数理解析研究所講究録
245巻 1975年 133-142

ホモロジー理論と力学系

横浜市立大 文理 一楽重雄

1. まえがき

力学系の理論では他のトポロジーの分野と違って，ホモロジー，ホモトピーのような代数的トポロジーが今までの所あまり使われていない。それは，対象自身の持つ難しさと問題意識の違いの両方から来るものと思われる。最近，Shub－Sullivan によって表題の論文が書かれたのでそれを紹介する。([1], [2]) この論文では，handlebody 理論を媒介に，ホモロジー論と力学系を結びつけた。ここでは，代数的トポロジーを用いるために，力学系 ($f: M \longrightarrow M$ diffeo.) それ自身の性質というより，非常にトポロジー的概念である所の (f の属する) isotopy class の性質を調べるという立場を取った。この点が，力学系本来の興味から言えば不満の残る所であろう。

2. 基礎概念

1.) isotopy

$f, g : M \longrightarrow M$ を多様体上の２つの diffeo. とする。

Def. f と g が isotopic

$\Longleftrightarrow$ $^{\exists} f_t : M \longrightarrow M$ diffeo. $0 \leq t \leq 1$

s.t. $f_0 = f$, $f_1 = g$ （但し，正確には，$F(x, t) = f_t(x)$ として，$F : M \times I \longrightarrow M$ が differentiable）

容易に分るように，isotopy は同値関係であるからその類を isotopy class と呼ぶ。トポロジーの問題では多くの場合に isotopic な diffeo. は同じものと考えて良いが，力学系の理論ではそうとは言えない。（orbit の様子がすっかり変ってしまう。）

2.) transeversality

$M^m, N^n \subset W^q$ を２つの部分多様体とする。

Def. M^m と N^n は（W^q の中で）transeverse に交わる。

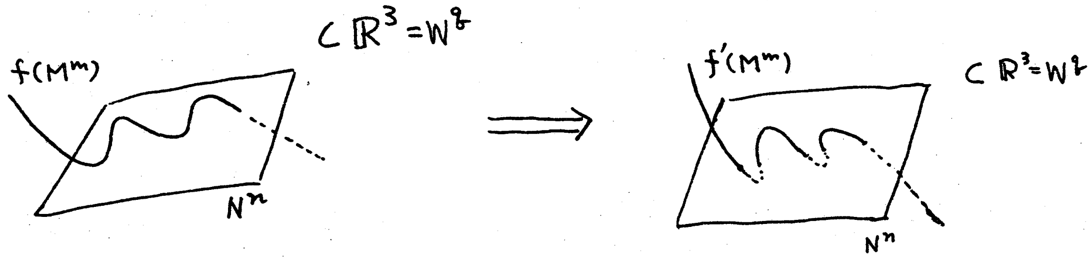
$\Longleftrightarrow$ $^{\forall} x \in M \cap N$ に対して，W^q の x での接空間が，M の接空間と N の接空間によって張られる。（$m + n < q$ なら，$M \cap N = \phi$ である。）

また，$N^n \subset W^q$，部分多様体，$f : M^m \longrightarrow W^q$ diff. map が N^n に transeverse とは，$f(M^m)$ と N^n が transeverse に交わるときをいう。

transeversality に関しては次の定理が基本的である。

<u>定理</u>　$N^n \subset W^q$ 部分多様体，$f : M^m \longrightarrow W^q$ diff. map

$\Rightarrow$ f を十分小さな isotopy で動かして transeverse に出来る。（下図参照）



3.）ハンドル分解

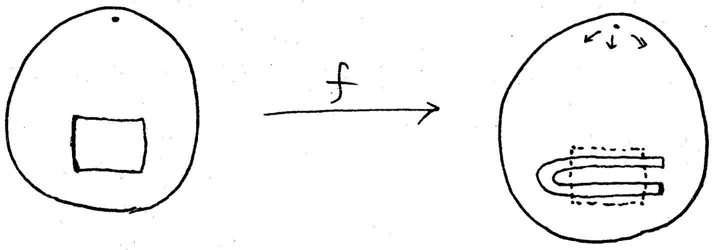
m 次元多様体 M^m の handle 分解とは，（境界を持つ同次元の）部分多様体の列，$\phi \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M^m$ で次の条件を満たすものを言う。

$\overline{M_j - M_{j-1}} = \bigcup_{i=1}^{n_j} D_i^j \times D_i^{m-j}$，（$D_i^j$ は j 次元の円板）と書けて，$D_i^j \times D_i^{m-j} \cap M_{j-1} = D_i^j \times D_i^{m-j} \cap \partial M_{j-1} = \partial D_i^j \times D_i^{m-j}$（$= S_i^{j-1} \times D_i^{m-j}$）となっている。$D_i^j \times D_i^{m-j}$ を（i 番目の）j-handle と呼ぶ。

3. Constructing Structurally Stable Diffeomorphism

まず，一つの具体例として，Smale による horse-shoe diffeo. が，S^2 上の identity map を isotope して得られることに注意しておく。

$f: S^2 \longrightarrow S^2$ は isotopic to identity map
horse-shoe

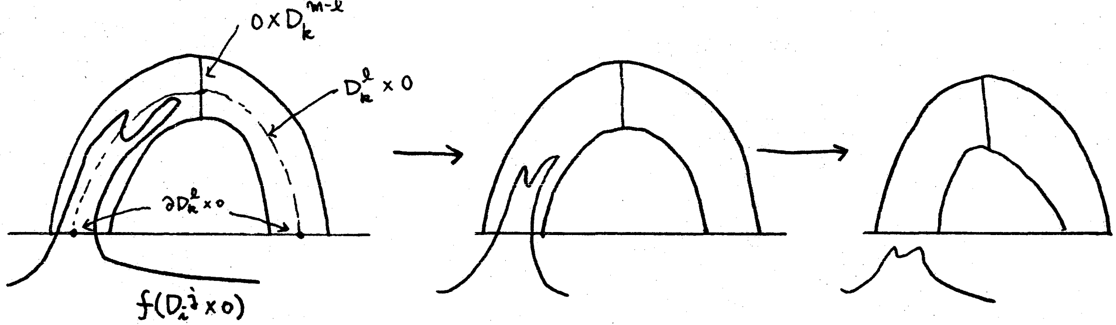


このとき，identity map は力学系の理論の立場から言えば扱い易いものではない。と言うのは，identity map は構造安定でもないし，Axiom A も満たさないし，Morse −Smale でもない。それに対して，horse-shoe は Axiom A を満たし，strong transeversality も満たし，構造安定でもある。また $\dim \Omega(f) = 0$ で，$\Omega(f)$ は finite type の subshift と位相共役であるから，periodic pts の数，topological entropy が計算できる。

任意の diffeo. についても，今と全く同様に isotopy で動かせば望ましい diffeo. が得られることを示そう。

$f: M^m \longrightarrow M^m$ diffeo. とし，M^m に一つの handle 分解が与えられているとする。まず，f を少しだけ isotopy で動かして，$\forall j, l, k, i$ に対して，$f(D_i^j \times 0)$ と $0 \times D_k^{m-l}$ を transeverse に出来る。従って，$l > j$ なら $\dim D_i^j \times 0 + \dim 0 \times D_k^{m-l} = (m-(l-j)) < m$ だから，$f(D_i^j \times 0) \cap 0 \times D_k^{m-l} = \phi$ である。さらに，f を isotopy で動かして $f(D_i^j \times 0) \cap D_k^l \times D_k^{m-l} = \phi$ に出来る。そ

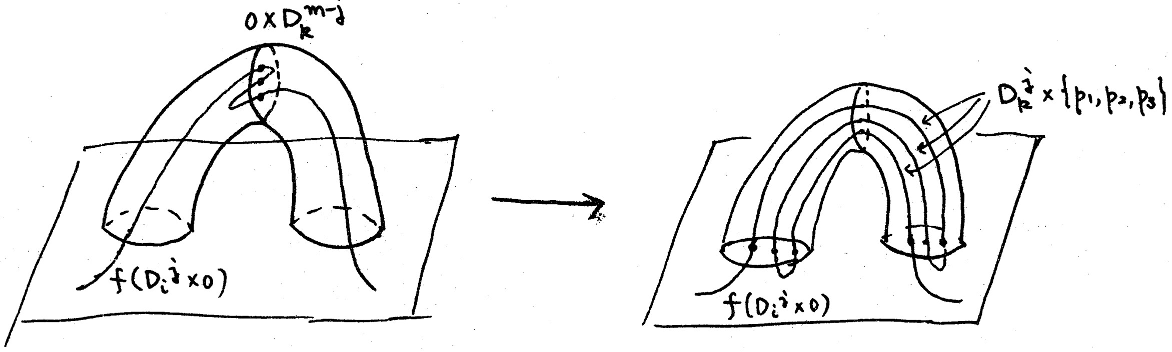
れには，$D_k^l - \{0\}$ から ∂D_k^l への radial projection を用いれば良い。



0-handle について考えると，今の議論によってf(0-handle)が $l \geqq 1$ に対して $\forall$ の l-handle と交わらないように出来る。すべての0-handleにこの操作を行なえば，結局 $f(M_0) \subset M_0$ と出来る。次に1-handleについて考えれば，全く同様に，$l \geqq 2$ なる l-handle とは交わらないように出来て $f(M_1) \subset M_1$ と出来る。inductive に議論して $f(M_i) \subset M_i$ と出来る。さらに各段階で $f(M_i) \subset \mathrm{Int}\, M_i = M_i - \partial M_i$ としておくことも出来る。

次に，$l > j$ でないときについて考える。$l = j$ のとき，$f(D_i^j \times 0)$ と $0 \times D_k^{m-j}$ の交わり方を見ると，$\dim f(D_i^j \times 0) + \dim(0 \times D_k^{m-j}) = m$ で transeverse に交わっているから，$f(D_i^j \times 0) \cap 0 \times D_k^{m-j} =$ 有限個（g_{ik}^j 個としよう）の点 $= \{p_1, p_2, \cdots, p_{g_{ik}^j}\}$ となっている。このとき，$0 \times D_k^{m-j}$ の付近では動かさずに，$D_k^j \times p_i$ の D_k^j に沿って isotopy で動かして，$f(D_i^j \times 0) \cap D_k^j \times D_k^{m-j} = D_k^j \times \{p_1, p_2, \cdots, p_{g_{ik}^j}\}$ と出来る。また，$f | D_i^j \times D_i^{m-j}$ が $D_i^j \times 0$ の方向には

expanding, $0\times D_k^{m-j}$ の方向には contracting にしておく。
$l<j$ のときも, $f(D_i^j\times 0)\cap 0\times D_k^{m-j}=(j-l)$次元多様体になるが, 全く同じ議論が出来る。



このようにしてfから得られたdiffeo.をg（今までは簡単のためすべてfと書いた）とすれば, gはfとisotopicで, 次の性質を満たす。（但し, 今までの議論は技術的なdetailsは省略した点がある。）

<u>定理</u>　$\forall f: M^m\to M^m$ diffeo. に対して, $\exists g: M^m\to M^m$ diffeo.

s.t. (1) gはfとisotopic

(2) Axiom A と strong transversality を満たす, 従って, (J. Robbin[3]によって)構造安定。

(3) $\dim\Omega(g)=0$, さらに, gは$\Omega(g)$の各basic set上ではfinite typeのsubshiftに位相的共役。

(4) topological entropy of $g\geq\max\log|\lambda|$

λは$g_*: H_*(M:\mathbb{R})\to H_*(M:\mathbb{R})$の固有値.

系. 上の (1)〜(4)を満たす diffeo. の集合は, diffeo. 全体の空間の中で C^0-dense.

系の証明. 定理の証明では M^m の handle 分解が一つ与えられていた。 この handle 分解は, いくらでも細かく取れるから, g は f に C^0-topology ではいくらでも近く取れる。(但し C^r-topology $r \geqq 1$ ではだめ。)

定理の証明 (2), (3), (4) は, 概略次の様にして得られる。 $\Omega(g)$ を調べる。 $g(M_i) \subset \mathrm{Int}\, M_i$, $M_i = \bigcup_{k \leqq i}$ k-handles であったから, x が j-handle の点のとき (i.e. $x \in M_j - \mathrm{Int}\, M_j$), $f(x) \in M_{j-1}$ となれば, $f^2(x) \in \mathrm{Int}\, M_{j-1}$, $f^k(x) \in \mathrm{Int}\, M_{j-1}$ for ${}^\forall k \geqq 2$ となり, $x \notin \Omega(g)$ である。 $x \in D_i^j \times D_i^{m-j} \cap \Omega(g)$ とすると, $f(x) \in D_k^j \times D_k^{m-j}$ for some k となる。前の作り方から, f は x で hyperbolic である。 このとき, f の状況を良く見れば, 本質的に horse-shoe diffeo. の場合 ($i=k$ に当たる.) と同じ状態になっていることが分かる。そのことから, 性質 (2), (3) を満たす。 (4)は後でまた述べるが, $\dim \Omega(g) = 0$, g : Axiom A から. (4) が出ることは, すでに. R. Bowen [4] が示している。

4. A characterization of Morse-Smale diffeomorphism

前節で作った g がいつ Morse-Smale になるかを考える。g

は性質 (2) を満たすから，$\Omega(g) = \text{finite}$ $\overset{\text{set}}{\vee}$ の時に限り Morse－Smale である。今の場合，$\overline{Per(g)} = \Omega(g)$ だから，$Per(g) = \text{finite}$ $\overset{\text{set}}{\vee}$ の時，Morse－Smale である。

i 番目の j－handle(の core) の f による像と k 番目の j－handle の (transeverse disk) との交わりの個数を g^j_{ik} とした。つまり，$f(D^j_i \times 0) \cap 0 \times D^{m-j}_k = g^j_{ik}$ 個の点。行列 G_j を $G_j = (g^j_{ik})$ で決める。subshift と共役と言うことから，周期点の数が数えられて，$N_m(g) = g^m$ の fixed pts の数 とすると，

$$N_m(g) = \sum_j \text{trace}\, G_j^{\,m}$$

となることが分かる。従って，

<u>Prop.</u> g : Morse－Smale $\Leftrightarrow$ $\sum_j \text{trace}\, G_j^{\,m}$ が bounded

$\Leftrightarrow$ G_j のすべての0でない固有値は，1の巾根。

また，$G_j = (g^j_{ik})$ の代りに，交わりでの符号もこめて数えた algebraic intersection number の行列を，$A_j = (a^j_{ik})$ とすると，A_j は $g_* : H_*(M) \longrightarrow H_*(M)$ の chain level での chain map $g_* : H_j(M_j, M_{j-1}) \longrightarrow H_j(M_j, M_{j-1})$ を表わしている。今，M を単連結，$\dim M \geqq 6$ と仮定すれば，Whitney's device によって，$g^j_{ik} = |a^j_{ik}|$ と出来る。

従って，A_j の 0 でない固有値がすべて絶対値 1 であれば g は Morse－Smale に取れる。この様な議論で，結局，次

の定理が得られる。

定理 M：単連結, $\dim M \geqq 6$ とする。

$\exists m$, f^m が isotopic to a Morse-Smale diffeo

$\Longleftrightarrow$ $f_* : H_*(M:\mathbb{R}) \longrightarrow H_*(M:\mathbb{R})$ の固有値が1の巾根

この定理が, f^m の形になるのは, 右側の条件をホモロジーレベルで与えたためで, chain level の A_j の条件にすれば $m=1$ に取れる。最後に, 関連した問題を述べる。

問題 1. f : Axiom A, no cycle property

$\Rightarrow$ topological entropy of $f \geqq \max \log|\lambda|$

λ は $f_* : H_*(M:\mathbb{R}) \circlearrowleft$ の固有値.

2. 上の予想は. f に何の仮定もいらない。

3. f : 構造安定, top. entropy of $f = 0$

$\Rightarrow$ f : Morse-Smale

4. f : 構造安定 (or Axiom A + strong transversality)

$\Rightarrow$ g は, entropy of $g \leqq$ entropy of f に取れる。

5. その他.

文 献

[1] M. Shub and D. Sullivan, Homology Theory and Dynamical Systems, to appear

[2] M. Shub, Dynamical Systems, Filtrations and Entropy, Bull. A.M.S. Vol. 80 No. 1 (1974), pp. 27–41

[3] J. Robbin, A structurally stability theorem, Ann. of Math. (2) 94 (1971), pp 447–493

[4] R. Bowen, Entropy v.s. Homology for certain diffeomorphisms, Topology, Vol. 13 (1974), pp 61–67

以上