ v_0(x),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x)\right)$$

$$J^2 \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n \times \frac{n(n+1)}{2}} \ni \left(x,\ v_0(x),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x),\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)\right)$$

$$S = \left\{ \left(x,\ v_0(x),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x),\ \cdots\right) \in J^k ;\ v_0(x) = 0 \right\}$$

このとき kに無関係に

$$\operatorname{codim} S = n$$

である。従って b) の場合の singularity は codim n であるという。単独の方程式 (1) は J^kの中で

$$v : x \longrightarrow \left(x,\ v_0(x),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x),\ \cdots\right) \in J^k$$

によって dim n の submanif. を定める。従ってそれは一般に Sと transversal に交わるから (1)に (non-degenerate な) singular pt が表われるのはさけがたいが degenerate な sing. pt は codim は $n+1$ 以上であるから一般には交わらない、すなわち、単独の方程式に対しては generic な観点から見て deg. sing. pt を考える必要はない。しかしながら方程式が parameter に依存する場合は一般に deg. sing. pt が現われるのはさけがたい。一般に k-parameters に depend する方程式の族を考察する場合は $k+n$ 以下の codim をもつ singularity をさけることはできないのである。(以下、通常行なわれるように $k+n$ の codim. を codim. k という)

さて (1) が codim k の singular pt をもつとして その deformation を考える。その場合ある意味で一番大きい deformation (そういうものがあるとして) を考えるのが重要である。(かかる deformation を versal deformation という。) 例えば topological orbital equivalence のカテゴリーでの定義を与える。

<u>定義</u> 1. $(1)_\varepsilon \quad \dot{x} = v(x, \varepsilon)$ と
$(2)_\varepsilon \quad \dot{y} = w(y, \varepsilon)$ が
<u>top. orb. equivalent</u> であるとは ε に連続的に依存する x から y への同相写像 $h(\cdot, \varepsilon)$ の族があって $(1)_\varepsilon$ の (oriented) phase curves を $(2)_\varepsilon$ のそれらに移すものがあるときをいう。

2. $(3)_\mu \quad \dot{x} = u(x, \mu)$
が $(1)_\varepsilon$ から <u>induce</u> されたとは 連続写像 $\varepsilon = \varphi(\mu)$ があって
$$u(x, \mu) = v(x, \varphi(\mu))$$
となるときをいう。

3. deformation $(1)_\varepsilon$ (= family $(1)_\varepsilon$ の germ) が $\dot{x} = v(x, 0)$ の (topological) versal deformation であるとは 任意の他の $\dot{x} = v(x, 0)$ の deformation が (1) から induce された deformation

に equivalent なるときをいう．

例えば (b) の結果は codim 0 の singular pt の versal deformation は存在してしかもそこで述べられた形の trivial な deformation がそうであることを示すものである。

それでは codim 1 の singularity をもつ場合はどうであろうか？ この場合は次の二つの場合があることがわかる．

(i) $n_0 = 1$ であって $\lambda_1 = 0$

(ii) $n_0 = 2$ であって λ_1, λ_2 が pure imaginary かつ $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$．

これらの場合はいずれも versal deformation をもち、それらは次のようである．

(i)
$$\begin{cases} \dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon & x \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \dot{x}^+ = x^+ & x^+ \in \mathbb{R}^{n+} \\ \dot{x}^- = -x^- & x^- \in \mathbb{R}^{n-} \end{cases}$$

(vi) $\begin{cases} \dot{z} = z(i + \varepsilon \pm z\bar{z}) & z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \dot{x}^+ = x^+ & x^+ \in \mathbb{R}^{n+} \\ \dot{x}^- = -x^- & x^- \in \mathbb{R}^{n-} \end{cases}$

方法は次の Reduction Theorem と normal form への変換の理論を使う.

<u>Reduction Th.</u>

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^l$$

$v(0, 0) = 0$, かつ $n^0 = k$ とすると

これらの族は次の族に equivalent である.

$$\begin{cases} \dot{p} = w(p, \varepsilon) & p \in \mathbb{R}^k, \ \varepsilon \in \mathbb{R}^l \\ \dot{q} = -q & q \in \mathbb{R}^{n-} \\ \dot{r} = r & r \in \mathbb{R}^{n+} \end{cases}$$

codim 2 以上の場合は余りわかっていない。

References

[1] V. I. Arnold : Small denominators I, on the mapping of a circle into itself, Izv. Akad. Nauk. serie Math, 25. 1 (1961) p.21~86 ≅ Transl. Amer. Math. Soc. serie 2. V. 46 (1965) p. 213-284

[2] ———— : Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian, Usphi. Math. Nauk. V18 N5 (1963) p.13~40 ≅ Russian Math. Surveys V18 N5 (1963) p. 9-36

[3] ———— : Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Usphi Math. Nauk. V18 N6 (1963) p. 91~196 ≅ Russian Math. Surveys V18 N6 (1963) p. 85~193

[4] ———— : Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, D.A.N. 156 N1

(1964) p 9~12 ≅ Sov. Math. Dok. V5 N3 (1964) p581~585

[5] ——— ; A. Avez : Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier Villars.

[6] C.L. Siegel - J.K. Moser : Lectures on celestial mechanics, Springer

[7] V. I. Arnold : On matrices depending on parameters, Uspehi Math. Nauk 26. 2 (1971) p101~184 ≅ Russian Math. Surveys 26. 2 (1971) p29~43

[8] ——— : Lectures on Bifurcations in Versal Families, Uspehi Math. Nauk 27.5 (1972) ≅ Russian Math. Surveys 27.5 p 54~123.

(注) [5], [8] にくわしい文献表がある。