

「ホモロジー理論と力学系」の補足として、

Shub の例

都立大 理 岡部恒治

Shub は、彼の論文[1]の中で、

$$\text{topological entropy of } \geq \max \log |\lambda|$$

(但し  $\lambda$  は  $f_*: H_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$  の固有値)

なる式が成立する為の条件を、論じている。その中の2, 3の補足的(蛇足的?)事柄を紹介する。

**I** 上の式が成立する為には, *compact manifold* 上の *homeo* であることが本質的である。

何故なら、次の Shub の反例が存在するからである。

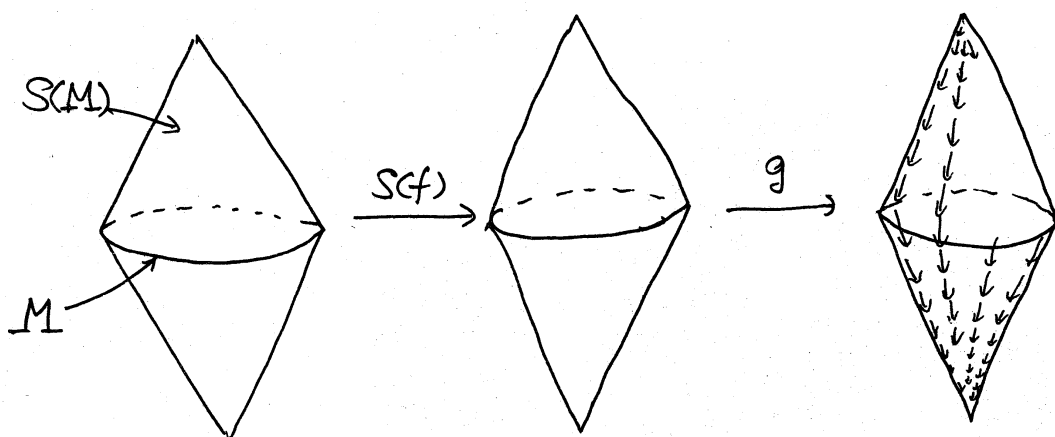
今、 $f: M \rightarrow M$  を 適当な *compact mfd* から、それ自身への、*homeo* であって、最大固有値  $|\lambda| > 1$  を取っておく。  $M$  の suspension  $S(M)$  を考え、

$S(f): S(M) \rightarrow S(M)$  を suspension map とする。

さらに、 $g: S(M) \rightarrow S(M)$  を北極から南極へ向く *vector field* によって引き起される *infinitesimal trans-*

formation ではないものを適当に1つ取っておく。(そうすると,  $g$  の fix point は, 南極と北極の2点).  $g \circ S(f)$  を考えると,  $g \circ S(f)$  の fix point も2点のみであり, (periodic pt も)  

$$\text{entropy}(g \circ S(f)) = 0$$



一方  $(g \circ S(f))_*$  の最大固有値は  $|\lambda| > 1$  である。

II 次に isotopy class の中に, “=” を満すような (entropy が最小となる) diffeo が存在するか? という問題は 一般的に <sup>は</sup> No である 一般

上の問題は, 「ホモロジーとカテゴリーの講演の中でみたように, Morse Smale diffeo  $f$  については,

$$\text{entropy}(f) = 0 = \log|\lambda|$$
 であるから, 成り立っている。凡人の直感では, Algebraic intersection number と geometric intersection number を一致させる と, 良いだろう。だから,  $\pi_1(M) = 0$ ,  $\dim M \geq 6$

でどうだろうか? と思ったが, algebraic intersection number の負の成分は消しようがないのである。Shub は, それについての反例を,

$$(S^3 \times S^3) \# (S^3 \times S^3) \# (S^3 \times S^3) \# (S^3 \times S^3)$$

なる 6 次元 mfd. (もちろん  $\pi_1(\quad) = 0$ ) で与えている。

[1] Shub: "Dynamical systems, filtrations and entropy"  
Bulletin of AMS Vol. 80 number 1 1974